第二章习题及参考答案

2.1 已知速度场$\bar{u} = xt\bar{i} + yt\bar{j} + zt\bar{k}$，试求质点的迹线，此质点在 t=0 时处于 x=a, y=b, z=c 的位置上。

$$\left(答：\begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}t^2} + a - 1 \\ y = e^{\frac{1}{2}t^2} + b - 1 \\ z = e^{\frac{1}{2}t^2} + c - 1 \end{cases}\right)$$

2.2 已知二元速度场$u_x = x + t, u_y = y + t$，求迹线方程，已知此质点在 t=1 时处于 x=1, y=2 的位置上。

$$\left(答：\begin{cases} x = 3e^{t-1} - t - 1 \\ y = 4e^{t-1} - t - 1 \end{cases}\right)$$

2.3 已知速度场$u_x = u_0, u_y = v_0 \cos(kx - at)$，式中$u_0$, v_0, k, a为常数，试求流线方程，并求t=0 时过x=0, y=0 点的流体质点的迹线，以及t=0 时过x=0, y=0 点的流线。当$k, a \to 0$时，试比较这两条线。

(答：$y = \frac{v_0}{u_0}\sin(kx - at), y = v_0 \sin(kx - \frac{a}{u_0}x)$

流线$y = 0$, 迹线$y = 0$)

2.4 已知速度分布为$u_x = e^t(a+1) - 1, u_y = e^t(b+1) - 1$

（1） 求 t=0 时刻位于 x=a, y=b 点的质点的轨迹线。

（2） 求 t=0 时刻通过 x=1, y=2 点的流线。

（答：$(1)\begin{cases} x = (a+1)e^t - t - 1 \\ y = (b+1)e^t - t - 1 \end{cases}$

（2）$bx - ay = b - 2a$）

2.5 已知二元速度场$u_x = x/(1+t), u_y = y$

（1） 求迹线方程，已知条件为$x|_{t=0} = a, y|_{t=0} = b$

（2） 求流线方程，已知条件为$x|_{y=1,t=0} = 1$

（答：（1）$\begin{cases} x = t + a \\ y = e^t + b + 1 \end{cases}$

（2） $x = y$）

2.6 已知平面流场$u_x = 1 + 2t, u_y = 3 + 4t$求

（1） 流线方程

（2） t=0 时，经过（0，0）；（0，1）；（0，-1）点的三条流线形状；

（3） t=0 时，位置在（0，0）点的流体质点的迹线方程。

$$\begin{pmatrix} \text{答：} & \\ (1) & (1+2t)y - (3+4t)x = C \\ (2) & y = 3x; y = 3x + 1; y = 3x - 1 \\ (3) & \begin{cases} x = t + t^2 \\ y = 3t + 2t^2 \end{cases} \end{pmatrix}$$

2.7 检查下列流速分量的平面流动是否满足连续性条件：

(1) $u_x = kx, u_y = -ky;$

(2) $u_x = k\left(x^2 + xy - y^2\right), u_y = k\left(x^2 + y^2\right);$

(3) $u_x = k\sin(xy), u_y = -k\sin(xy);$

(4) $u_x = k\ln(xy), u_y = -k\ln(y/x).$

（答：（1） 满足；（2） 不满足；（3） 不满足；（4） 不满足。）

2.8 三元流场，已知$u_x = x^2 + y^2 + x + y + z, u_y = y^2 + 2yz$，根据连续条件求$u_z$。

（答：$u_z = -2z(x+y) - z^2 - z$）

2.9 已知

(1) $u_x = \dfrac{ky}{x^2+y^2}, u_y = -\dfrac{ky}{x^2+y^2};$

(2) $u_x = x^2 + 2xy, u_y = y^2 + 2xy;$

(3) $u_x = y + z, u_y = z + x, u_z = x + y$

判断上述流场是否连续？是否为有旋流动？

（答：（1） 不连续；（2） 不连续；（3） 连续，无旋。）

2.10 下列流场是否连续？是否无旋？

(1) $u_x = 4, u_y = 3x;$

(2) $u_x = 4y, u_y = -3x;$

(3) $u_x = 4xy, u_y = 0;$

(4) $u_r = c/r, u_\theta = 0;$

(5) $u_r = 0, u_\theta = c/r$

（答：（1） 连续，有旋；（2） 连续，有旋；（3） 不连续；（4）提示：$\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} = 0$连续，无旋。（5）连续，无旋）

2.11 推证不可压缩流体在平面极坐标系中的连续性方程式和旋转角速度为：

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_r}{r\partial \theta}\right)$$

2.14 求下列平面流动中半径为r_1和r_2的两条线间的流量值：

（1）$u_r=0, u_\theta=c/r$；

（2）$u_r=0, u_\theta=cr$

（答：（1）$c\ln(r_1/r_2)$；(2) $\frac{(r_1^2-r_2^2)c}{2}$）

2.15 试确定下列流场是否连续和是否无旋：

(1) $u_x=kx/(x^2+y^2), u_y=ky/(x^2+y^2)$

(2) $u_x=x^2+2xy, u_y=y^2+2xy$

(3) $u_x=y+z, u_y=z+x, u_z=x+y$

（答：（1）和（3）满足连续条件，并为无旋流。）

2.16 试确定下列各势函数是否可能存在：

(1) x^2+y^2

(2) $\sin x$

(3) $\ln(x+y)$

(4) $x+y$

（答：（4）存在）

2.17 试确定下列流函数所描述的流动是否无旋：

(1) $\psi=kxy$

(2) $\psi=x^2-y^2$

(3) $\psi=k\ln(xy^2)$

(4) $\psi=k(1-1/r^2)r\sin\theta$

（答：（1）、（2）、（4）无旋）

2.18 将下列直角坐标系中的流速分量换算为平面极坐标系中的流速分量u_r和u_θ，并验算流动是否无旋：

(1) $u_x=-ky, u_y=kx$

(2) $u_x = -y/(x^2+y^2), u_y = x/(x^2+y^2)$

（答：（1）$u_r = 0, u_\theta = kr$,有旋

（2）$u_r = 0, u_\theta = 1/r$,无旋）

2.19 设平面流动的速度分布为$u_x = 2x, u_y = -6x-2y$。试判断是否存在流函数ψ和势函数φ。若存在，试求之。

（答：流函数存在$\psi = 3x^2+2xy+C$，势函数不存在）

2.20 已知流函数$\psi = 3x^2y-y^3$，问流动是否有势？若是势流，试求势函数φ。

（答：存在势函数$\phi = x^3-3xy^2+C$）

2.21 已知不可压缩平面势流x轴向的速度分量$u_x = yt-x$，并且t=0 时，x=0, y=0 处的u_y=0。试求势函数φ，流函数ψ，以及t=0 时过M（1，1）点的流线方程。

（答：势函数$\phi = -x^2/2+xyt+y^2/2$

流函数$\psi = (y^2-x^2)t/2-xy$

流线方程$xy=1$ ）

2.22 已知

(1) $u_x = ky/(x^2+y^2); u_y = -ky/(x^2+y^2);$

(2) $u_x = x^2+2xy; u_y = y^2+2xy;$

(3) $u_x = y+z; u_y = z+x; u_z = x+y;$

判断上述流场是否连续？是否为有旋流动？

（答：1）不连续；2）不连续；3）连续，无旋）

2.23 已知 $\psi_1=10y,\psi_2=-20x,\psi_3=10y-20x$

1）给出各流场当ψ=0，1，3 时的流线；
2）求u_x, u_y;
3）求φ。

（答：2）$\begin{array}{l} u_{x1}=10,u_{y1}=0;u_{x2}=0,u_{y2}=20; \\ u_{x3}=10,u_{y3}=20 \end{array}$

3）$\phi_1=10x;\phi_2=20y;\phi_3=10x+20y$）

2.24 已知$\phi_1=x^2+y^2,\phi_2=\sin x,\phi_3=x+y,\phi_4=xy$判断上述各流场存在否？若流场存在，求$u_x,u_y$及$\psi$，并绘出流线及等势线示意图。

（答：不存在；不存在；存在；存在；

$u_{x3}=1,u_{y3}=1,\psi_3=-x+y$

$u_{x4}=y,u_{y4}=x,\psi_4=(y^2-x^2)/2$ ）

2.25 流体在两大平板间流动时的速度分布式为：

$$u_x=\frac{u_{\max}}{y_0}(y^2-x^2)$$
$$u_y=0$$

试绘出速度分布示意图，判断流场是否有旋
（答：有旋）

2.26 圆管层流速度场的直角坐标方程为：

$$u_x=u_m-k(y^2+z^2),u_y=0,u_z=0$$

该流场是无旋流动吗？为什么？
（答：不是）

2.27 已知平面势流的流函数$\psi=xy+2x-3y+10$，求势函数与流速分量。

（答：$\phi=\frac{1}{2}(x^2-y^2)-3x-2y,u_x=x-3,u_y=-y-2$）

2.28 已知势函数$\phi=xy$，求流函数ψ及流速分量，并绘出流场的大致情况。

（答：$\psi=\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right),u_x=y,u_y=x$）

2.29 证明流速分量为$u_x=2xy+x,u_y=x^2-y^2-y$的平面流动为势流。求势函数和流函数。

（答：$\phi=x^2y+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2,\psi=xy^2+xy-\frac{1}{3}x^3$）

2.30 已知有旋流动的速度分量为$u_x=2y+3z,u_y=2z+3x,$

$u_z=2x+3y$，求旋转角速度分量和角变形速度分量。

（答：$\omega_x=\omega_y=\omega_z=\frac{1}{2},\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\frac{5}{2}$）

2.31 已知有旋流动的速度场为$u_x=x+y,u_y=y+z,u_z=x^2+y^2+z^2$，求点（2，2，2）的旋转角速度。

（答：$\omega_x=\frac{3}{2},\omega_y=-2,\omega_z=-\frac{1}{2},\omega=\frac{\sqrt{26}}{2}$）

2.32 已知平面流动的流速$u_r=\frac{1}{2\pi r},u_\theta=-\frac{1}{2\pi r}$，求证此流动的为无旋流，并表示其流速的大小和方向。

（答：$u=\frac{\sqrt{2}}{2\pi r},\alpha=tg^{-1}1$）

2.33 已知平面流动的流函数 $\psi = 3x^2 y - y^3$，求势函数，并证明流速与距坐标原点的距离的平方成正比。

（答：$\phi = x^3 - 3xy^2, u = 3(x^2 + y^2)$ ）