第 27 卷 第 4 期
Vol. 27 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 4 月
Apr. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 04-0571-04

一个基于三角函数的直觉模糊熵公式

魏翠萍, 高志海, 郭婷婷

(曲阜师范大学 管理学院，山东 日照 276826)

摘 要: 利用三角函数定义了一个直觉模糊熵公式, 该公式不仅考虑了直觉模糊集的隶属度与非隶属度的偏差, 而且考虑了直觉模糊集的犹豫度. 对以往文献给出的两个直觉模糊熵公式进行了讨论, 并将所提出的公式与这两个公式进行了比较. 算例分析表明, 所提出的熵公式能够反映直觉模糊集的不确定性和未知性程度.

关键词: 直觉模糊集；直觉模糊熵；犹豫度

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A

An intuitionistic fuzzy entropy measure based on trigonometric function

WEI Cui-ping, GAO Zhi-hai, GUO Ting-ting

(Management College，Qufu Normal University，Rizhao 276826，China．Correspondent：WEI Cui-ping，E-mail: wei_cuiping@yahoo.com.cn)

Abstract：Based on a trigonometric function, an effective entropy measure for intuitionistic fuzzy sets is proposed. The entropy measure reflects not only the difference between the membership degree and the nonmembership degree, but also the hesitancy degree. Then two intuitionistic fuzzy entropy formulas proposed by former references are discussed and compared with the proposed formula. Numerical examples are given to show that the proposed entropy measure can measure the fuzziness and intuitionism of intuitionistic fuzzy sets.

Key words：intuitionistic fuzzy set；intuitionistic fuzzy entropy；hesitancy degree

1 引 言

Zadeh[1]于 1965 年引入了模糊集的概念, 随后人们提出了模糊集的一些推广形式, 例如直觉模糊集 (IFS)[2], 区间直觉模糊集 (IVIFS)[3], Vague 集[4]和区间值模糊集 (IVFS)[5], 并研究了这些推广形式之间的关系[6-8]. 研究表明, 直觉模糊集、区间值模糊集与 Vague 集理论是等价的, 而区间直觉模糊集是直觉模糊集的推广形式.

直觉模糊熵是模糊集理论中一个重要的研究对象, 用以刻画直觉模糊集的不确定性和未知性程度, 许多学者从不同的角度对其进行了深入研究. Burillo 等人[9]引入直觉模糊集的熵来度量一个直觉模糊集的未知程度. 在此基础上, Szimidt 等人[10]利用直觉模糊集的几何解释, 提出了计算直觉模糊熵的公式. 随后很多学者提出了不同形式的直觉模糊熵公式[11-12]和区间模糊集的熵公式[13-14].

Ye[15]基于三角函数提出了两个直觉模糊熵公式. 经过研究发现, 这些公式只考虑了直觉模糊集的隶属度与非隶属度的偏差, 而没有考虑其犹豫度. 对于隶属度与非隶属度的绝对偏差相同的任意两个直觉模糊集, 利用这些公式计算得到的直觉模糊熵相同, 这显然与直觉不符. 例如, 对直觉模糊集 $A=\{\langle x_i, 0.1, 0.3\rangle | x_i\in X\}$ 和 $B=\{\langle x_i, 0.4, 0.6\rangle | x_i\in X\}$, 应用 Ye 提出的公式, A 与 B 的直觉模糊熵相同, 但从直觉上看, A 的模糊程度显然比 B 大. 事实上, 一个直觉模糊集的模糊程度, 不仅与其隶属度和非隶属度的差异程度有关, 而且与其未知性程度有关, 这种未知性程度由其犹豫度决定. 基于此, 本文定义了一个直觉模糊熵公式, 该公式不仅考虑了直觉模糊集的隶属度与非隶属度的偏差, 而且考虑了其犹豫度, 可以更充分地反映直觉模糊集的不确定性和未知性程度. 此外, 本文还证明了 Ye[15]提出的两个公式是等价的, 并对其进行了简化. 实例分析表明, 本文给出的公式可以合理

收稿日期: 2010-10-26；**修回日期:** 2010-12-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171187, 11071142)；教育部人文社会科学研究青年基金项目(10YJC630269)；山东省高等学校科技计划项目(J09LA14).

作者简介: 魏翠萍(1970−), 女, 教授, 从事决策理论与应用、信息融合等研究；高志海(1983−), 男, 硕士生, 从事决策理论与应用的研究.

有效地反映直觉模糊集的模糊程度.

2 一个基于三角函数的直觉模糊熵公式

定义 1 [2] 设 X 是一个给定的论域, 称 $A=\{\langle x, u_A(x), v_A(x)\rangle | x\in X\}$ 为 X 上的直觉模糊集, 记为 IFS. 其中: $u_A: X\to[0,1], v_A: X\to[0,1]$ 且满足条件 $0\leqslant u_A(x)+v_A(x)\leqslant 1, x\in X, u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度.

X 上所有 IFS 记为 IFS(X). 称 $\pi_A(x)=1-u_A(x)-v_A(x)$ 为 x 属于 A 的犹豫度. 特别地, 若 $\pi_A(x)=0$, 则 A 退化为传统的模糊集. 直觉模糊集 A 的补集定义为

$$A^C=\{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle | x\in X\}.$$

定义 2 [2] 两个直觉模糊集

$$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x\in X\},$$

$$B=\{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle | x\in X\}$$

之间的关系定义如下:

1) $A\subseteq B$ 当且仅当对于任意的 $x\in X$ 有

$$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),\ \nu_A(x)\geqslant\nu_B(x);$$

2) $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 同时成立.

下文中假设论域 X 为有限集, 并记 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Szimidt 等人[10]给出了如下直觉模糊熵的公理化定义:

定义 3 [10] 一个映射 $E:$ IFS$(X)\to[0,1]$ 称为直觉模糊熵, 如果 E 满足如下条件:

条件 1 $E(A)=0$ 当且仅当 A 是一个分明集;

条件 2 $E(A)=1$ 当且仅当对于每一个 $x_i\in X$ 都有 $\mu_A(x_i)=\nu_A(x_i)$ 成立;

条件 3 $E(A)=E(A^C)$;

条件 4 $E(A)\leqslant E(B)$ 如果对于任意的 $x_i\in X$, 当 $\mu_B(x_i)\geqslant\nu_B(x_i)$时, 有

$$\mu_A(x_i)\geqslant\mu_B(x_i),\ \nu_B(x_i)\geqslant\nu_A(x_i);$$

或者当 $\mu_B(x_i)\leqslant\nu_B(x_i)$ 时, 有

$$\mu_A(x_i)\leqslant\mu_B(x_i),\ \nu_B(x_i)\leqslant\nu_A(x_i).$$

下面给出一个新的直觉模糊熵公式. 对于任意的直觉模糊集 $A\in$ IFS(X), 定义

$$E(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi, \tag{1}$$

则有下面的定理成立:

定理 1 由式 (1) 定义的 E 是一个直觉模糊熵.

证明 要证明由式 (1) 定义的 E 是一个直觉模糊熵, 只需证明该公式满足定义 3 中的条件 1 ∽ 条件 4.

式 (1) 中, 令

$$E_i(A)=\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi, \tag{2}$$

则由 $0\leqslant\mu_A(x_i)\leqslant 1, 0\leqslant\nu_A(x_i)\leqslant 1, 0\leqslant\pi_A(x_i)\leqslant 1$, 得

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此 $0\leqslant E_i(A)\leqslant 1$.

对于条件 1, 设 A 是一个分明集, 也就是说对于任意 $x_i\in X$ 都有 $\mu_A(x_i)=0, \nu_A(x_i)=1$, 或者 $\mu_A(x_i)=1, \nu_A(x_i)=0$. 无论哪种情况都有 $E_i(A)=0$, 因此 $E(A)=0$. 如果 $E(A)=0$, 则由 $0\leqslant E_i(A)\leqslant 1$ 和式 (1) 可知 $E_i(A)=0$. 又因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此

$$\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi=\frac{\pi}{2},$$

or

$$\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

由此可得 $\mu_A(x_i)=1, \nu_A(x_i)=0$ 或 $\mu_A(x_i)=0, \nu_A(x_i)=1$, 所以 A 是一个分明集.

对于条件 2, 假设对于任意的 $x_i\in X$ 都有

$$\mu_A(x_i)=\nu_A(x_i),$$

则由式 (2) 可得 $E_i(A)=1$, 所以 $E(A)=1$. 现在假设 $E(A)=1$, 则由

$$E(A)=\frac{1}{n}E_i(A),\ 0\leqslant E_i(A)\leqslant 1,$$

可知 $E_i(A)=1$. 又由

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

可得 $\mu_A(x_i)=\nu_A(x_i)$.

对于条件 3, 由 $A^C=\{\langle x_i, \nu_A(x_i), \mu_A(x_i)\rangle | x_i\in X\}$ 和式 (1) 易得

$$E(A^C)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\nu_A(x_i)-\mu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi=E(A).$$

对于条件 4, 假设对于任意的 $x_i\in X$, 当 $\mu_B(x_i)\geqslant\nu_B(x_i)$ 时, 有

$$\mu_A(x_i)\geqslant\mu_B(x_i),\ \nu_B(x_i)\geqslant\nu_A(x_i).$$

下面用反证法证明

$$\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{1+\pi_A(x_i)}\geqslant\frac{\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)}{1+\pi_B(x_i)}.$$

假设 1

$$\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{1+\pi_A(x_i)}<\frac{\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)}{1+\pi_B(x_i)},$$

则有

$$(\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i))(2-\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i))<(\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i))(2-\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)).$$

整理后可得

$$\nu_B(x_i)(1-\mu_A(x_i))+\mu_B(x_i)(\nu_A(x_i)-1)+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)<0. \quad (3)$$

由 $1-\mu_A(x_i)\geqslant 0, \nu_B(x_i)\geqslant\nu_A(x_i)$ 可得

$$\nu_B(x_i)(1-\mu_A(x_i))\geqslant\nu_A(x_i)(1-\mu_A(x_i));$$

又由 $\nu_A(x_i)-1\leqslant 0, \mu_B(x_i)\leqslant\mu_A(x_i)$ 可得

$$\mu_B(x_i)(\nu_A(x_i)-1)\geqslant\mu_A(x_i)(\nu_A(x_i)-1),$$

因此

$$\nu_B(x_i)(1-\mu_A(x_i))+\mu_B(x_i)(\nu_A(x_i)-1)+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)\geqslant 0.$$

这与由假设 1 得到的式 (3) 矛盾, 所以假设 1 不成立, 从而有

$$\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{1+\pi_A(x_i)}\geqslant\frac{\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)}{1+\pi_B(x_i)}.$$

又因为 $\mu_B(x_i)\geqslant\nu_B(x_i), \mu_A(x_i)\geqslant\nu_A(x_i)$, 因此

$$0\leqslant\frac{\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)}{2(1+\pi_B(x_i))}\pi\leqslant\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

若当 $\mu_B(x_i)\leqslant\nu_B(x_i)$ 时, 有

$$\mu_A(x_i)\leqslant\mu_B(x_i),\ \nu_B(x_i)\leqslant\nu_A(x_i),$$

则此时应用上述方法, 同理可证

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{2(1+\pi_A(x_i))}\pi\leqslant\frac{\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)}{2(1+\pi_B(x_i))}\pi\leqslant 0.$$

由余弦函数在区间 $[-\pi/2, 0]$ 和 $[0, \pi/2]$ 上的单调性易得, 对于任意的 $x_i\in X$, 有 $E_i(A)\leqslant E_i(B)$, 因此 $E(A)\leqslant E(B)$. □

3　与现有直觉模糊熵公式的比较

下面将式 (1) 与 Ye[15]提出的直觉模糊熵公式进行比较. 设 A 是定义在论域 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的直觉模糊集, Ye[15]给出了如下两个计算直觉模糊熵的公式:

$$J_1(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\sin\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}, \quad (4)$$

$$J_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}. \quad (5)$$

定理 2　$J_1(A)$ 与 $J_2(A)$是等价的, 并且可以化成下面的形式:

$$J(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}. \quad (6)$$

证明　由三角函数的性质可知

$$J_1(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi\right)-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\};$$

$$J_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi\right)-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}.$$

因此 $J_1(A)=J_2(A)$. 将其进一步化简, 可得

$$J_1(A)=J_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sqrt{2}\left[\sin\frac{2+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}.$$

由此定理 2 得证. □

例 1　计算直觉模糊集

$$A_1=\{\langle x_i, 0.2, 0.3\rangle|x_i\in X\},$$
$$A_2=\{\langle x_i, 0.2, 0.4\rangle|x_i\in X\},$$
$$A_3=\{\langle x_i, 0.4, 0.1\rangle|x_i\in X\},$$
$$A_4=\{\langle x_i, 0.3, 0.6\rangle|x_i\in X\},$$
$$A_5=\{\langle x_i, 0.1, 0.6\rangle|x_i\in X\},$$
$$A_6=\{\langle x_i, 0.2, 0.7\rangle|x_i\in X\}$$

的直觉模糊熵.

先用式 (6) 计算直觉模糊熵, 可得

$$J(A_1)=0.9895,\ J(A_2)=0.9580,$$
$$J(A_3)=0.9057,\ J(A_4)=0.9057,$$
$$J(A_5)=0.7400,\ J(A_6)=0.7400.$$

可以看出, 直觉模糊熵 J 只考虑了直觉模糊集的隶属度与非隶属度的差异, 因此对直觉模糊集 A_3 和 A_4, A_5 和 A_6 得到 $J(A_3)=J(A_4)$, $J(A_5)=J(A_6)$, 这显然与直觉不符.

现在用式 (1) 计算直觉模糊熵, 可得

$$E(A_1)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.2-0.3}{2(1+0.5)}\pi=\cos\frac{1}{30}\pi=0.9945,$$
$$E(A_2)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.2-0.4}{2(1+0.4)}\pi=\cos\frac{2}{28}\pi=0.9749,$$
$$E(A_3)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.4-0.1}{2(1+0.5)}\pi=\cos\frac{3}{30}\pi=0.9511,$$
$$E(A_4)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.3-0.6}{2(1+0.1)}\pi=\cos\frac{3}{22}\pi=0.9096,$$
$$E(A_5)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.1-0.6}{2(1+0.3)}\pi=\cos\frac{5}{26}\pi=0.8230,$$
$$E(A_6)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{0.2-0.7}{2(1+0.1)}\pi=\cos\frac{5}{22}\pi=0.7557.$$

由上述运算结果可以看出, 一个直觉模糊集的隶属度与非隶属度越接近或者犹豫度越大, 说明该直觉模糊集的模糊程度越高, 此时由式 (1) 计算得到的熵越大. 而且对于直觉模糊集 A_3 和 A_4, A_5 和 A_6, 有

$$E(A_3)>E(A_4),\ E(A_5)>E(A_6),$$

即 A_3 的模糊性程度大于 A_4 的模糊性程度, A_5 的模糊性程度大于 A_6 的模糊性程度, 此结果与人们的直觉相符. 因此, 式 (1) 计算的结果可以充分反映直觉模糊集的模糊程度.

4 结 论

本文首先基于三角函数提出了一个计算直觉模糊熵的公式, 该公式从隶属度和非隶属度的偏差和犹豫度两方面反映直觉模糊集的不确定程度和未知性程度, 从而充分刻画了直觉模糊集的模糊程度; 然后对 Ye[15]提出的两个直觉模糊熵公式进行了讨论, 并通过实例将所提出的公式与Ye[15]提出的的公式进行了比较, 充分说明了所提出公式的有效性和合理性.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-356.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[4] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.

[5] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Science, 1975, 8(1): 199-249.

[6] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.

[7] Cornelis C, Atanassov K T, Kerre E E. Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: A critical comparison[C]. Proc 3 rd European Conf on Fuzzy Logic and Technol (EUSFLAT'03). Zittau, 2003: 159-163.

[8] Deschrijver G, Kerre E E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 133(2): 227-235.

[9] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(3): 305-316.

[10] Szmidt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(3): 467-477.

[11] Hung W L, Yang M S. Fuzzy entropy on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2006, 21(4): 443-451.

[12] Zhang Q S, Jiang S Y. A note on information entropy measures for vague sets and its application[J]. Information Sciences, 2008, 178(21): 4184-4191.

[13] Zeng W Y, Li H X. Relationship between similarity measure and entropy of interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(11): 1477-1484.

[14] Zhang H Y, Zhang W X, Mei C L. Entropy of interval-valued fuzzy sets based on distance and its relationship with similarity measure[J]. Knowledge-Based Systems, 2009, 22(6): 449-454.

[15] Ye Jun. Two effective measures of intuitionistic fuzzy ertropy[J]. Computing, 2010, 87(1/2): 55-62.