第 29 卷第 2 期 系 统 工 程 学 报 Vol.29 No.2
2014 年 4 月 JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING Apr. 2014

相关随机干扰下不连续股价的最优消费投资决策

史敬涛
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究金融证券市场中相关随机干扰下股价不连续情形的最优消费投资决策问题. 对常数相对风险厌恶(CRRA)情形的效用函数, 应用动态规划原理方法, 通过求解 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程得到了最优消费和投资组合策略, 并通过数值模拟例子解释了部分模型参数对最优投资组合策略的影响.

关键词: 最优消费投资决策; 随机最优控制; 跳跃扩散模型; 泊松过程; 相关随机干扰
中图分类号: O23; O29 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2014)02−0182−10

Optimal consumption investment decisions of discontinuous stock prices under correlated random disturbances

Shi Jingtao
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: This paper studies the optimal consumption and portfolio selection problem when the stock prices in the security market are discontinuous and the random disturbances are correlated. By the dynamic programming principle, the optimal consumption and portfolio strategy are obtained by the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the CRRA (Constant Relative Risk Aversion) utility function case. Moreover, some simulation results are presented to illustrate the effect of the model parameters on the optimal portfolio strategy.

Key words: optimal consumption investment decisions; stochastic optimal control; jump diffusion model; Poisson process; correlated random disturbances

1 引 言

金融证券市场中投资者最优消费投资决策问题的研究, 最早可追溯到 Merton[1,2]的工作. 在这类问题中, 投资者在一段时间内可以在银行储蓄、债券等无风险资产以及股票、基金等风险资产中选择适当的投资组合策略, 还可以直接消费, 目的是实现其某种效用函数的最大化. 连续时间的债券和股票价格模型已有很多研究, 可参见文献[3–8].

不连续跳跃扩散过程描述的风险资产价格模型及其相应的最优消费投资决策问题自 Jeanblanc 等[9] 与 Bardhan 等[10]的工作以来也有许多研究. 事实上随着金融数学与金融工程学的发展, 越来越多的证据表明: 风险资产的价格路径并不是扩散所描述的连续过程, 而是在连续过程中伴随着跳跃[11−12]. Merton[13]首先用跳跃扩散过程来描述风险资产的价格过程. 所谓跳跃扩散过程就是扩散过程和跳跃过程的复合, 其中

收稿日期: 2012−05−03; 修订日期: 2012−11−08.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201264); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2011AQ012).

的跳跃过程在 Merton 的模型以及文献[9,14,15]中假设为 Poisson 过程, 文献[10] 中假设为 Poisson 点过程, 后来在文献[16]中采用 Poisson 随机测度, 而文献[11]中则采用更一般的 Lévy过程. 跳跃扩散模型最优消费投资决策问题的研究还可参见文献[17–19].

本文继续研究跳跃扩散模型的最优投资消费决策问题. 与前面文献不同的是, 本文假设某个投资者可以投资于两种期望收益率和风险波动率均不相同的股票, 而影响股价的随机干扰源, 两个不同的 Brown 运动和两个不同的 Poisson 过程之间相互关联. 投资者的目的是为了获得其自身特定效用函数下的最大收益和消费满足. 随机干扰源相互关联情形的金融证券市场模型仅在文献[20]中对连续股价过程有研究.

本文给出了随机干扰源相互关联情形的跳跃扩散股价模型和相应的最优投资消费决策问题. 事实上, 这一问题可以描述为一类带 Poisson 随机跳跃的最优控制问题[21,22]. 运用动态规划方法, 首先给出了适合随机干扰源相互关联情形的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 然后得到了最优消费投资组合策略以及最优值函数的求解方法. 然而, 获得最优消费投资组合策略的显式解却是十分困难的. 最后考虑一类典型的效用函数 CRRA(constant relative risk aversion, 常数相对风险厌恶)情形, 获得最优消费投资组合策略的显式解和相应的最优值函数. 并给出了数值模拟仿真例子, 解释部分模型参数对最优投资组合策略的影响.

2　跳跃扩散模型与随机最优控制问题

假设证券市场中存在两种可供投资者选择的股票, 其价格 $S_1(t), S_2(t)$ 分别满足随机微分方程

$$\mathrm{d}S_1(t) = S_1(t-)\left(a_1(t)\mathrm{d}t + \sigma_1(t)\mathrm{d}B_1(t) + \varphi_1(t)\mathrm{d}N_1(t)\right), \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_2(t) = S_2(t-)\left(a_2(t)\mathrm{d}t + \sigma_2(t)\mathrm{d}B_2(t) + \varphi_2(t)\mathrm{d}N_2(t)\right), \tag{2}$$

其中带来股价不确定性的的随机干扰描述如下: 定义于概率空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 上的一维标准 Brown 运动 $B_1(t)$ 与具有强度 $\lambda_1(t)$ 的一维 Poisson 过程 $N_1(t)$, 它们相互独立且同时影响股价 S_1; 定义于概率空间 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 上的一维标准 Brown 运动 $B_2(t)$ 与具有强度 $\lambda_2(t)$ 的一维 Poisson 过程 $N_2(t)$, 它们相互独立且同时影响股价 S_2.

本文假设 Brown 运动 $B_1(t), B_2(t)$ 具有相关系数[1] $\rho_1(t), -1 \leqslant \rho_1(t) \leqslant 1$; Poisson 过程 $N_1(t), N_2(t)$ 具有相关系数[2]. $\rho_2(t), -1 \leqslant \rho_2(t) \leqslant 1$. 分别定义 P_i–完备化后的信息族

$$\mathcal{F}_{it} = \sigma\{B_i(s), 0 \leqslant s \leqslant t\} \vee \sigma\{N_i(s), 0 \leqslant s \leqslant t\},$$

满足 $M_i(t) := N_i(t) - \int_0^t \lambda_i(s)\mathrm{d}s$ 为 P_i–鞅, $\forall t \in [0, \mathrm{T}],\ i = 1, 2$. 定义乘积概率空间及其上的完备信息族

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2),\ \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{1t} \times \mathcal{F}_{2t},$$

并且记 $\mathrm{E}[\cdot]$ 为其上的数学期望.

给定 $\mathrm{T} > 0$ 为常数, $a_1(t), a_2(t) : [0, \mathrm{T}] \mapsto R$ 连续, 分别代表两种股价的期望收益率且 $a_1(t) > a_2(t)$; $\sigma_1(t), \sigma_2(t) : [0, \mathrm{T}] \mapsto R$ 连续, 分别代表两种股价的风险波动率且 $\sigma_1(t) > \sigma_2(t)$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : [0, \mathrm{T}] \mapsto R$ 连续, 分别代表两种股价的跳跃幅度且 $|\varphi_1(t)| > |\varphi_2(t)|,\ \forall t \in [0, \mathrm{T}]$. $a_1(t), a_2(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 一致有界且 $\sigma_1(t) > 0, \sigma_2(t) > 0, \sigma_1(t)^{-1}, \sigma_2(t)^{-1}$ 也一致有界, $\varphi_1(t) > -1, \varphi_2(t) > -1$. 注意到股票 S_1 比股票 S_2 具有较高的期望收益率, 但风险波动率和跳跃幅度也较大, 因此投资风险也较大

假定初始时刻该投资者具有资产 $X(0) = x_0 > 0$, 在 $[0, \mathrm{T}]$ 中任何时刻 t 投资者的资产为 $X(t)$. 其可以选择投资于股票 S_1 或 S_2, 还可以选择消费率 $c(t)$ 进行即时消费, 用 $u(t) = u(t, X(t))$ 表示其投资于股

[1]所谓两个 Brown 运动 $B_1(t), B_2(t)$ 具有相关系数 $\rho_1(t)$ 是指 $\mathrm{d}\langle B_1, B_2\rangle(t) = \rho_1(t)\mathrm{d}t$, 所谓两个 Poisson 过程 $N_1(t), N_2(t)$ 具有相关系数 $\rho_2(t)$ 是指 $\mathrm{d}\langle N_1, N_2\rangle(t) = \rho_2(t)\mathrm{d}t$, 这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是指两个随机过程的交互变差过程[12].

[2]如果 Poisson 过程 $N_1(t), N_2(t)$ 有下面分解: $N_1(t) = \bar{N}_1(t) + N(t),\ N_2(t) = \bar{N}_2(t) + N(t)$, 其中 $\bar{N}_1(t), \bar{N}_2(t), N(t)$ 分别是具有强度 $\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t), \lambda(t)$ 的 Poisson 过程且相互独立, 则易知 $\lambda_1(t) = \bar{\lambda}_1(t) + \lambda(t), \lambda_2(t) = \bar{\lambda}_2(t) + \lambda(t)$, 并且 $N_1(t), N_2(t)$ 的相关系数为 $\rho_2(t) = \lambda(t)/\sqrt{(\bar{\lambda}_1(t) + \lambda(t))(\bar{\lambda}_2(t) + \lambda(t))}, \forall t \in [0, \mathrm{T}]$[23]

票 S_1 的那部分资产的比例, 即 $u(t)X(t)$ 的资产投资于股票 S_1, $(1-u(t))X(t)$ 的资产投资于股票 S_2. 从而在 $[0,\mathrm{T}]$ 中任何时刻 t 投资者的资产 $X(t)$ 可以用如下的模型来描述

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t)=\Big(X(t)\big(a_1(t)u(t)+a_2(t)\big(1-u(t)\big)\big)-c(t)\Big)\,\mathrm{d}t+X(t)\sigma_1(t)u(t)\mathrm{d}B_1(t)+ \\ \qquad\qquad X(t)\sigma_2(t)\big(1-u(t)\big)\mathrm{d}B_2(t)+X(t-)\varphi_1(t)u(t)\mathrm{d}N_1(t)+X(t-)\varphi_2(t)\big(1-u(t)\big)\mathrm{d}N_2(t) \\ X(0)=x_0>0. \end{cases} \tag{3}$$

投资者试图通过在 $[0,\mathrm{T}]$ 时间内适当地选择消费率及投资组合策略, 来实现如下效用函数的最大化

$$J(c,u)=\mathrm{E}\bigg[\int_0^{\mathrm{T}} g(t,c(t))\mathrm{d}t+h(\mathrm{T},X(\mathrm{T}))\bigg], \tag{4}$$

其中 $g,h:[0,\mathrm{T}]\times(0,\infty)\longmapsto R$, 是满足如下条件的函数[3,8]:

1) g,h 关于 t 连续, 关于 c 或 x 连续可微;

2) $g(t,\cdot),h(t,\cdot)$ 严格单增且严格凹;

3) $\lim\limits_{c\to\infty} g'(t,c)=0$, 其中 $g'(t,c)=\dfrac{\partial g(t,c)}{\partial c}$.

如果存在 c^* 及 u^*, 使得

$$J(c^*,u^*)=\sup_{c,u} J(c,u), \tag{5}$$

则称 (c^*,u^*) 为最优消费与投资组合策略.

问题(5)实际上是一类带 Poisson 跳跃的随机最优控制问题[21,22], 解决这类问题的一种经典方法是动态规划原理. 为此, 对任意初始时刻和初始资产$(t,x)\in[0,\mathrm{T})\times(0,\infty)$, 定义最优值函数

$$V(t,x)=\sup_{c,u} J(t,x;c,u)=\sup_{c,u}\mathrm{E}^{t,x}\bigg[\int_t^{\mathrm{T}} g(s,c(s))\mathrm{d}s+h(\mathrm{T},X(\mathrm{T}))\bigg], \tag{6}$$

其中 $\mathrm{E}^{t,x}[\cdot]$ 表示当初始时刻与初始值为 (t,x) 时的条件数学期望.

由 Bellman 最优性原理(参见文献[22], 定理 2.1), 有

$$V(t,x)=\sup_{c,u}\mathrm{E}^{t,x}\bigg[\int_t^{\alpha} g(s,c(s))\mathrm{d}s+V(\alpha,X(\alpha))\bigg],\ \forall\, 0\leqslant t\leqslant\alpha\leqslant\mathrm{T}. \tag{7}$$

首先给出下面推广的 Itô 公式, 它是解决问题(5)的重要工具.

引理 1 设 $X(t):[0,\mathrm{T}]\times\Omega\mapsto R$ 为如下跳跃扩散过程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t)=\,&b(t,X(t))\mathrm{d}t+\sigma_1(t,X(t))\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(t,X(t))\mathrm{d}B_2(t)+ \\ &\varphi_1(t,X(t-))\mathrm{d}N_1(t)+\varphi_2(t,X(t-))\mathrm{d}N_2(t), \end{aligned} \tag{8}$$

则对于任意 $w\in C^{1,2}([0,\mathrm{T}]\times R)$, 成立

$$\begin{aligned} \mathrm{d}w(t,X(t))=\,&\bigg(\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial t}+\Big(b(t,X(t))+\varphi_1(t,X(t))\lambda_1(t)+\varphi_2(t,X(t))\lambda_2(t)\Big)\cdot \\ &\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2(t,X(t))+2\rho_1(t)\sigma_1(t,X(t))\sigma_2(t,X(t))+\sigma_2^2(t,X(t))+ \\ &\varphi_1^2(t,X(t))\lambda_1(t)+2\rho_2(t)\varphi_1(t,X(t))\varphi_2(t,X(t))+\varphi_1^2(t,X(t))\lambda_2(t)\Big)\cdot \\ &\frac{\partial^2 w(t,X(t))}{\partial x^2}+\Big(w\big(t,X(t)+\varphi_1(t,X(t))\big)-w(t,X(t))\Big)\lambda_1(t)+ \\ &\Big(w\big(t,X(t)+\varphi_2(t,X(t))\big)-w(t,X(t))\Big)\lambda_2(t)\bigg)\mathrm{d}t+ \\ &\sigma_1(t,X(t))\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(t,X(t))\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}\mathrm{d}B_2(t)+ \end{aligned}$$

$$\Big(w\big(t,X(t-)+\varphi_1(t,X(t))\big)-w(t,X(t-))+\varphi_1(t,X(t-))\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}\Big)\mathrm{d}M_1(t)+$$
$$\Big(w\big(t,X(t-)+\varphi_2(t,X(t))\big)-w(t,X(t-))+\varphi_2(t,X(t-))\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}\Big)\mathrm{d}M_2(t). \tag{9}$$

证明 由文献[12]中的命题 8.19 关于半鞅的 Itô 公式, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w(t,X(t))=&\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial x}\mathrm{d}X(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w(t,X(t))}{\partial x^2}\mathrm{d}\langle X,X\rangle(t)+\\&\big(w\big(t,X(t-)+\varphi_1(t,X(t))\big)-w(t,X(t-))\big)\mathrm{d}N_1(t)+\\&\big(w\big(t,X(t-)+\varphi_2(t,X(t))\big)-w(t,X(t-))\big)\mathrm{d}N_2(t).\end{aligned}$$

利用 $\mathrm{d}\langle B_1,B_2\rangle(t)=\rho_1(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\langle N_1,N_2\rangle(t)=\rho_2(t)\mathrm{d}t$ 以及 $M_1(t)=N_1(t)-\int_0^t\lambda_1(s)\mathrm{d}s$, $M_2(t)=N_2(t)-\int_0^t\lambda_2(s)\mathrm{d}s$, 即可得到式(9). 证毕.

动态规划的主要思想是把问题(5)与求解由 式(6)定义的最优值函数满足的一族偏微分方程联系起来, 称为 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程.

引理 2 假设 $w(t,x)\in C^{1,2}([0,\mathrm{T}]\times R)$ 满足下面的 HJB 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t}+\sup\limits_{c,u}\Big(g(t,c)+\mathrm{L}^{c,u}w(t,x)\Big)=0\\ V(\mathrm{T},x)=h(\mathrm{T},x),\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\mathrm{L}^{c,u}$ 为生成元算子,

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{c,u}w(t,x)=&\Big(x\big(a_1(t)u+a_2(t)(1-u)\big)-c+\lambda_1(t)\varphi_1(t)xu+\lambda_2(t)\varphi_2(t)x(1-u)\Big)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}+\\&\frac{1}{2}x^2\Big(\sigma_1^2(t)u^2+2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)u(1-u)+\sigma_2^2(t)(1-u)^2+\lambda_1^2(t)\varphi_1^2(t)u^2+\\&2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)u(1-u)+\lambda_2^2(t)\varphi_2^2(t)(1-u)^2\Big)\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}+\\&\Big(w\big(t,x+\varphi_1(t)xu\big)-w(t,x)\Big)\lambda_1(t)+\Big(w\big(t,x+\varphi_2(t)x(1-u)\big)-w(t,x)\Big)\lambda_2(t).\end{aligned} \tag{11}$$

如果存在 (c^*,u^*) 使得

$$(c^*,u^*)=\arg\sup_{c,u}\Big(g(t,c)+\mathrm{L}^{c,u}w(t,X^*(t))\Big),$$

其中 $X^*(t)$ 是式(3)相应于 (c^*,u^*) 的解, 则 $w(t,x)=V(t,x)$ 并且 (c^*,u^*) 是最优消费与投资组合策略.

证明 利用引理 1 的 Itô 公式(9), 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w(t,x)=&\Bigg(\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}+\Big(x\big(a_1(t)u+a_2(t)(1-u)\big)-c+\lambda_1(t)\varphi_1(t)xu+\lambda_2(t)\varphi_2(t)x(1-u)\Big)\cdot\\&\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\Big(\sigma_1^2(t)u^2+2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)u(1-u)+\sigma_2^2(t)(1-u(s))^2+\lambda_1^2(t)\varphi_1^2(t)u^2+\\&2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)u(1-u)+\lambda_2^2(t)\varphi_2^2(t)(1-u)^2\Big)\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}+\\&\Big(w\big(t,x+\varphi_1(t)xu\big)-w(t,x)\Big)\lambda_1(t)+\Big(w\big(t,x+\varphi_2(t)x(1-u)\big)-w(t,x)\Big)\lambda_2(t)\Bigg)\mathrm{d}t+\\&\sigma_1(t)xu\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(t)x(1-u)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\mathrm{d}B_2(t)+\\&\Big(w\big(t,x_-+\varphi_1(t)xu\big)-w(t,x_-)+\varphi_1(t,x_-)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\Big)\mathrm{d}M_1(t)+\end{aligned}$$

$$\left(w\big(t,X_-+\varphi_2(t)x(1-u)\big)-w(t,x_-)+\varphi_2(t)x_-(1-u)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}M_2(t).$$

求解上面的随机微分方程, 可得

$$\begin{aligned}&w(T,X(\mathrm{T}))=w(t,X(t))+\int_t^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial t}+\mathrm{L}^{c,u}w(s,X(s))\right)\mathrm{d}s+\\&\int_t^{\mathrm{T}}\sigma_1(s)X(s)u(s)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\mathrm{d}B_1(s)+\int_t^{\mathrm{T}}\sigma_2(t)X(s)\big(1-u(s)\big)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\mathrm{d}B_2(s)+\\&\int_t^{\mathrm{T}}\left(w\big(t,X(s-)+\varphi_1(s)X(s)u(s)\big)-w(s,X(s-))+\varphi_1(s)X(s-)u(s)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\right)\mathrm{d}M_1(s)+\\&\int_t^{\mathrm{T}}\left(w\big(s,X(s-)+\varphi_2(s)X(s)(1-u)\big)-w(s,X(s-))+\varphi_2(s)X(s-)\big(1-u(s)\big)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\right)\mathrm{d}M_2(s).\end{aligned}\tag{12}$$

注意到

$$\int_t^{\mathrm{T}}\sigma_1(s)X(s)u(s)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\mathrm{d}B_1(s),$$

$$\int_t^{\mathrm{T}}\left(w\big(t,X(s-)+\varphi_1(s)X(s)u(s)\big)-w(s,X(s-))+\varphi_1(s)X(s-)u(s)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\right)\mathrm{d}M_1(s)$$

是 P_1–鞅, $\int_t^{\mathrm{T}}\sigma_2(s)X(s)\big(1-u(s)\big)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\mathrm{d}B_2(s)$, $\int_t^{\mathrm{T}}\Big(w\big(s,X(s-)+\varphi_2(s)X(s)(1-u(s))\big)-$ $w(s,X(s-))+\varphi_2(s)X(s-)\big(1-u(s)\big)\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial x}\Big)\mathrm{d}M_2(s)$ 是 P_2–鞅, 从而它们都是 P–鞅. 在式(12)两侧取条件数学期望 $\mathrm{E}^{t,x}[\cdot]$, 得

$$\mathrm{E}^{t,x}\big[w(T,X(\mathrm{T}))\big]-w(t,X(t))=\mathrm{E}^{t,x}\left[\int_t^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial w(s,X(s))}{\partial t}+\mathrm{L}^{c,u}w(s,X(s))\right)\mathrm{d}s\right].\tag{13}$$

对任意 $u(\cdot)$, 由式(10)知

$$\frac{\partial w(t,X(t))}{\partial t}+g(t,c(t))+\mathrm{L}^{c,u}w(t,X(t))\leqslant 0.\tag{14}$$

由式(13)和式(14)得

$$\begin{aligned}J(t,X(t);c,u)&:=\mathrm{E}^{t,x}\left[\int_t^{\mathrm{T}}g(s,c(s))\mathrm{d}s+h(\mathrm{T},X(\mathrm{T}))\right]\\&\leqslant\mathrm{E}^{t,x}\left[\int_t^{\mathrm{T}}\Big(-\frac{\partial w(t,X(s))}{\partial t}-\mathrm{L}^{c,u}w(s,X(s))\Big)\mathrm{d}s+h(\mathrm{T},X(\mathrm{T}))\right]\\&=\mathrm{E}^{t,x}\Bigg[\int_t^{\mathrm{T}}\Big(-\frac{\partial w(t,X(s))}{\partial t}-\mathrm{L}^{c,u}w(s,X(s))\Big)\mathrm{d}s+w(t,X(t))+\\&\qquad\int_t^{\mathrm{T}}\Big(\frac{\partial w(t,X(s)}{\partial t})+\mathrm{L}^{c,u}w(s,X(s))\Big)\mathrm{d}s\Bigg]=w(t,X(t)),\end{aligned}$$

从而 $\sup\limits_{c,u}J(t,X(t);c,u)\leqslant w(t,X(t))$.

当 $(c,u)=(c^*,u^*)$ 时, 上面的不等号成为等号, 即 $V(t,x)=J(t,X^*(t);c^*,u^*)=w(t,X(t))$. 这意味着 (c^*,u^*) 的确是最优消费与投资组合策略. 证毕.

有了上面的准备工作, 回到问题(5)有下面的定理 1.

定理 1 问题(5)的最优消费投资组合策略 (c^*,u^*) 满足

$$\frac{\partial g(t,c)}{\partial c}\Big|_{c=c^*}=\frac{\partial V(t,x)}{\partial x},\quad\forall(t,x)\in[0,\mathrm{T}]\times R,\tag{15}$$

以及

$$x\big(a_1(t)-a_2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1(t)-\lambda_2(t)\varphi_2(t)\big)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+$$
$$x^2\big(\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)-\sigma_2^2(t)+\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)-\varphi_2^2(t)\lambda_2(t)\big)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+$$
$$x^2\left(\sigma_1^2(t)-2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\sigma_2^2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1^2(t)-2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)\right)\cdot$$
$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}u^*+x\lambda_1(t)\varphi_1(t)\frac{\partial V}{\partial x}\big(t,x+\varphi_1(t)xu^*\big)-x\lambda_2(t)\varphi_2(t)\frac{\partial V}{\partial x}\big(t,x+\varphi_2(t)x(1-u^*)\big)=0,$$
$$\forall(t,x)\in[0,\mathrm{T}]\times R. \tag{16}$$

证明　由引理 2 得到

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+x\big(a_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2(t)\big)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2\big(\sigma_2^2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)\big)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}-$$
$$\big(\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\big)V(t,x)+\sup_{c,u}G(t,x;c,u)=0,$$

其中 $G(t,x;c,u):=g(t,c)-c\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}+\Bigg(x\big(a_1(t)-a_2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1(t)-\lambda_2(t)\varphi_2(t)\big)\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}+$

$$x^2\big(\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)-\sigma_2^2(t)+\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)-\varphi_2^2(t)\lambda_2(t)\big)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}\Bigg)u+$$
$$\frac{1}{2}x^2\left(\sigma_1^2(t)-2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\sigma_2^2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1^2(t)-2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)\right)\cdot$$
$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}u^2+\lambda_1(t)V\big(t,x+\varphi_1(t)xu\big)+\lambda_2(t)V\big(t,x+\varphi_2(t)x(1-u)\big).$$

由极值 $\sup\limits_{c,u}G(t,x;c,u)$ 的一阶必要条件

$$\frac{\partial G(t,x;c,u)}{\partial c}\Big|_{c=c^*}=0,\ \frac{\partial G(t,x;c,u)}{\partial u}\Big|_{u=u^*}=0,\forall(t,x)\in[0,\mathrm{T}]\times R,$$

易得 式(15)和式(16)成立.　证毕.

理论上, 可首先分别由式(15)和式(16)得最优消费率 $c^*(\cdot)$ 和最优投资组合策略 $u^*(\cdot)$, 然后代入 HJB 方程(10)中求得最优值函数 $V(t,x)$, 从而由最优效用函数 $\sup\limits_{c,u}J(c,u)=V(0,x_0)$ 可完全解决问题 (5). 但是, 得到 (c^*,u^*) 及 $V(0,x_0)$ 的显示表达式是非常困难的. 这一点即使在不考虑 Poisson 跳跃 [20]或者没有相关随机干扰[18,19] 的情形也都是如此.

3　常数相对风险厌恶(CRRA)情形

本节中考虑一种典型的效用函数——常数相对风险厌恶(CRRA)情形, 得到了最优消费率 c^* 和最优值 $V(0,x_0)$ 的显式解. CRRA 型的效用函数非常重要，能够代表相当一部分投资者的投资和消费倾向. 但由于 Poisson 跳跃的存在, 最优投资组合策略 u^* 的显式表达式仍然无法得到[17,18], 但本文得到了其满足的一个形式上比较简单的代数方程. 并且在下一节中给出了其数值解.

考虑下面形式的效用函数, 称为 CRRA 情形, 即

$$g(t,c)=\mathrm{L}e^{-\beta t}\left(\frac{c^{1-\mathrm{R}}}{1-\mathrm{R}}\right),\quad h(\mathrm{T},x)=\mathrm{K}\left(\frac{x^{1-\mathrm{R}}}{1-\mathrm{R}}\right), \tag{17}$$

其中 $\mathrm{L},\beta,\mathrm{R},\mathrm{K}$ 均为正常数, $0<\mathrm{R}<1$. 易验证 g,h 均满足前面效用函数的通常条件.

由 HJB 方程(10)的终端条件以及式(17), 试图寻找

$$V(t,x)=f(t)x^{1-\mathrm{R}},\ 满足\ f(\mathrm{T})=\mathrm{K}/(1-\mathrm{R}), \tag{18}$$

其中 $f(t)$ 是待定的确定性函数.

将 $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}=f'(t)x^{1-\mathrm{R}}, \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}=(1-\mathrm{R})f(t)x^{-\mathrm{R}}, \dfrac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}=-\mathrm{R}(1-\mathrm{R})f(t)x^{-\mathrm{R}-1}$ 代入式(15)得到最优消费率为

$$c^*(t)=c^*(t,x)=x\left(\frac{\mathrm{L}\mathrm{e}^{-\beta t}}{(1-\mathrm{R})f(t)}\right)^{\frac{1}{\mathrm{R}}}, \tag{19}$$

其中 x 是该投资者在时刻 t 的资产. 再代入式(16)得到最优投资组合策略满足的代数方程

$$\begin{aligned}&a_1(t)-a_2(t)+\mathrm{R}\Big(\sigma_2^2(t)-\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)-\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)\Big)-\\&\quad \mathrm{R}\Big(\sigma_1^2(t)-2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\sigma_2^2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1^2(t)-2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)\Big)u^*(t)+\\&\quad \varphi_1(t)\Big(\big(1+\varphi_1(t)u^*(t)\big)^{-\mathrm{R}}-1\Big)\lambda_1(t)-\varphi_2(t)\Big(\big(1+\varphi_2(t)(1-u^*(t))\big)^{-\mathrm{R}}+1\Big)\lambda_2(t)=0.\end{aligned} \tag{20}$$

下面求解 $f(t)$. 由 HJB 方程(10)经过整理容易得到 $f(t)$ 满足如下的常微分方程

$$f'(t)+f_1(t)f(t)+f_2(t)f(t)^{1-\frac{1}{\mathrm{R}}}=0,\ 满足\ f(\mathrm{T})=\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{R}}, \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(t)=&\ (1-\mathrm{R})a_2(t)-\frac{\mathrm{R}(1-\mathrm{R})}{2}\big(\sigma_2(t)^2+\lambda_2(t)\varphi_2(t)^2\big)+\lambda_2(t)\varphi_2(t)-\lambda_1(t)-\lambda_2(t)+\\&(1-\mathrm{R})\Big(a_1(t)-a_2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1(t)-\lambda_2(t)\varphi_2(t)+\mathrm{R}\big(\sigma_2^2(t)-\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\\&\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)-\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)\big)\Big)u^*(t)-\frac{\mathrm{R}(1-\mathrm{R})}{2}\Big(\sigma_1^2(t)-2\rho_1(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)+\\&\sigma_2^2(t)+\lambda_1(t)\varphi_1^2(t)-2\rho_2(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)+\lambda_2(t)\varphi_2^2(t)\Big)u^{*2}(t)+\lambda_1(t)\Big(1+\varphi_1(t)u^*(t)\Big)^{1-\mathrm{R}}+\\&\lambda_2(t)\Big(1+\varphi_2(t)(1-u^*(t))\Big)^{1-\mathrm{R}},\end{aligned} \tag{22}$$

$$f_2(t)=\mathrm{R}(1-\mathrm{R})^{-\frac{1}{\mathrm{R}}}(\mathrm{L}\mathrm{e}^{-\beta t})^{\frac{1}{\mathrm{R}}}, \tag{23}$$

令 $\tilde{f}(t)=\mathrm{e}^{-\int_t^{\mathrm{T}}f_1(s)\mathrm{d}s}f(t)$, 则式(21)化为

$$\tilde{f}'(t)+f_3(t)\tilde{f}(t)^{1-\frac{1}{\mathrm{R}}}=0,\ 满足\ \tilde{f}(\mathrm{T})=\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{R}}, \tag{24}$$

其中

$$f_3(t)=f_2(t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{R}}\int_t^{\mathrm{T}}f_1(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{R}(1-\mathrm{R})^{-\frac{1}{\mathrm{R}}}(\mathrm{L}\mathrm{e}^{-\beta t})^{\frac{1}{\mathrm{R}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{R}}\int_t^{\mathrm{T}}f_1(s)\mathrm{d}s}. \tag{25}$$

求解式(24)易得 $\tilde{f}(t)=\left(\left(\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{R}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{R}}}+\frac{1}{\mathrm{R}}\int_t^{\mathrm{T}}f_3(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{R}}>0$, 故有

$$f(t)=\mathrm{e}^{\int_t^{\mathrm{T}}f_1(s)\mathrm{d}s}\left(\left(\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{R}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{R}}}+\frac{1}{\mathrm{R}}\int_t^{\mathrm{T}}f_3(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{R}}>0. \tag{26}$$

综上, 有下列结论.

定理 2 对 CRRA 情形的效用函数(17)描述的最优消费投资决策问题(5), 最优消费率和最优投资组合策略 (c^*,u^*) 分别由式(19)和式(20)得到, 最优效用函数用式(18)决定, $\sup\limits_{c,u}J(c,u)=V(0,x_0)=f(0)x_0^{1-\mathrm{R}}$, 其中 $f(t)$ 由式(22), (25)和式(26)决定.

4 数值模拟及计算结果分析

本节研究 CRRA 情形下部分模型参数对最优投资组合策略的影响. 为简便起见, 取模型中的参数都为

有界常数. 事实上由证券市场中的金融时间序列数据, 可以利用统计方法推断出模型中各个参数. 在本节各个例子中均假设 $\mathrm{T}=2, \beta=0.1, \mathrm{R}=\mathrm{K}=\mathrm{L}=0.5$, 即有 $g(t,c)=\sqrt{c}\mathrm{e}^{-0.1t},\ h(\mathrm{T},x)=\sqrt{x}$.

在给出数值模拟结果之前, 首先给出几个例子. 它们事实上是文献中已有的结果.

例 1 (Merton 连续模型)　假定 $\sigma_2=\varphi_1=\varphi_2=0$, 此时退化为无风险资产例如债券, 连续股价即不考虑 Poisson 跳跃. 由式(20) 易得文献[1,2]的经典结果[5] $u^*(t)\equiv(a_1-a_2)/(\mathrm{R}\sigma_1^2)$.

例 2 (Øksendal 连续模型)　假定 $\varphi_1=\varphi_2=\rho_1=0$, 连续股价即随机干扰为两个相互独立 Brown 运动的情形. 由式(20)易得 文献[24]的经典结果

$$u^*(t)=\frac{a_1-a_2+\mathrm{R}\sigma_2^2}{\mathrm{R}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}. \tag{27}$$

例 3 (Shi 与 Wu 跳跃扩散模型)　假定 $\sigma_2=\varphi_2=0$, 此时 S_2 退化为无风险资产. 由式(20)易得

$$0=a_1-a_2-\mathrm{R}\sigma_1^2u^*(t)+\varphi_1\Big(\big(1+\varphi_1u^*(t)\big)^{-\mathrm{R}}-1\Big)\lambda_1,\ t\in[0,\mathrm{T}]. \tag{28}$$

这是文献[19]中式(3.11)当 Poisson 点过程退化成 Poisson 过程(相应的 Poisson 随机测度退化成 Poisson P–鞅)的特殊情形[18]. 显然, 由式(28)得到 u^* 的显式解是很困难的.

例 4 (Jeanblanc 与 Pontier 跳跃扩散模型)　假定 $B_1(t)=B_2(t), N_1(t)=N_2(t)$, 此时股价过程 S_1, S_2 的随机干扰源相同, 本文的模型退化成文献[9]中模型的特殊情况(文献[9] 中还包含无风险资产). 由式(20)易得

$$\begin{aligned}a_1-a_2+\mathrm{R}\big(\sigma_2^2+\lambda_2\varphi_2^2\big)-\mathrm{R}\big(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\lambda_1\varphi_1^2+\lambda_2\varphi_2^2\big)u^*(t)-\varphi_1\Big(\big(1+\varphi_1u^*(t)\big)^{-\mathrm{R}}-1\Big)\lambda_1-\\ \varphi_2\Big(\big(1+\varphi_2(1-u^*(t))\big)^{-\mathrm{R}}+1\Big)\lambda_2=0,\ \ t\in[0,\mathrm{T}].\end{aligned} \tag{29}$$

这是文献[9]中的式(5.14)当 $r=0$ 的特殊情形.

例 5 (Shi 与 Wu 相关干扰源的连续模型)　假定 $\varphi_1=\varphi_2=0$, 连续股价即随机干扰为两个相关 Brown 运动的情形. 由式(20)易得

$$u^*(t)=\frac{a_1-a_2+\mathrm{R}\sigma_2^2-\mathrm{R}\rho_1\sigma_1\sigma_2}{\mathrm{R}(\sigma_1^2-2\rho_1\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}. \tag{30}$$

这就是文献[20]中的式(3.6).

下面给出部分模型参数对最优投资组合策略 u^* 的影响. 本文的主要贡献在于考虑相关的 Poisson 跳跃干扰, 因此下面侧重给出两个 Poisson 过程的跳跃幅度参数 φ_1,φ_2、强度参数 λ_1,λ_2 以及相关系数 ρ_2 对 u^* 的影响. 为方便, 针对模型参数为常数的特殊情形, 重写 u^* 满足的代数方程(20)为

$$\begin{aligned}&a_1-a_2+\mathrm{R}\Big(\sigma_2^2-\rho_1\sigma_1\sigma_2+\lambda_2\varphi_2^2-\rho_2\varphi_1\varphi_2\Big)-\\ &\quad\mathrm{R}\Big(\sigma_1^2-2\rho_1\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2+\lambda_1\varphi_1^2-2\rho_2\varphi_1\varphi_2+\lambda_2\varphi_2^2\Big)u^*(t)+\\ &\quad\varphi_1\Big(\big(1+\varphi_1u^*(t)\big)^{-\mathrm{R}}-1\Big)\lambda_1-\varphi_2\Big(\big(1+\varphi_2(1-u^*(t))\big)^{-\mathrm{R}}+1\Big)\lambda_2=0,\ \ \forall t\in[0,\mathrm{T}].\end{aligned} \tag{31}$$

前面已取 $\mathrm{R}=0.5$, 再取 $a_1=0.4, a_2=0.1, \sigma_1=0.6, \sigma_2=0.2, \rho_1=0.5$, 从而式(32) 退化为

$$\begin{aligned}&\lambda_2\varphi_2^2-\rho_2\varphi_1\varphi_2-\Big(\lambda_1\varphi_1^2-2\rho_2\varphi_1\varphi_2+\lambda_2\varphi_2^2\Big)u^*(t)+2\varphi_1\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_1u^*(t)}}-1\Big)\lambda_1-\\ &\quad 2\varphi_2\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_2(1-u^*(t))}}+1\Big)\lambda_2+0.38=0,\ \ \forall t\in[0,\mathrm{T}].\end{aligned} \tag{32}$$

利用 MATLAB 7.0 软件计算 得到的结果如表 1–表 3 所示.

从表 1 可以看出, 随着 Poisson 随机干扰 $N_1(t)$ 强度 λ_1 的递增同时 $N_1(t)$ 强度 λ_2 的递减, 投资者会越来越倾向于把更多的资产投资于股票 S_1 ($u^*>1$ 是意味着投资者借款投资即买空股票 S_1). 这一点是符合金融证券市场现实的, 因为大的突发事件出现得越频繁(例如 $\lambda_1=0.5$ 是指一年内有两次大的突发事件发生),

意味着越多可能的投资收益机会出现, 而股票 S_1 的期望收益率较高.

表 1 强度参数 λ_1, λ_2 对最优投资组合策略 u^* 的影响($\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.2, \rho_2 = 0.5$)

Table 1 Influence of the intensity parameter λ_1, λ_2 on optimal portfolio strategy $u^*(\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.2, \rho_2 = 0.5)$

λ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
λ_2	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
u^*	−1.899 3	−1.485 6	−1.002 5	−0.550 0	0.1004	0.384 8	0.798 8	0.890 1	1.100 2

从表2可以看出, 随着股票 S_1 向上跳跃幅度 φ_1 的递增同时股票 S_2 向上跳跃幅度 φ_2 的递减, 投资者会越来越倾向于把更多的资产投资于股票 S_1. 这一点也与金融证券市场现实相吻合, 因为大的突发事件的干扰性越强, 意味着越多可能的投资收益机会出现.

表 2 跳跃幅度参数 φ_1, φ_2 对最优投资组合策略 u^* 的影响($\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5, \rho_2 = 0.5$)

Table 2 Influence of the jump range parameter on optimal portfolio strategy($\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5, \rho_2 = 0.5$)

φ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
φ_2	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
u^*	−1.789 0	−2.898 6	−2.354 6	−1.875 0	−1.378 2	−0.900 4	−0.508 9	−0.057 3	0.469 2

从表3可以看出: 当两个Poisson过程的相关系数 ρ_2 为零时, 投资者会把0.1026比例的资产投资于股票 S_1, 剩余 $1 - 0.1026 = 0.8974$ 比例的资产会投资于股票 S_2. 当两个Poisson过程的正相关性越来越强时, 投资者会把越来越多的资产投资于股票 S_2; 当两个Poisson过程的负相关性越来越强时, 情况则恰好相反. 这一现象可解释为: 当其他参数取我们给定的值并且 ρ_2 为零时, 投资者倾向于多选择其资产投向股票 S_2; 而 $\rho_2 > 0$ 越来越大时, 投资者这种投资倾向越来越显著, 注意到股票 S_1 相对股票 S_2 而言是一种高期望收益、高风险的资产, 从而投资者的风险厌恶程度越来越强; 反之, 当 $\rho_2 < 0$ 越来越小时, 投资者多选择其资产投向股票 S_2 的投资倾向越来越不显著, 从而投资者的风险厌恶程度不断减弱. 但总的来说, CRRA 型效用函数所描述的投资者都是风险厌恶的. 表3的结果只是表明了两个 Poisson 过程的相关系数 ρ_2 对投资者风险厌恶程度存在影响.

表 3 相关系数 ρ_2 对最优投资组合策略 u^* 的影响($\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$)

Table 3 Influence of the correlation coefficient ρ_2 on optimal portfolio strategy $u^*(\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5)$

ρ_2	−0.8	−0.3	−0.1	0.0	0.2	0.3	0.6	0.8	0.9
u^*	0.319 2	0.291 7	0.029 5	0.102 6	0.020 1	−0.105 1	−0.487 2	−0.901 9	−1.041 8

5 结束语

本文解决金融证券市场中随机干扰源相互关联情形下, 跳跃扩散模型描述的最优消费投资决策问题. 应用动态规划原理, 对一类典型的效用函数常数相对风险厌恶(CRRA) 情形得到了最优消费投资组合策略. 运用统计方法和实际量测数据, 可以估计本文模型中的各个参数, 从而运用本文结果可为投资者的投资行为提供有价值的指导. 本文的求解思路对其它一些效用函数仍适用, 并可推广至更复杂的投资行为情形, 例如两个以上相互关联股票还可包括债券、外汇存(贷)款, 还可考虑通货膨胀、交易费用和税收等. 这些相应的结果可更贴近现实地给予投资者的消费投资组合策略以指导.

参考文献:

[1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 247–257.

[2] Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373–413.

[3] Karatzas I. Optimization problems in the theory of continuous trading[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1989, 27(6): 1221–1259.

[4] Cox J C, Huang C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49(1): 33–83.

[5] Wu Z, Xu W S. A direct method in optimal portfolio and consumption choice[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, Series B, 1996, 11(3): 349–354.

[6] 郭文旌. 固定消费模式下的最优投资组合[J]. 系统工程学报, 2004, 19(6): 566–571.
Guo Wenjin. Optimal portfolios with fixed consumption modes[J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(6): 566–571. (in Chinese)

[7] Merton R C. Continuous-time Finance[M]. Oxford: Wiley- Blackwell, 1992.

[8] Karatazs I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance[M]. New York: Springer, 1998.

[9] Jeanblanc P M, Pontier M. Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1990, 22(1): 287–310.

[10] Bardhan I, Chao X L. Martingale analysis for assets with discontinous returns[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(1): 243–256.

[11] Akqiray V, Booth G. Stock price processes with discontinuous time paths: An empirical examination[J]. Financial Review, 1986, 21(2): 163–18.

[12] Cont R, Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes[M]. New York: Chapmam Hall/CRC, 2004.

[13] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1/2): 125–144.

[14] Guo W J, Xu C M. Optimal portfolio selection when stock prices follow an jump-diffusion process[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2004, 60(6): 485–496.

[15] 黄 薇, 曹长修, 曹国华, 等. 存贷利率不等下具有随机跳跃收入的消费与投资策略[J]. 控制与决策, 2000, 15(6): 699–702.
Huang We, Cao Changxiu, Cao Guohua, et al. Optimal consumption and investment strategies with a stochastic jump income under unequal loan and deposit rate[J]. Control and Decision, 2000, 15(6): 699–702. (in Chinese)

[16] Framstad N C, Øksendal B, Sulem A. Optimal consumption and portfolio in a jump diffusion market[C] // Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance. Paris: INRIA, 1998: 9–20.

[17] Framstad N C, Øksendal B, Sulem A. A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 121(1): 77–98.

[18] Wan S P. Optimal portfolio with consumption choice under jump-diffusion process[C] // Proceedings of the 1st International Conference on Innovative Computing, Information and Control, Beijing: IEEE Computer Society, 2006: 462–465.

[19] Shi J T, Wu Z. A stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2011, 27(2): 127–137.

[20] 史敬涛, 吴 臻. 一类证券市场中投资组合及消费选择的最优控制问题[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2005, 20(1): 1–8.
Shi Jingtao T, Wu Zhen. One kind of optimal control problem of investment portfolio and consumption choice in the security market[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, Series A, 2005, 20(1): 1–8. (in Chinese)

[21] Øksendal B, Sulem A. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[22] Shi J T, Wu Z. Relationship between MP and DPP for the stochastic optimal control problem of jump diffusions[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2011, 63(2): 151–189.

[23] 黄 新. 两个相关更新过程的一种新描述[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(2): 43–46.
Huang Xin. A new description for two corellated innovated processes[J]. Mathematical Theory and Applications, 2008, 28(2): 43–46. (in Chinese)

[24] Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M]. 6th Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

作者简介:

史敬涛(1978—), 男, 山东烟台人, 博士, 副教授, 研究方向: 随机最优控制与金融数学, Email: shijingtao@sdu.edu.cn