

# 自相关计数过程单侧 EWMA 控制图的构建

张 敏, 聂国华, 何 桢  
(天津大学管理与经济学部, 天津 300072)

**摘要:** 研究了自相关泊松计数过程单侧指数加权移动平均(exponentially weighted moving average, EWMA)控制图. 基于 floor 和 ceil 取整函数, 构建了单侧 AF-EWMA 和 AC-EWMA 控制图以监控泊松一阶整值自回归(INAR(1))过程, 并建立二维 Markov 链模型计算控制图平均运行链长, 以此对控制图性能进行了对比分析. 计算结果表明, 针对均值向上偏移, AF-EWMA 图监控性能优于 AC-EWMA 和 AR-EWMA 图, 同时, AF-EWMA 图对控制图初始值的变动具有鲁棒性.

**关键词:** 自相关计数过程; EWMA 控制图; INAR(1)过程; 二维 Markov 链

中图分类号: TP273      文献标识码: A      文章编号: 1000-5781(2014)02-0280-09

## One-sided EWMA control chart for auto-correlated process of count data and its performance analysis

Zhang Min, Nie Guohua, He Zhen

(College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** This paper considers one-sided exponentially weighted moving-average control chart for auto-correlated processes of count data. Based on the floor and ceil rounding function, one-sided AF-EWMA and AC-EWMA control charts are built to monitor the first-order inter-valued auto-correlated process with Poisson count data. Bivariate Markov chain model is used to calculate the average run length of these charts. On the basis of ARL values, performances of the control charts is analyzed and compared. For detecting positive shifts of the mean, it is shown that the performance of AF-EWMA chart is better than that of AC-EWMA and AR-EWMA charts. Besides, AF-EWMA chart is robust to the change of control chart starting value.

**Key words:** auto-correlated counting process; EWMA control chart; INAR(1) process; bivariate Markov chain

## 1 引 言

计数过程在质量管理领域中十分常见, 例如制造过程中的产品缺陷数、服务过程中的顾客投诉数、疾病防控中某种疾病的发病人数等. 对于此类计数过程进行监控时, 一般假设该过程服从泊松分布、广义泊松分布、二项分布以及负二项分布<sup>[1-5]</sup>等. 在过程独立的情况下, Gan<sup>[6]</sup>建立了三种修正 EWMA 控制图(CEWMA, REWMA 以及 FEWMA)对泊松计数过程进行监控, 其中 REWMA 是一般 EWMA 控制图的一种近似, 比较适合建立双侧控制图, 而 CEWMA 以及 FEWMA 控制图更加适合建立单侧(上侧以及下侧)控制

收稿日期: 2012-11-01; 修订日期: 2013-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(70931004); 国家自然科学基金资助项目(70802043); 国家自然科学基金杰出青年资助项目(71225006).

图.此外,传统的休哈特控制图(如c图和p图)<sup>[7]</sup>和CUSUM<sup>[8]</sup>控制图也都能对独立泊松计数过程进行有效的监控,尤其是CUSUM和EWMA能够十分灵敏地检测出过程均值的小偏移.

然而在实际情况中,计数过程中的数据往往存在自相关<sup>[9]</sup>,例如现阶段某种疾病的感染人数将直接影响到下一阶段感染该疾病的人数.同样,计数过程存在自相关的情况在制造业以及服务业也普遍存在.针对计数过程存在的自相关问题,Weiß<sup>[1]</sup>首次将整值自回归滑动平均模型INARMA运用到统计过程控制领域,建立C-控制图、残差控制图、条件控制图以及移动平均控制图,对存在自相关的泊松INAR(1)计数过程进行了有效的监控.刘利平等<sup>[2]</sup>针对泊松INMA(1)过程建立了条件控制图以及残差控制图.

此外,在前面列举的制造业、服务业以及医疗卫生监控中,往往希望被监控的变量越小越好,因此需要监控的只是变量均值的向上偏移.Weiß<sup>[10]</sup>建立了单侧EWMA控制图以监控自相关泊松计数INAR(1)过程,沿用的仍是其在建立双侧控制图<sup>[11]</sup>时所用的round四舍五入取整函数.但是,正如Gan<sup>[6]</sup>曾指出,利用round取整函数建立的离散EWMA控制图更适合于需要对变量进行双侧监控的过程.因此本文针对只需监控变量向上偏移的泊松INAR(1)过程,考查利用其他两种取整函数(向上取整函数ceil以及向下取整函数floor)建立上侧EWMA控制图,通过二维Markov链模型计算平均运行链长(average run length, ARL),并对基于floor,round和ceil取整函数的三种控制图性能进行比较分析.

## 2 自相关泊松计数过程

对于存在自相关的离散过程研究,统计学领域借助二项打薄算子(binomial thinning operator)<sup>[12]</sup>,将传统的自回归滑动平均ARMA(p, q)模型转化为整值型自回归滑动平均INARMA(p, q)模型,很好地描述了离散自相关过程.

**定义 1** 令  $X$  为一离散随机变量,取值范围为  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,定义随机变量  $\alpha \circ X := \sum_{i=1}^X Y_i$ . 其中  $Y_i$  是独立同分布的服从  $B(1, \alpha)$  的伯努利随机变量,并且  $Y_i$  与  $X$  独立,则称“ $\circ$ ”为二项打薄算子.

**定义 2** 令  $\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots$  为独立同分布的变量,取值范围为  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,令  $\alpha \in (0, 1)$ ,若某一离散过程  $\{X_t\}$  有以下迭代式,则称该过程为 INAR(1)过程,即

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

其中所有算子之间相互独立,算子与  $\varepsilon_t$  之间独立,每一时刻  $t$  的算子以及  $\varepsilon_t$  分别与  $\{X_s\}_{s < t}$  独立.

本文研究对象为泊松 INAR(1)计数过程,即假设  $\varepsilon_t \sim \text{Po}(\mu(1 - \alpha))$ ,  $X_0 \sim \text{Po}(\mu)$ .由 INAR(1)模型的定义,可知  $X_t \sim \text{Po}(\mu)^{[1,11-13]}$ ,其中  $\text{Po}(\cdot)$  为泊松分布函数.该过程的特征如表 1 所示.

表 1 泊松 INAR(1)过程的特征  
Table 1 Properties of Poisson INAR(1) process

$E[X_t] = \text{Var}(X_t) = \mu;$	$\rho_k := \text{Corr}(X_t, X_{t-k}) = \alpha^k$
$p_k := \Pr(X_t = k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!};$	$E[X_t   X_{t-1}] = \alpha X_{t-1} + \mu(1 - \alpha)$
$p_{k l} := \Pr(X_t = k   X_{t-1} = l) =$	$\sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_l^j \alpha^j (1 - \alpha)^{l-j} \Pr(\varepsilon_t = k - j)$

## 3 泊松INAR(1)过程单侧EWMA控制图

### 3.1 控制图的建立

如前所述,计数过程往往存在自相关的情况<sup>[14]</sup>.对于本文研究的泊松 INAR(1)过程,由于监控的过程存在自相关,使得无法再使用 Gan<sup>[6]</sup>提出的修正 EWMA 控制图进行监控,所以接下来的内容将围绕建立针对 INAR(1)过程的单侧控制图展开.本节在文献[6]的基础上,针对泊松 INAR(1)过程,采用 floor 和 ceil 取整

函数, 构建的两种泊松 INAR(1)过程单侧 EWMA 控制图为

$$Q_t^f = \text{floor}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}^f), t = 1, 2, \dots, Q_0^f = q_0, \quad (2)$$

$$Q_t^c = \text{ceil}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}^c), t = 1, 2, \dots, Q_0^c = q_0, \quad (3)$$

其中  $\{X_t\}$  是泊松 INAR(1)过程,  $\text{floor}(x)$  表示小于等于  $x$  的最大整数,  $\text{ceil}(x)$  表示大于等于  $x$  的最小整数. 权重  $0 < \lambda \leq 1$ , 当  $\lambda$  取 1 时, 所构建的两种控制图都为常规休哈特控制图(c-控制图), 因而 c-图仍是上述两种控制图的一种特殊情形.  $q_0$  为启动控制图的初始值, 在常规的 EWMA 控制图中,  $q_0$  一般取监控过程的受控均值.

由于  $X_t$  服从泊松分布,  $X_t$  以及  $Q_t^f$  (或  $Q_t^c$ ) 都为非负整数, 所以对于监控的统计量  $Q_t^f$  (或  $Q_t^c$ ) 建立上侧控制图时, 令控制下限  $LCL=0$ , 控制上限  $UCL=h$ ,  $h$  为大于零的整数. 当  $Q_t^f$  (或  $Q_t^c$ )  $\geq UCL = h$  时, EWMA 控制图报警, 表明过程处于失控状态.

### 3.2 二维 Markov 模型的建立

Brook 等<sup>[15]</sup>将 Markov 模型运用到统计过程控制领域, 对控制图的 ARL 进行计算. 但是, 对于本文所构建的两种泊松 INAR(1)过程单侧 EWMA 控制图, 由于  $X_t$  之间存在一阶自相关, 此时若只针对监控的统计变量  $Q_t^f$  (或  $Q_t^c$ ) 建立 Markov 模型, 将无法推导出其概率转移矩阵. 因此, 本节针对变量组  $(X_t, Q_t^f)$  或  $(X_t, Q_t^c)$  建立二维 Markov 模型, 给出基于 floor(以下称 AF-EWMA)以及 ceil(以下称 AC-EWMA)取整函数的两种控制图 ARL 的计算过程, 基于 round 取整函数的控制图(以下称 AR-EWMA)的 ARL 计算过程可参见文献[10].

由控制图的原理可知, 当  $0 \leq Q_t^f$  (或  $Q_t^c$ )  $< h$  时过程处于受控状态. 对于 AF-EWMA 控制图来说, 为了给出受控状态下 Markov 模型的所有转移状态, 令  $Q_t^f = q, 0 \leq q < h$ , 则  $\text{floor}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}^f) = q$ , 即

$$q \leq \lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}^f < q + 1, \quad (4)$$

可知  $X_t$  取值范围为

$$\frac{(q - (1 - \lambda)Q_{t-1}^f)}{\lambda} \leq X_t < \frac{(q + 1 - (1 - \lambda)Q_{t-1}^f)}{\lambda}.$$

此时考虑的是处于受控状态时的 Markov 转移状态, 所以  $0 \leq Q_{t-1}^f \leq h - 1$ . 此外, 由于  $X_t$  是自相关计数过程, 取值都为非负整数. 综合以上条件, 为保证  $Q_t^f = q, X_t$  只能取以下整数, 即

$$\left\lceil \frac{q - (1 - \lambda)(h - 1)}{\lambda} \right\rceil \leq X_t \leq \left\lceil \frac{q + 1}{\lambda} - 1 \right\rceil, \quad (5)$$

其中  $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整函数.

因此 AF-EWMA 控制图所有受控的转移状态为

$$S_{\text{floor}} = \left\{ (x, q) \in \{0, 1, \dots, \left\lceil \frac{h}{\lambda} - 1 \right\rceil\} \times \{0, 1, \dots, h - 1\} \mid \left\lceil \frac{q - (1 - \lambda)(h - 1)}{\lambda} \right\rceil \leq x \leq \left\lceil \frac{q + 1}{\lambda} - 1 \right\rceil \right\}. \quad (6)$$

同理, 对于 AC-EWMA 控制图, 若令  $Q_t^c = q, 0 \leq q < h$ ,  $X_t$  取值范围为

$$\frac{(q - 1 - (1 - \lambda)Q_{t-1}^c)}{\lambda} < X_t \leq \frac{(q - (1 - \lambda)Q_{t-1}^c)}{\lambda},$$

为保证  $Q_t^c = q, X_t$  只能取以下整数.

$$\left\lfloor \frac{q - 1 - (1 - \lambda)(h - 1)}{\lambda} + 1 \right\rfloor \leq x \leq \left\lfloor \frac{q}{\lambda} \right\rfloor, \quad (7)$$

则 AC-EWMA 控制图所有受控转移状态为

$$S_{\text{ceil}} = \left\{ (x, q) \in \{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{h - 1}{\lambda} \right\rfloor\} \times \{0, 1, \dots, h - 1\} \mid \left\lfloor \frac{q - 1 - (1 - \lambda)(h - 1)}{\lambda} + 1 \right\rfloor \leq x \leq \left\lfloor \frac{q}{\lambda} \right\rfloor \right\}, \quad (8)$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向下取整函数.

### 3.3 ARL的计算

对于 AF-EWMA 控制图, 在 3.2 节给出所有 Markov 转移状态之后, 构建状态转移概率矩阵  $\mathbf{T}_{\text{floor}}$  为

$$\mathbf{T}_{\text{floor}} = (p^f, ((m, i) \rightarrow (n, j))) \quad (9)$$

其中  $p^f((m, i) \rightarrow (n, j))$  指基于 floor 函数的由状态  $(m, i)$  转移到状态  $(n, j)$  的概率,  $(n, j), (m, i) \in S_{\text{floor}}$ , 矩阵  $\mathbf{T}_{\text{floor}}$  中元素表示所有受控转移状态之间的转移概率. 转移概率计算公式推导如下:

$$\begin{aligned} p^f((m, i) \rightarrow (n, j)) &= \Pr(X_t = n, Q_t^f = j | X_{t-1} = m, Q_{t-1}^f = i) \\ &= \Pr(Q_t^f = j | X_t = n, X_{t-1} = m, Q_{t-1}^f = i) \Pr(X_t = n | X_{t-1} = m, Q_{t-1}^f = i) \\ &= \Pi_{\lfloor j, j+1 \rfloor} (\lambda n + (1 - \lambda) i) \Pr(X_t = n | X_{t-1} = m), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} p_1^f(q_0 \rightarrow (n, j)) &= \Pr(X_1 = n, Q_1^f = j | Q_0^f = q_0) \\ &= \Pr(Q_1^f = j | X_1 = n, Q_0^f = q_0) \Pr(X_1 = n | Q_0^f = q_0) \\ &= \Pi_{\lfloor j, j+1 \rfloor} (\lambda n + (1 - \lambda) q_0) \Pr(X_1 = n), \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $q_0$  是 AF-EWMA 控制图的初始值,  $\Pi_{[a,b]}(x)$  为示性函数, 即

$$\Pi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

令  $u_{(m,i)}$  表示初始状态  $(X_1, Q_1^f) = (m, i)$  情况下的平均运行链长, 定义  $\mathbf{u} = (u_{(m,1)}, u_{(m,2)}, \dots)$ , 根据 Markov 过程的性质有

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{\text{floor}})^{-1}, \quad (12)$$

$\mathbf{I}$  是与转移矩阵  $\mathbf{T}_{\text{floor}}$  相同维数的单位矩阵.

$p_1^f(m, i | q_0)$  表示在初始值为  $q_0$  的情况下, 初始状态为  $(m, i)$  的概率, 则由  $q_0$  转移到初始状态之后, 过程的平均运行链长为

$$\sum_{(m,i) \in S_{\text{floor}}} u_{(m,i)} p_1^f(m, i | q_0).$$

由于从初始值  $q_0$  到初始状态  $(X_1, Q_1^f) = (m, i)$  相当于已经转移一次, 因此在选取初始值  $Q_0^f = q_0$  时, AF-EWMA 控制图的 ARL<sup>[9,11]</sup> 为

$$\text{ARL}^f(q_0) = 1 + \sum_{(m,i) \in S_{\text{floor}}} u_{(m,i)} p_1^f(m, i | q_0). \quad (13)$$

对于 AC-EWMA 控制图, 类似可定义状态转移矩阵  $\mathbf{T}_{\text{ceil}} = (p^c((m, i) \rightarrow (n, j)))$ , 其中  $(n, j), (m, i) \in S_{\text{ceil}}$ . 此时, 基于 ceil 函数的由状态  $(m, i)$  转移到状态  $(n, j)$  转移概率为

$$\begin{aligned} p^c((m, i) \rightarrow (n, j)) &= \Pr(X_t = n, Q_t^c = j | X_{t-1} = m, Q_{t-1}^c = i) \\ &= \Pi_{(j-1, j]} (\lambda n + (1 - \lambda) i) \Pr(X_t = n | X_{t-1} = m), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} p_1^c(q_0 \rightarrow (n, j)) &= \Pr(X_1 = n, Q_1^c = j | Q_0^c = q_0) \\ &= \Pi_{(j-1, j]} (\lambda n + (1 - \lambda) q_0) \Pr(X_1 = n). \end{aligned} \quad (15)$$

同样可以得到在选取初始值  $Q_0^c = q_0$  时, AC-EWMA 控制图的 ARL 为

$$\text{ARL}^c(q_0) = 1 + \sum_{(m,i) \in S_{\text{ceil}}} u_{(m,i)} p_1^c(m, i | q_0), \quad (16)$$

其中此时的  $u_{(m,i)}$  可由  $\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_{\text{ceil}})^{-1}$  求得.

## 4 仿真分析

### 4.1 三种控制图性能比较

为了比较 AF-EWMA、AC-EWMA 以及 AR-EWMA 控制图对泊松 INAR(1)过程的监控效果, 本文利用 MATLAB 2010a 进行编程计算, 分别计算当受控均值  $\mu_0$  为 2.5, 5 和 10 时, 以及过程均值发生不同偏移程度(5%, 10%, 20%, 50%, 100%, 200%)时, 三种控制图的失控 ARL, 以比较它们对于泊松 INAR(1)过程的监控效果. 其中, 自相关系数  $\alpha_0$  分别取 0.25, 0.5, 0.75, 初始值  $q_0$  暂时都取 0. 由于该过程为离散型整值数据, 此时, 无法通过调节上控制限  $h$ , 使得过程受控 ARL 恰好等于预先设定好的某一特定  $ARL_0$ . 但是, 为了保证能够顺利地比较三种控制图的监控性能, 本文分别选取三种控制图的上控制限  $h$ , 使得三者在同一权重参数  $\lambda$  下的  $ARL_0$  尽量接近. 该部分计算结果为表 2 到表 4, states 代表 Markov 链模型中处于受控状态的所有转移状态数.

表 2  $\mu_0 = 2.5$  时三种控制图的 ARL 值  
Table 2 ARL values of three control charts when  $\mu_0 = 2.5$

$\alpha_0$	控制图	$\lambda$	$h$	$q_0$	states	$\mu$						
						2.5	2.625	2.75	3	3.75	5	7.5
0.25	AR-EWMA	0.25	6	0	69	764.9	450.54	326.68	161.56	38.28	12.11	4.96
	AF-EWMA	0.25	4	0	37	761.82	447.67	323.93	159.08	36.32	10.66	4
	AC-EWMA	0.25	7	0	88	765.8	451.41	327.53	162.37	38.97	12.67	5.36
	AR-EWMA	0.35	6	0	49	926.71	551.62	401.31	197.79	43.32	11.69	4.14
	AF-EWMA	0.35	5	0	39	938.34	558.99	406.78	200.37	43.35	11.3	3.88
	AR-EWMA	0.45	6	0	37	394.68	256.78	197.18	109.3	29.95	9.04	3.24
	AF-EWMA	0.45	5	0	30	394.2	256.28	196.67	108.82	29.56	8.76	3.06
	AC-EWMA	0.45	7	0	45	395.12	257.21	197.59	109.68	30.27	9.3	3.41
	AR-EWMA	0.8	8	0	21	713.99	476.93	370.88	208.9	54.23	13	3.19
	AF-EWMA	0.8	8	0	21	895	603.47	471.54	267.61	69.21	15.87	3.55
0.5	AR-EWMA	0.25	6	0	69	324.18	222.49	176.78	106.19	35.39	12.92	5.23
	AF-EWMA	0.25	4	0	37	321.53	220	174.39	103.99	33.6	11.53	4.28
	AC-EWMA	0.25	7	0	88	325.01	223.3	177.57	106.95	36.04	13.45	5.63
	AR-EWMA	0.35	6	0	49	365.17	250.79	199.06	118.73	37.71	12.49	4.46
	AF-EWMA	0.35	5	0	39	365.47	250.86	199.02	118.49	37.29	12.08	4.2
	AR-EWMA	0.45	7	0	49	1220.94	792.17	605.66	329.49	81.2	19.58	5.06
	AF-EWMA	0.45	6	0	41	1220.65	791.84	605.31	329.13	80.88	19.32	4.89
	AC-EWMA	0.45	8	0	58	1221.29	792.52	606	329.81	81.49	19.82	5.24
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.8</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>21</b>	<b>535.49</b>	<b>372.9</b>	<b>297.81</b>	<b>178.56</b>	<b>53.97</b>	<b>14.87</b>	<b>3.71</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.8</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>21</b>	<b>757.05</b>	<b>522.51</b>	<b>414.72</b>	<b>244.75</b>	<b>70.58</b>	<b>18.26</b>	<b>4.19</b>
<b>AR-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>800.72</b>	<b>560.02</b>	<b>447.91</b>	<b>268.46</b>	<b>79.21</b>	<b>20.43</b>	<b>4.49</b>	
<b>AF-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>976.65</b>	<b>667.73</b>	<b>526.82</b>	<b>306.49</b>	<b>84.86</b>	<b>20.49</b>	<b>4.11</b>	
<b>AC-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>17</b>	<b>976.65</b>	<b>667.73</b>	<b>526.82</b>	<b>306.49</b>	<b>84.86</b>	<b>20.49</b>	<b>4.11</b>	
0.75	AR-EWMA	0.25	7	0	94	858.67	600.67	481.46	291.92	92.56	28.2	8.43
	AF-EWMA	0.25	5	0	56	856.77	598.85	479.68	290.24	91.09	26.97	7.51
	AC-EWMA	0.25	8	0	116	859.35	601.34	482.12	292.56	93.13	28.69	8.81
	AR-EWMA	0.45	7	0	49	728.09	516.93	417.99	258.1	83.95	24.88	6.36
	AF-EWMA	0.45	6	0	41	727.77	516.61	417.68	257.81	83.68	24.65	6.19
	AC-EWMA	0.45	8	0	58	728.36	517.19	418.26	258.36	84.19	25.1	6.55
	AR-EWMA	0.8	8	0	21	491.08	358.39	294.73	188.91	66.29	20.5	4.93
	AF-EWMA	0.8	8	0	21	715.06	513.95	418.57	262.25	87.1	25.48	5.79
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>1262.51</b>	<b>879.35</b>	<b>702.17</b>	<b>420.44</b>	<b>125.43</b>	<b>32.82</b>	<b>6.65</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>1316.53</b>	<b>913.09</b>	<b>727.22</b>	<b>432.9</b>	<b>127.28</b>	<b>32.53</b>	<b>6.2</b>
<b>AC-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>17</b>	<b>1316.53</b>	<b>913.09</b>	<b>727.22</b>	<b>432.9</b>	<b>127.28</b>	<b>32.53</b>	<b>6.2</b>	

注: states 代表 Markov 链模型中处于受控状态的所有转移状态数. 从表中加粗的斜体部分, 可以明显地看出在三种控制图中, AF-EWMA 控制图对于上侧泊松 INAR(1)过程的监控效果优于其他两种控制图.

表 3  $\mu_0 = 5$  时三种控制图的 ARL 值  
Table 3 ARL values of three control charts when  $\mu_0 = 5$

$\alpha_0$	控制图	$\lambda$	$h$	$q_0$	states	$\mu$						
						5	5.25	5.5	6	7.5	10	15
0.25	AR-EWMA	0.25	9	0	154	393.82	223.76	136.8	61.98	16.2	6.74	3.41
	AF-EWMA	0.25	7	0	104	392.37	222.38	135.49	60.78	15.24	6.03	2.93
	AC-EWMA	0.25	10	0	182	394.37	224.29	137.32	62.46	16.6	7.05	3.63
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.3</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>127</b>	<b>274.09</b>	<b>170.97</b>	<b>112.34</b>	<b>55.72</b>	<b>15.22</b>	<b>6.04</b>	<b>2.95</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.3</b>	<b>7</b>	<b>0</b>	<b>86</b>	<b>288.49</b>	<b>172.23</b>	<b>109.47</b>	<b>52.06</b>	<b>13.59</b>	<b>5.18</b>	<b>2.51</b>
	<b>AC-EWMA</b>	<b>0.3</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>148</b>	<b>259.92</b>	<b>157.12</b>	<b>101.18</b>	<b>49.47</b>	<b>14.1</b>	<b>5.95</b>	<b>3.04</b>
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>96</b>	<b>642.22</b>	<b>379.44</b>	<b>235.45</b>	<b>103.49</b>	<b>19.97</b>	<b>5.71</b>	<b>2.39</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>84</b>	<b>655.34</b>	<b>385.7</b>	<b>238.54</b>	<b>104.28</b>	<b>19.91</b>	<b>5.62</b>	<b>2.28</b>
	<b>AC-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>11</b>	<b>0</b>	<b>109</b>	<b>642.48</b>	<b>379.69</b>	<b>235.69</b>	<b>103.72</b>	<b>20.16</b>	<b>5.86</b>	<b>2.48</b>
	AR-EWMA	0.8	12	0	43	555.69	357.84	238.48	116.09	23.74	5.47	1.66
AF-EWMA	0.8	12	0	43	743.17	477.76	317.71	153.71	30.45	6.49	1.73	
0.5	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.35</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>133</b>	<b>669.34</b>	<b>414.06</b>	<b>268.02</b>	<b>126.72</b>	<b>27.78</b>	<b>8.13</b>	<b>3.12</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.35</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>115</b>	<b>683.91</b>	<b>422.89</b>	<b>273.56</b>	<b>129.07</b>	<b>28</b>	<b>8.1</b>	<b>3.11</b>
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>96</b>	<b>334.18</b>	<b>221.77</b>	<b>152.78</b>	<b>80.03</b>	<b>20.71</b>	<b>6.37</b>	<b>2.48</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>84</b>	<b>334.75</b>	<b>222.02</b>	<b>152.86</b>	<b>79.97</b>	<b>20.59</b>	<b>6.28</b>	<b>2.37</b>
	<b>AC-EWMA</b>	<b>0.45</b>	<b>11</b>	<b>0</b>	<b>109</b>	<b>334.4</b>	<b>221.98</b>	<b>152.99</b>	<b>80.23</b>	<b>20.88</b>	<b>6.51</b>	<b>2.57</b>
	AR-EWMA	0.8	12	0	43	437.3	294.76	205.08	107.91	26.04	6.48	1.77
	AF-EWMA	0.8	12	0	43	623.94	418.31	289.13	149.76	34.19	7.83	1.88
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>28</b>	<b>530.43</b>	<b>360.31</b>	<b>252.06</b>	<b>133.32</b>	<b>31.67</b>	<b>7.32</b>	<b>1.71</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>28</b>	<b>558.14</b>	<b>376.64</b>	<b>261.94</b>	<b>137.18</b>	<b>31.96</b>	<b>7.29</b>	<b>1.7</b>
	<b>AC-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>31</b>	<b>557.25</b>	<b>376.13</b>	<b>261.64</b>	<b>137.07</b>	<b>31.95</b>	<b>7.29</b>	<b>1.7</b>
0.75	AR-EWMA	0.3	10	0	156	311.96	223.19	164.51	96.55	30.57	10.21	3.78
	AF-EWMA	0.3	9	0	137	473.7	329.96	237.27	133.34	38.59	11.91	3.94
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.35</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>133</b>	<b>324.91</b>	<b>231.1</b>	<b>169.44</b>	<b>98.49</b>	<b>30.39</b>	<b>9.71</b>	<b>3.33</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.35</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>115</b>	<b>325.38</b>	<b>231.4</b>	<b>169.62</b>	<b>98.53</b>	<b>30.31</b>	<b>9.64</b>	<b>3.32</b>
	AR-EWMA	0.4	10	0	112	256.59	185.87	138.46	82.59	26.52	8.54	2.94
	AF-EWMA	0.4	10	0	116	405	286.65	208.96	119.89	35.49	10.7	3.35
	AC-EWMA	0.4	11	0	128	256.83	186.1	138.69	82.8	26.72	8.71	3.07
	<b>AR-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>28</b>	<b>700.86</b>	<b>484.91</b>	<b>345.3</b>	<b>188.77</b>	<b>48.09</b>	<b>11.16</b>	<b>2.04</b>
	<b>AF-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>28</b>	<b>753.52</b>	<b>517.5</b>	<b>366.11</b>	<b>197.98</b>	<b>49.39</b>	<b>11.27</b>	<b>2.04</b>
	<b>AC-EWMA</b>	<b>0.9</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>31</b>	<b>753.51</b>	<b>517.5</b>	<b>366.11</b>	<b>197.98</b>	<b>49.39</b>	<b>11.27</b>	<b>2.04</b>

注: states 代表 Markov 链模型中处于受控状态的所有转移状态数, 从表中加粗的斜体部分, 可以明显地看出在三种控制图中, AF-EWMA 控制图对于上侧泊松 INAR(1)过程的监控效果优于其他两种控制图.

从表 2 至表 4 可以看出, 在存在自相关的泊松 INAR(1)过程中, 三种控制图随着自相关系数  $\alpha_0$  的增加, 三种控制图上限都增加. 此外, 随着加权系数  $\lambda$  的下降, 三种控制图对于过程小偏移的监控效果越好, 例如文中表 2 至表 4 在偏移不超过 100% 时,  $\lambda$  越小, 控制图能够更快的检测到过程失控, 此结论与 Gan<sup>[6]</sup> 利用修正 EWMA 监控独立泊松过程时所得的结论一致.

以上分析说明, 控制图的监控效果与加权系数  $\lambda$  直接相关, 因此接下来可以固定同一个加权系数, 以比较三种控制图的监控效果. 从表 2 至表 4 的计算结果, 尤其是表中斜体的部分, 可以明显地看出在三种控制图中, AF-EWMA 控制图对于上侧泊松 INAR(1)过程的监控效果优于其他两种控制图. 在过程均值偏移较小的时候, AF-EWMA 控制图的监控效果至少能与其他两种控制图保持一致, 甚至更好, 而在过程均值偏移较大的时候, AF-EWMA 控制图比其它两种控制图表现出更好的性能 (ARL 值小). 以表 3 中的一组数据  $\mu_0=5$ ,  $\alpha_0=0.25$ ,  $\lambda=0.3$  为例, AR-EWMA、AF-EWMA 以及 AC-EWMA 三种控制图的上限分别为 9, 7 和 10, 此时, AF-EWMA 控制图的受控平均运行链长  $ARL_0$  为 288.49, 大于 AC-EWMA 的  $ARL_0$  以及 AR-EWMA 的  $ARL_0$ , 同时在均值分别偏移了 10% 和 50% 之后, 其监控效果分别优于 AR-EWMA 和 AC-EWMA 控制图 (例如, 在均值偏移了 10% 时, AF-EWMA 图的 ARL 和 AR-EWMA 图的 ARL 分别为 109.47, 和 112.34), 因而能够更快地检测到过程失控.

AF-EWMA 控制图除了以上主要优点, 从表 2 至表 4 的数据也可以发现, 在  $\lambda$  相同, 三种控制图  $ARL_0$  比较接近的时候, AF-EWMA 控制图的状态数 (states) 最小, 这就使得在计算过程中状态转移矩阵的规模小, 从

而大大地加快计算速度. 尤其是在较大  $\mu_0$  (例如  $\mu_0 = 10$ ), AF-EWMA 控制图的计算效率将明显高于其他两种控制图.

表4  $\mu_0 = 10$  时三种控制图的 ARL 值Table 4 ARL values of three control charts when  $\mu_0 = 10$ 

$\alpha_0$	控制图	$\lambda$	$h$	$q_0$	states	$\mu$						
						10	10.5	11	12	15	20	30
0.25	AR-EWMA	0.3	15	0	348	303.68	148.70	81.93	33.49	9.10	4.29	2.37
	AF-EWMA	0.3	14	0	320	554.34	251.49	128.93	46.49	10.32	4.43	2.34
	AC-EWMA	0.3	17	0	432	778.16	336.28	164.65	55.08	11.28	4.86	2.63
	AR-EWMA	0.35	17	0	374	3793.06	1445.2	615.72	152.49	15.71	4.9	2.4
	AF-EWMA	0.35	16	0	345	4916.62	1801.87	742.72	174.47	16.48	4.98	2.37
	AR-EWMA	0.45	17	0	269	882.90	415.63	213.84	71.96	11.2	3.76	1.95
	AF-EWMA	0.45	16	0	249	956.69	443.64	225.38	74.41	11.27	3.72	1.91
	AC-EWMA	0.45	18	0	290	883.05	415.78	213.98	72.09	11.30	3.84	2.00
	AR-EWMA	0.55	18	0	217	915.52	450.67	238.96	82.33	11.78	3.47	1.65
	AF-EWMA	0.55	17	0	203	929.00	449.99	235.79	80.12	11.43	3.39	1.57
	AR-EWMA	0.80	19	0	98	418.73	235.42	140.01	57.51	9.86	2.63	1.12
	AF-EWMA	0.80	19	0	100	659.22	359.6	207.72	80.76	12.10	2.83	1.12
AC-EWMA	0.80	20	0	106	655.84	358.2	207.12	80.64	12.10	2.83	1.12	
0.5	AR-EWMA	0.25	16	0	484	470.53	243.28	138.36	57.20	13.96	5.86	3.07
	AF-EWMA	0.25	14	0	392	469.85	242.63	137.74	56.63	13.50	5.51	2.82
	AC-EWMA	0.25	17	0	533	470.83	243.56	138.64	57.45	14.17	6.02	3.18
	AR-EWMA	0.35	17	0	374	967.18	483.43	262.14	95.79	16.21	5.17	2.43
	AF-EWMA	0.35	16	0	345	1052.17	520.54	279.81	100.82	16.66	5.25	2.41
	AC-EWMA	0.35	18	0	402	566.75	302.07	173.72	70.18	14.17	5.01	2.48
	AR-EWMA	0.45	17	0	269	400.86	225.57	135.59	58.22	12.15	4.00	1.98
	AF-EWMA	0.45	16	0	249	410.71	230.12	137.83	58.87	12.18	3.97	1.93
	AC-EWMA	0.45	18	0	290	401.00	225.7	135.72	58.34	12.25	4.08	2.02
	AR-EWMA	0.80	20	0	108	751.27	424.40	253.11	103.85	16.71	3.56	1.18
	AF-EWMA	0.80	20	0	107	967.33	542.36	320.78	129.24	19.69	3.91	1.18
	AC-EWMA	0.80	20	0	106	506.76	295.23	181.23	78.32	14.03	3.21	1.13
0.75	AR-EWMA	0.35	18	0	418	944.40	540.64	328.42	141.38	26.86	6.98	2.68
	AF-EWMA	0.35	17	0	388	957.64	547.86	332.62	143.06	27.16	7.06	2.66
	AC-EWMA	0.35	19	0	448	654.60	389.76	245.22	111.91	23.57	6.6	2.72
	AR-EWMA	0.45	18	0	300	576.35	348.26	221.74	102.79	21.55	5.53	2.15
	AF-EWMA	0.45	17	0	279	577.77	349.00	222.14	102.92	21.54	5.5	2.11
	AC-EWMA	0.45	19	0	323	576.46	348.37	221.85	102.90	21.64	5.6	2.20
	AR-EWMA	0.80	19	0	98	342.13	218.14	145.41	72.28	16.24	3.67	1.14
	AF-EWMA	0.80	19	0	100	513.06	317.98	206.47	98.01	20.09	4.15	1.15
	AC-EWMA	0.80	20	0	106	512.97	317.94	206.44	98.00	20.09	4.15	1.15

注: states 代表 Markov 链模型中处于受控状态的所有转移状态数, 从表中加粗的斜体部分, 可以明显地看出在三种控制图中, AF-EWMA 控制图对于上侧泊松 INAR(1)过程的监控效果优于其他两种控制图.

#### 4.2 初始值对控制图性能的影响

在 4.1 节 ARL 的计算中, 假定 EWMA 控制图的初始值为一个固定值, 即  $q_0=0$ . 接下来, 将探讨 FIR (fast initial response) 的设定, 即初始值  $q_0$  的选取对于 AF-EWMA 控制图性能的影响. 本文以  $\mu_0 = 0$  为例, 对初始值  $q_0$  赋予不同的值, 观察  $q_0$  的变化对于泊松 INAR(1)过程的单侧 AF-EWMA 控制图性能是否有影响. 共选取了两类  $q_0$  的值, 即  $q_0 = \mu_0$  (表示初始状态  $q_0$  为均值  $\mu_0$ ),  $q_0 \neq \mu_0$  (表示初始状态  $q_0$  不为均值  $\mu_0$ ). 当  $q_0 \neq \mu_0$  时, 分别考虑了正向 ( $q_0 > \mu_0$ ) 以及负向 ( $q_0 < \mu_0$ ) 的 FIR. ARL 的计算结果如表 5 所示.

由表 5 可以看出, 对于泊松 INAR(1)的上侧 AF-EWMA 控制图, 改变初始值  $q_0$ , 对其监控性能并没有很大影响.  $q_0$  的选取越靠近上控制限  $h$ , 此时受控的  $ARL_0$  以及失控的 ARL 减少幅度类似, 但并没有明显改变 ARL 的下降速度. 因此, 本文所构建的泊松 INAR(1)上侧 AF-EWMA 控制图对于 FIR 的设置比较鲁棒, 控

制图的初始值变动并不会明显改变控制图的性能.

表 5 FIR对AF-EWMA 控制图性能的影响( $\mu_0 = 10$ )  
Table 5 The effect of FIR on the AF-EWMA chart's performance ( $\mu_0 = 10$ )

$\alpha_0$	$\lambda$	$h$	$q_0$	states	$\mu$							
					10	10.5	11	12	15	20	30	
0.25	0.3	14	0	320	554.34	251.49	128.93	46.49	10.32	4.43	2.34	
				320	544.94	243.50	121.99	41.01	6.93	2.33	1.12	
				11	320	540.27	240.08	119.37	39.32	6.19	1.92	1.04
	0.35	16	0	345	4916.62	1801.87	742.72	174.47	16.48	4.98	2.37	
				10	345	4910.13	1796.16	737.62	170.27	13.75	3.28	1.35
				12	345	4903.65	1791.25	733.77	167.69	12.58	2.68	1.12
	0.45	16	0	249	956.69	443.64	225.38	74.41	11.27	3.72	1.91	
				10	249	952.80	440.14	222.20	71.73	9.46	2.54	1.12
				12	249	949.39	437.40	219.94	70.10	8.62	2.08	1.04
	0.55	17	0	203	929.00	449.99	235.79	80.12	11.43	3.39	1.57	
				10	203	926.49	447.70	233.68	78.29	10.13	2.48	1.08
				13	203	923.70	445.35	231.68	76.78	9.32	2.10	1.04
0.5	0.35	16	0	345	1052.17	520.54	279.81	100.82	16.66	5.25	2.41	
				10	345	1047.31	516.07	275.68	97.24	14.12	3.56	1.36
				12	345	1044.23	513.44	273.40	95.46	13.09	2.96	1.12
	0.45	16	0	249	410.71	230.12	137.83	58.87	12.18	3.97	1.93	
				10	249	407.79	227.39	135.28	56.61	10.50	2.78	1.12
				12	249	406.09	225.88	133.93	55.48	9.76	2.31	1.04
0.75	0.35	17	0	388	957.64	547.86	332.62	143.06	27.16	7.06	2.66	
				10	388	954.28	544.66	329.57	140.26	24.91	5.40	1.58
				13	388	951.68	542.25	327.33	138.31	23.51	4.49	1.19
	0.45	17	0	279	577.77	349.00	222.14	102.92	21.54	5.50	2.11	
				10	279	575.75	347.05	220.25	101.15	20.05	4.33	1.25
				13	279	574.30	345.67	218.95	99.97	19.12	3.65	1.07
0.8	19	0	100	513.06	317.98	206.47	98.01	20.09	4.15	1.15		
			10	100	512.66	317.59	206.07	97.62	19.72	3.82	1.08	
			15	100	511.49	316.46	204.98	96.60	18.89	3.33	1.04	

注: states 代表 Markov 链模型中处于受控状态的所有转移状态数.

## 5 结束语

针对自相关泊松 INAR(1)过程, 本文构建了单侧 AF-EWMA 控制图与 AC-EWMA 控制图, 对变量向上偏移的过程进行监控. 分别建立了两种控制图的二维 Markov 链模型, 给出两者的平均运行链长 ARL 的计算公式. 在受控  $ARL_0$  接近的基础上, 通过失控 ARL 的值, 对比分析了上述两种控制图与 AR-EWMA 控制图的监控性能. 分析结果表明本文构建的上侧 AF-EWMA 控制图对于监控泊松 INAR(1)过程均值向上的偏移具有明显的优势, 具有以下三个特点:

(1) 在偏移较小的时候, AF-EWMA 控制图的监控效果与其他两种控制图保持一致, 甚至更好, 而在偏移较大的时候, AF-EWMA 能够更快地检测出过程的偏移;

(2) 在加权系数  $\lambda$  相同,  $ARL_0$  比较接近的时候, AF-EWMA 控制图的状态数(states)最小, 从而计算效率明显优于 AC-EWMA 和 AR-EWMA 控制图;

(3) AF-EWMA 控制图对于 FIR 比较鲁棒, 基本不受控制图初始值  $q_0$  的影响.

## 参考文献:

- [1] Weiß C H. Controlling correlated processes of Poisson counts[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2007, 23(6): 741-754.
- [2] 刘利平, 马义中. 自相关泊松计数过程的质量控制图[J]. 系统工程学报, 2010, 25(4): 506-511.  
Liu Liping, Ma Yizhong. Quality control chart for auto-correlated Poisson counts process[J]. Journal of Systems Engineering, 2010, 25(4): 506-511. (in Chinese)
- [3] He B, Xie M, Goh T N, et al. On control charts based on the generalized Poisson model[J]. Quality Technology and Quantitative Management, 2006, 3(4): 383-400.



- [4] Gan F F. An optimal design of CUSUM control charts for binomial counts[J]. *Journal of Applied Statistics*, 1993, 20(4): 445–460.
- [5] Zhu R, Joe H. Modelling count data time series with markov process based on binomial thinning[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 2006, 27(5): 725–738.
- [6] Gan F F. Monitoring Poisson observations using modified exponentially weighted moving average control charts[J]. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 1990, 19(1): 103–124.
- [7] Montgomery D C. *Introduction to Statistical Quality Control*[M]. 6th Edition. New York: John Wiley & Sons, 2008: 266–291.
- [8] Testik M C. Conditional and marginal performance of the Poisson CUSUM control chart with parameter estimation[J]. *International Journal of Production Research*, 2007, 45(23): 5622–5638.
- [9] Weiß C H, Testik M C. CUSUM monitoring of first-integer-valued autoregressive processes of Poisson counts[J]. *Journal of Quality Technology*, 2009, 41(4): 389–400.
- [10] Weiß C H. Detecting mean increases in Poisson INAR(1) processes with EWMA control charts[J]. *Journal of Applied Statistics*, 2011, 38(2): 383–398.
- [11] Weiß C H. EWMA monitoring of correlated processes of Poisson counts[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2009, 6(2): 137–153.
- [12] Weiß C H. Thinning operations for modeling time series of counts—a survey[J]. *Advances in Statistical Analysis*, 2008, 92(3): 319–341.
- [13] McKenzie E. Some simple models for discrete variate time series[J]. *Water Resources Bulletin*, 1985, 21(4): 645–650.
- [14] 马义中, 田甜, 刘利平. 自相关过程协方差阵的残差 MEWMA 控制图[J]. *系统工程学报*, 2012, 27(2): 279–286.  
Ma Yizhong, Tian Tian, Liu Liping. Residual-based MEWMA control chart for the covariance matrix of autocorrelated processes[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2012, 27(2): 279–286. (in Chinese)
- [15] Brook D, Evans D A. An approach to the probability distribution of CUSUM run length[J]. *Biometrika*, 1972, 59(3): 539–549.

#### 作者简介:

张敏(1979—), 女, 山东肥城人, 博士, 副教授, 研究方向: 质量工程与质量管理, Email: tjuzhangmin79@gmail.com;

聂国华(1987—), 男, 湖南衡阳人, 硕士生, 研究方向: 质量工程与质量管理, Email: guohuanie1987@126.com;

何楨(1967—), 男, 河南台前人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 质量工程与质量管理, Email: zhhe0321@163.com.