第 29 卷第 2 期 系统工程学报 Vol. 29, No. 2
2014 年 4 月 JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING Apr. 2014

一种基于弱偏好序信息的双边匹配决策方法

梁海明, 姜艳萍
(东北大学工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 针对匹配主体给出弱偏好序形式信息的双边匹配决策问题, 提出了一种决策分析方法. 给出稳定满意和满意稳定匹配方案的定义; 根据匹配主体给出的弱偏好序信息, 计算一方匹配主体对另一方匹配主体的满意度; 在稳定性约束的基础上, 建立了以匹配主体双边满意度最大为目标的优化模型. 针对所建立的多目标0-1线性规划模型的特点, 设计了模型求解的变步长算法. 通过求解模型确定最优匹配方案. 最后, 给出实例验证所提方法的可行性和有效性.

关键词: 双边匹配决策; 弱偏好序; 满意度; 优化模型; 匹配方案
中图分类号: C934 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000 −5781(2014)02 −0153 −07

Method for two-sided matching decision-making based on the weak preference ordering information

Liang Haiming, Jiang Yanping
(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: For the two-sided matching decision making problem using the matching parties' weak preference ordering information, a decision-making analysis method is proposed. The definitions of the stability, satisfaction and stability satisfaction for the matching alternative are given. According to the matching party's weak preference ordering information, one matching party's satisfaction degrees at the other matching party are calculated. Based on the stability constraint, an optimization model is constructed, where the two objectives are to maximize one matching party's satisfaction degrees and maximize the other matching party's satisfaction degrees, respectively. According to the characteristics of the model which belongs to a type of 0-1 linear programming model, a changeable step algorithm is designed to solve it, and then the matching alternative is obtained. Finally, a practical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: two-sided matching decision making; weak preference ordering; satisfaction degree; optimization model; matching alternative

1 引言

现实生活中存在大量的双边匹配决策问题, 早期双边匹配决策问题的研究主要包括婚姻匹配[1], 大学与考生匹配[2]等等. 随着经济和服务业的飞速发展, 涌现了一些其它的双边匹配决策问题, 如二手房交易匹

收稿日期: 2012 – 05 – 09; 修订日期: 2013 – 05 – 06.
基金项目: 国家创新研究群体科学基金资助项目(71021061); 国家自然科学基金资助项目(71271050); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20110042110011); 中央高校基本业务科研经费专项基金资助项目(N110606001).

配[3]、实习生匹配[4]等. 在这些双边匹配决策问题中, 决策者常常给出偏好序形式的信息. 常见的偏好序形式信息包括强偏好序(如“优于”)、弱偏好序(如“不劣于”)、无差异偏好序(如“等价于”). 目前, 国内外学者大多关注基于强偏好序或无差异偏好序信息的双边匹配决策问题的研究, 并且主要从满意性和稳定性两个角度解决匹配问题. Gale 等[1]最早针对婚姻匹配决策问题, 考虑男女双方针对对方给出的强偏好序信息, 给出了寻求稳定匹配的 G-S 算法; Roth[5]随后对 G-S 算法进行了扩展应用, 并提出双边匹配的市场设计实践理论; 此外, Yoshihisa等[6]考虑了双边匹配主体给出的强偏好序信息, 给出了基于网络图的决策分析方法; Pais[7]研究了大学录取的随机稳定匹配问题, 分析了随机和确定性匹配机制的优缺点, 并给出了基于序值均衡的博弈方法; 乐琦等[8]研究了基于偏好序值的双边匹配决策问题, 并构建了以双边满意度最大为目标的优化模型; Vicki[9]针对基于强偏好序信息的随机匹配决策问题, 给出了改进的 G-S 算法. 值得指出的是, 由于双边匹配决策问题的复杂性以及匹配主体知识和经验的有限性, 匹配主体有时无法给出明确的强偏好序或无差异偏好序形式的信息, 而只能给出诸如“不劣于”、“不优于”形式的弱偏好序信息[10] 来表达他们的需求. 但是, 目前关于基于弱偏好序信息的双边匹配决策方法的研究尚未见到. 此外, 从已有的研究成果来看, 单纯考虑稳定性约束的双边匹配决策分析方法[11]通常只能得到部分主体最优的匹配方案. 如果单纯考虑满意性目标而忽视稳定性约束, 可能会导致有些匹配主体由于不愿意接受当前匹配对象而使匹配失效. 为此, 本文针对匹配主体给出弱偏好序信息的双边匹配决策问题, 提出了一种同时考虑满意性和稳定性的匹配决策分析方法.

2 问题描述

在考虑的基于弱偏好序信息的双边匹配决策问题中, 设甲方匹配主体集合和乙方匹配主体集合为 $A=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ 和 $B=\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$, 其中 A_i 和 B_j 分别表示第 i 个甲方匹配主体和第 j 个乙方匹配主体. 设 $B_{\sigma_i(1)},\Delta B_{\sigma_i(2)},\dots,\Delta B_{\sigma_i(n)}$ 为 A_i 针对乙方匹配主体集合提出的偏好序链, 且 $A_{\vartheta_j(1)},\Delta A_{\vartheta_j(2)},\dots,\Delta A_{\vartheta_j(m)}$ 为 B_j 针对甲方匹配主体集合提出的偏好序链, 其中 $B_{\sigma_i(1)},B_{\sigma_i(2)},\dots B_{\sigma_i(n)}\in B, A_{\vartheta_j(1)},A_{\vartheta_j(2)},\dots,A_{\vartheta_j(m)}\in A$; $\sigma_i(\cdot)$为 A_i 对 $B_1,B_2,\dots,B_n$ 从优到劣的一个排列, $B_{\sigma_i(k)},\Delta B_{\vartheta_i(t)},\forall k\leqslant t$; $\vartheta_j(\cdot)$ 为 B_j 关于 $A_1,A_2,\dots,A_m$ 从优到劣的一个排列, $A_{\vartheta_j(p)},\Delta A_{\vartheta_j(q)},\forall p\leqslant q$; Δ 表示“不劣于”偏好关系, 具体包括如下三种形式的偏好关系[11]: 1) “优于” (用符号 $\succ$ 表示); 2) “优于或等价于” (用符号 $\succeq$ 表示); 3) “等价于” (用符号 $\sim$ 表示).

下面首先给出双边匹配的定义.

定义 1[9] 双边匹配 μ 定义为映射 $\mu: A\cup B\to A\cup B$. 对于 $\forall A_i\in A,\forall B_j\in B$, μ 满足如下条件:

1) $\mu(A_i)\in B\cup A_i$, 若 $\mu(A_i)=A_i$, 则称 A_i 没有匹配对象;

2) $\mu(B_j)\in A\cup B_j$, 若 $\mu(B_j)=B_j$, 则称 B_j 没有匹配对象;

3) 若 $\mu(A_i)=B_j$, 则 $\mu(B_j)=A_i$, 此时称 (A_i,B_j) 为根据匹配 μ 确定的一个匹配对;

4) 若 $\mu(A_i)=B_j$, 则 $\mu(A_i)\neq\mu(B_k), B_k\neq B_j, B_k\in B$.

根据双边匹配 μ 确定的所有匹配对的集合称为一个匹配方案.

本文要解决的问题是, 考虑甲方匹配主体和乙方匹配主体给出的弱偏好序信息, 如何确定匹配方案.

3 匹配决策分析方法

设 g_{ij} 和 h_{ij} 分别表示 A_i 对 B_j 和 B_j 对 A_i 的满意度. 根据上述描述, 下面首先给出稳定匹配方案和满意稳定匹配方案的定义.

定义 2[5] 对于双边匹配 $\mu: A\cup B\to A\cup B$ 所确定的匹配方案, $\forall A_i,A_l\in A,\forall B_k,B_j\in B, i\neq l, k\neq$

j,其中 $\mu(A_i)=B_j,\mu(A_l)=B_k$,若 (A_i,B_j) 和 (A_l,B_k) 满足如下三个条件之一: 1) $g_{ij}\leqslant g_{ik}$ 且 $h_{lk}>h_{ik}$; 2) $g_{ij}>g_{ik}$ 且 $h_{lk}\leqslant h_{ik}$; 3) $g_{ij}>g_{ik}$ 且 $h_{lk}>h_{ik}$,则称该匹配方案为稳定匹配方案; 否则称为不稳定匹配方案.

定义 3[9] 对于双边匹配 $\mu: A\cup B\rightarrow A\cup B$ 所确定的匹配方案,若 $\exists A_i,A_l\in A,\forall B_k,B_j\in B,i\neq l,k\neq j$,其中 $\mu(A_i)=B_j,\mu(A_l)=B_k$,使得 $(A_i,B_j),(A_l,B_k)$ 满足 $g_{ij}+g_{lk}\leqslant g_{ik}+g_{lj}$ 且 $h_{ij}+h_{lk}\leqslant h_{ik}+h_{lj}$,则称该匹配方案为不满意匹配方案,否则称为满意匹配方案.

定义 4 若一匹配方案为稳定匹配方案,同时该方案为满意匹配方案,则称该方案为满意稳定匹配方案.

3.1 计算甲方匹配主体和乙方匹配主体的双边满意度

设 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{m\times n}$ 为甲方匹配主体对乙方匹配主体的满意度矩阵. 由于偏好关系"$\succeq$"包含两层含义: 一种是"优于" ("$\succ$"),一种是"等价于" ("$\sim$"),所以,对于甲方匹配主体 A_i 而言,当其提出的关于乙方匹配主体的偏好序链中包含 m_i 个"$\succ$"关系时,则甲方匹配主体 A_i 的偏好序链包含 2^{m_i} 条偏好序子链,并且每条偏好序子链发生的概率均为 $1/2^{m_i}$.

令 $D_{ij}^{l\succ}$ 和 $D_{ij}^{l\sim}$ 分别为 A_i 认为第 l 条偏好序子链中优于和等价于 B_j 的乙方匹配主体集合, $|D_{ij}^{l\succ}|$ 和 $|D_{ij}^{l\sim}|$ 分别为集合 $D_{ij}^{l\succ}$ 和 $D_{ij}^{l\sim}$ 的基数, $R_{il}(B_j)$ 为 A_i 认为第 l 条偏好序子链中 B_j 的偏好序值, $\Pr(R_{il}(B_j)=q)$ 表示 A_i 认为第 l 条偏好序子链中 B_j 排在第 q 位的概率, $q=1,2,\ldots,n$,并且 $\sum\limits_{q=1}^{n}\Pr(R_{il}(B_j)=q)=1$.

若 $|D_{ij}^{l\sim}|\geqslant 1$,则 $R_{il}(B_j)$ 是均匀分布在区间 $[|D_{ij}^{l\succ}|+1,|D_{ij}^{l\succ}|+|D_{ij}^{l\sim}|]$ 上的离散随机变量,即

$$\Pr(R_{il}(B_j)=q)=\begin{cases}1/|D_{ij}^{l\sim}|, & |D_{ij}^{l\succ}|+1\leqslant q\leqslant|D_{ij}^{l\succ}|+|D_{ij}^{l\sim}|\\ 0, & q<|D_{ij}^{l\succ}|+1\text{ 或 }q>|D_{ij}^{l\succ}|+|D_{ij}^{l\sim}|,\end{cases}\tag{1}$$

对于第 l 条偏好序子链而言, A_i 关于 B_j 的偏好序期望值 $\mathrm{E}[R_{il}(B_j)]$ 为

$$\mathrm{E}[R_{il}(B_j)]=\sum_{q=1}^{n}q\Pr(R_{il}(B_j)=q),\tag{2}$$

考虑 2^{m_i} 条偏好序子链, A_i 关于 B_j 的偏好序期望值 $\mathrm{E}[R_i(B_j)]$ 为

$$\mathrm{E}[R_i(B_j)]=\sum_{l=1}^{2^{m_i}}\sum_{q=1}^{n}q\Pr(R_{il}(B_j)=q)/2^{m_i}.\tag{3}$$

由于序值越小,相应的乙方匹配主体愈优,将 $\mathrm{E}[R_{il}(B_j)]$ 进行规范化,得到 A_i 对 B_j 的满意度 g_{ij} 为

$$g_{ij}=(n-\mathrm{E}[R_i(B_j)]+1)/(n-\mathrm{E}[R_i]+1),\quad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n,\tag{4}$$

其中 $\mathrm{E}[R_i]$ 为 A_i 关于乙方匹配主体的最小总体偏好序期望值, $\mathrm{E}[R_i]=\min(\mathrm{E}[R_i(B_1)],\mathrm{E}[R_i(B_2)],\ldots)$. 特别地,当甲方匹配主体 A_i 的偏好序链中仅包含"$\succ$"或"$\sim$"关系时,有 $2^{m_i}=1$.

同理,设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}$. 设乙方匹配主体 B_j 提出的偏好序链中包含 n_j 个"$\succeq$"关系, $Q_{ij}^{p\succ}$ 和 $Q_{ij}^{p\sim}$ 分别表示 B_j 认为第 p 条偏好序子链中优于和等价于 B_j 的甲方匹配主体集合, $p=1,2,\ldots,2^{n_j}$; $|Q_{ij}^{p\succ}|$ 和 $|Q_{ij}^{p\sim}|$ 分别为集合 $|Q_{ij}^{p\succ}|$ 和 $|Q_{ij}^{p\sim}|$ 的基数; $O_{jp}(A_i)$ 为 B_j 认为第 p 条偏好序子链中 A_i 的偏好序值. $\Pr(O_{jp}(A_i)=v)$ 表示 B_j 认为在第 p 条偏好序子链中 A_i 排在第 v 位的概率, $v=1,2,\ldots,m$,且 $\sum\limits_{v=1}^{m}\Pr(O_{jp}(A_i)=v)=1$,其中

$$\Pr(O_{jp}(A_i)=v)=\begin{cases}1/|Q_{ij}^{p\sim}|, & |Q_{ij}^{p\succ}|+1\leqslant v\leqslant|Q_{ij}^{p\succ}|+|Q_{ij}^{p\sim}|\\ 0, & v<|Q_{ij}^{v\succ}|+1\text{ 或 }v>|Q_{ij}^{v\succ}|+|Q_{ij}^{v\sim}|,\end{cases}\tag{5}$$

类似于式(4),可得 B_j 对 A_i 的满意度 h_{ij} 为

$$h_{ij}=(n-\mathrm{E}[O_j(A_i)]+1)/(n-\mathrm{E}[O_j]+1),\quad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n,\tag{6}$$

其中 $\mathrm{E}[R_i(B_j)]=\sum_{p=1}^{2^{n_j}}\sum_{v=1}^{m}v\mathrm{Pr}(O_{jp}(A_i)=v)/2^{n_j}$, $\mathrm{E}[O_j]=\min(\mathrm{E}[O_j(A_1)],\mathrm{E}[O_j(A_2)],\ldots,\mathrm{E}[O_j(A_m)])$. 特别地, 当乙方匹配主体 B_j 的偏好序链中仅包含 "$\succ$"关系或"$\sim$"关系时, 有 $2^{n_j}=1$.

不难证明, 满意度 g_{ij} 和 h_{ij} 具有如下性质:

性质 1 (非负性) $g_{ij},h_{ij}\geqslant 0$.

性质 2 令 $g_i^+=\max\{g_{i1},g_{i2},\ldots,g_{in}\}$, $h_j^+=\max\{h_{1j},h_{2j},\ldots,h_{mj}\}$, 则 $g_i^+=h_j^+=1$.

性质 3 令 $g_i^-=\min\{g_{i1},g_{i2},\ldots,g_{in}\}$, $h_j^-=\min\{h_{1j},h_{2j},\ldots,h_{mj}\}$, 则 $g_i^->0$, $h_i^->0$.

性质 4 (传递性)若 1) $g_{ij}>g_{ik},g_{ik}>g_{il},k,l\in\{1,2,\ldots,n\},k\neq l$, 则 $g_{ij}>g_{il}$; 2) $h_{ij}>h_{uj},h_{uj}>h_{vj},u,v\in\{1,2,\ldots,n\},u\neq v$, 则 $h_{ij}>h_{vj}$.

3.2 构建双边匹配的优化模型

引入0-1变量 x_{ij}, 若 A_i 与 B_j 形成匹配对, 则 $x_{ij}=1$, 否则 $x_{ij}=0$. 根据定义 2 和定义 3, 可建立如下确定最优匹配方案的优化模型

$$\mathrm{Max}\ \ z_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_{ij}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Max}\ \ z_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_{ij}, \tag{8}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant 1,\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant 1,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

$$x_{ij}+\sum\nolimits_{k:g_{ik}>g_{ij}}x_{ik}+\sum\nolimits_{k:h_{kj}>h_{ij}}x_{kj}\geqslant 1,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\ldots,m, \tag{11}$$

$$x_{ij}=0\text{或}1,\quad i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\cdots,m, \tag{12}$$

其中式(7)和式(8)分别表示最大化甲方匹配主体和乙方匹配主体的满意度; 式(9)和式(10)分别表示每个甲方匹配主体和乙方匹配主体最多可以与另一方匹配主体形成匹配对; 式(11)为根据文献[12]和定义 2 确定的稳定性约束条件.

定理 1 模型(7)–(12)必然存在有效解.

证明 模型(7)–(12)的约束条件可见, 可行解集合非空且数目有限, 例如, $x_{kl}=1,x_{ij}=0,,i\neq k$ 和 $j\neq l$ 就是模型(7)–(12)的一个可行解. 进一步地, 可行解中一定存在一个有效解, 例如, 不考虑式(8)只考虑式(7)的单目标优化模型的最优解就是模型(7)–(12)的一个有效解. 证毕.

在现实的匹配问题中, 有效解是指所涉及的匹配主体双方均无法找到满意性更高的稳定匹配方案.

不难看出, 模型(7)–(12)是多目标 0-1 整数规划模型. 针对模型(7)–(12)的特点, 本文依据文献[13]的思想, 设计了如下的变步长算法.

步骤 1 将模型(7)–(12)转化为两个单目标优化模型(I)和模型(II), 其中模型(I)和模型(II)的目标函数分别为式(7)和式(8)中的目标函数, 约束条件均为式(9)–式(12). 分别求解模型(I)和(II), 得到最优解 X_1^* 和 X_2^*, z_1^* 和 z_2^* 为最优解 X_1^* 和 X_2^* 对应的目标函数值, 将 X_1^* 代入式(8)中, 求得相应的目标函数值为 z_2^0;

步骤 2 初始迭代变量, $s\leftarrow 1$, 最大迭代次数为 M;

步骤 3 设步长为 $\Delta=(z_2^*-z_2^{(s-1)})/(\mathrm{M}-s)$, 构建模型 (s), 即在模型(I)中加入约束条件 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}h_{ij}x_{ij}\geqslant z_2^{(s-1)}+\Delta$. 求解模型 (s), 输出 $X_1^{(s)}$, 得到相应的目标函数值 $z_1^{(s)}$, 并将 $X_1^{(s)}$ 代入到式(8)中, 得到相应的目标

函数值为 $z_2^{(s)}$, 若 $s > \mathrm{M}$ 或 $z_2^{(s)} + \Delta > z_2^*$, 则转步骤 5; 否则转步骤 4;

步骤 4 $s \leftarrow s+1$, 转步骤 3;

步骤 5 输出有效解集合 $\Pi = \{X_1^*, X_2^*, X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(s)}\}$ 并求出有效解对应的目标函数值, 即 $z_1 = z_1(X), z_2 = z_2(X), X \in \Pi$;

步骤 6 根据决策者设定的隶属函数 $V = V(z_1, z_2)$, 确定最优解 $\bar{X} = \arg\max\limits_{X\in\Pi} V(z_1, z_2)$.

定理 2 模型(7)–(12)的最优解 $\bar{X}$ 对应的匹配方案为满意稳定匹配方案.

证明 由稳定性约束条件(11), 最优解 $\bar{X}$ 对应的匹配方案显然是稳定匹配方案.

若假设 $\bar{X}$ 对应的匹配方案为不满意匹配方案, 则在该匹配方案中, $\exists A_i, A_l \in A, \forall B_k, B_j \in B, i \neq l, k \neq j$, 其中 $x_{ij} = 1, x_{lk} = 1$, 而且 $x_{ik} = 0, x_{lj} = 0$, 满足 $g_{ij} + g_{lk} \leqslant g_{ik} + g_{lj}$ 且 $h_{ij} + h_{lk} \leqslant g_{ik} + g_{lj}$ 同时成立.

令 $X' = \bar{X} \backslash \{x_{ij} = 1, x_{lk} = 1\} \cup \{x_{ik} = 1, x_{lj} = 1\}$. 若 X' 不是可行解, 则 X' 不能确定匹配方案.

若 X' 是可行解, 设 $z_1' = z_1(X')$ 和 $z_2' = z_2(X')$ 分别为对应的目标函数 z_1 和 z_2 的值, 则有

$$z_1' = g_{ik}x_{ik} + g_{lj}x_{lj} + \sum_{x_{uv}\in X'\backslash\{x_{ik}=1, x_{lj}=1\}} g_{uv}x_{uv} \geqslant g_{ij}x_{ij} + g_{lk}x_{lk} + \sum_{x_{uv}\in \bar{X}\backslash\{x_{ij}=1, x_{lk}=1\}} g_{uv}x_{uv} = \bar{z}_1,$$

$$z_2' = h_{ik}x_{ik} + h_{lj}x_{lj} + \sum_{x_{uv}\in X'\backslash\{x_{ik}=1, x_{lj}=1\}} h_{uv}x_{uv} \geqslant h_{ij}x_{ij} + h_{lk}x_{lk} + \sum_{x_{uv}\in \bar{X}\backslash\{x_{ij}=1, x_{lk}=1\}} h_{uv}x_{uv} = \bar{z}_2.$$

这显然与 $\bar{X}$ 为有效解矛盾. 因此, 模型(7)–(12)的最优解 $\bar{X}$ 对应的匹配方案为满意稳定匹配方案. 证毕.

4 算例

某中介公司提供机械类产品的专利技术转让服务, 甲方匹配主体是拥有专利技术产权的个人或企业; 乙方匹配主体是求购专利技术使用权的个人或企业. 该技术中介公司在某一时段收到甲方匹配主体集合 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$ 的转让信息和乙方匹配主体 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_6\}$ 的求购信息. 甲方匹配主体 A_i 关于 B 给出的偏好序主要考虑专利技术的转让成本、企业规模及信誉等指标. 乙方匹配主体 B_j 关于 A 给出的偏好序主要考虑专利技术能力建设、政策环境、专利技术创新体制及交易成本等指标; 甲方匹配主体和乙方匹配主体给出的偏好序信息如表 1 所示.

表 1 甲方主体和乙方主体给出的偏好序信息

Table 1 The preference ordering information provided by two-sided matching party

	偏好序		偏好序
A_1	$B_5 \succ B_3 \succeq B_2 \succeq B_1 \succ B_6 \succ B_4$	B_1	$A_1 \succeq A_3 \succ A_4 \sim A_6 \succ A_5 \succ A_2$
A_2	$B_4 \succeq B_3 \succ B_6 \succeq B_5 \succeq B_2 \succ B_1$	B_2	$A_5 \succ A_6 \sim A_1 \sim A_3 \succ A_4 \succeq A_2$
A_3	$B_2 \succ B_5 \succ B_1 \sim B_6 \succeq B_3 \succ B_4$	B_3	$A_4 \succ A_3 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_5 \sim A_1$
A_4	$B_6 \sim B_1 \sim B_3 \succeq B_5 \succ B_4 \succ B_2$	B_4	$A_5 \succ A_2 \succeq A_3 \succeq A_4 \succ A_1 \succ A_6$
A_5	$A_5 \succ A_2 \succeq A_3 \succeq A_4 \succ A_1 \succ A_6$	B_5	$A_4 \sim A_2 \succ A_6 \succ A_1 \succ A_3 \succeq A_5$
A_6	$B_2 \succeq B_3 \succ B_6 \succ B_4 \succ B_5 \succ B_1$	B_6	$A_6 \succeq A_5 \sim A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succeq A_4$

根据式(1)–式(4), 可得甲方匹配主体的满意度矩阵

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 37/48 & 2/3 & 1 & 1/6 & 27/48 & 1/3 \\ 4/23 & 11/23 & 22/23 & 1 & 13/23 & 15/23 \\ 13/24 & 1 & 5/12 & 1/6 & 5/6 & 13/24 \\ 1 & 4/19 & 1 & 8/19 & 18/19 & 1 \\ 1 & 7/12 & 1/6 & 39/48 & 7/12 & 37/48 \\ 4/23 & 1 & 22/23 & 12/23 & 8/23 & 16/23 \end{pmatrix}.$$

根据式(5)–式(6)，可得乙方匹配主体的满意度矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/4 & 1/3 & 12/23 & 12/19 \\ 4/23 & 5/24 & 1/2 & 38/48 & 1 & 7/19 \\ 21/23 & 2/3 & 5/6 & 2/3 & 7/23 & 17/19 \\ 14/23 & 7/24 & 1 & 27/48 & 1 & 5/19 \\ 8/23 & 1 & 1/4 & 1 & 3/23 & 22/23 \\ 14/23 & 2/3 & 2/3 & 1/6 & 16/23 & 1 \end{pmatrix}.$$

引入0-1决策变量 x_{ij}, 建立确定双边匹配方案的优化模型(7)–(12), 采用本文所提的变步长算法求解, 首先确定模型(I)和(II)的最优解 X_1^* 和 X_2^*, 以及相应的目标函数值 $(z_1^*, z_2^{(0)})$ 和 $(z_1^{(0)}, z_2^*)$, 其中 $X_1^*=\{x_{11}=1, x_{26}=1, x_{35}=1, x_{43}=1, x_{54}=1, x_{62}=1\}$, $X_2^*=\{x_{11}=1, x_{25}=1, x_{32}=1, x_{43}=1, x_{54}=1, x_{66}=1\}$, $z_1^*=5.069, z_2^{(0)}=4.339, z_1^{(0)}=4.845, z_2^*=5.667$. 然后, 取 $\mathrm{M}=20$, 经过迭代 3 次, 可以获得全部有效解, 具体迭代过程如表 2 所示.

表 2 变步长算法的迭代过程

Table 2 The iteration process of changeable step algorithm

迭代次数	步长 Δ	有效解 $X_1^{(s)}$	目标函数值 $z_1^{(s)}$	目标函数值 $z_2^{(s)}$
1	0.069	$x_{11}=1, x_{22}=1, x_{35}=1, x_{43}=1, x_{54}=1, x_{66}=1$	4.937	4.587
2	0.060	$x_{11}=1, x_{24}=1, x_{36}=1, x_{43}=1, x_{55}=1, x_{62}=1$	4.912	4.894
3	0.044	$x_{11}=1, x_{25}=1, x_{34}=1, x_{43}=1, x_{52}=1, x_{66}=1$	4.873	5.317

有效解集合可写作 $\mathit{\Pi}=\{X_1^*, X_2^*, X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}\}$. 最后, 假设中介公司给定的隶属度函数 V 为

$$\begin{aligned} V(z_1,z_2) &= w_1(z_1-z_1^-)/(z_1^*-z_1^-)+w_2(z_2-z_2^-)/(z_2^*-z_2^-) \\ &= 0.5(z_1-3.384)/1.685+0.5(z_2-3.753)/1.914, \end{aligned}$$

其中 w_1 和 w_2 分别为中介公司给出的目标 z_1 和 z_2 的权重, $w_1+w_2=1, w_1, w_2\geqslant 0$, 这里取 $w_1, w_2=0.5$; $(z_i-z_i^-)/(z_i^*-z_i^-)$ 为目标 z_i 的隶属度, $z_1^*=5.069, z_1^-=3.384, z_2^*=5.667, z_2^-=3.753$ 分别为所构建模型中单独考虑目标 z_i 优化时的最大值和最小值.

将表 2 中有效解依次代入隶属度函数 V 中, 则 $V(z_1^*, z_2^{(0)})=0.653, V(z_1^{(0)}, z_2^*)=0.933, V(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})=0.679, V(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})=0.751, V(z_1^{(3)}, z_2^{(3)})=0.852$. 可见, $V(z_1^{(0)}, z_2^*)$ 对应的解 X_2^* 为模型的最优解, 相应的匹配方案为 $(A_1,B_1),(A_2,B_5),(A_3,B_2),(A_4,B_3),(A_5,B_4),(A_6,B_6)$.

为了说明稳定性在匹配决策中的作用, 下面采用不考虑稳定性约束的双边匹配决策的优化模型, 即在所构建模型中不考虑稳定性约束条件, 来解决上述决策问题, 对比分析结果如表 3 所示.

表 3 对比分析结果

Table 3 The comparative analysis result

	匹配方案	目标函数 z_1 值	目标函数 z_2 值
不考虑稳定性约束	$(A_1,B_1)\,(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_5),(A_5,B_6),(A_6,B_3)$	5.446	5.883
考虑稳定性约束	$(A_1,B_1),(A_2,B_5),(A_3,B_2),(A_4,B_3),(A_5,B_4),(A_6,B_6)$	4.845	5.667

从表(3)可知, 在不考虑稳定性约束情形下, 所得的甲方的满意度 $z_1=5.446>4.845$, 同时, 所得的乙方满意度 $z_2=5.883>5.667$. 但所确定的匹配方案包含互斥配对, 如匹配对 (A_4,B_5) 与 (A_6,B_3) 就是互斥配对(因为 $g_{45}<g_{43}, h_{63}<h_{43}$), 从而影响了整体匹配方案的稳定性. 而考虑稳定性约束后, 就会避免出现互斥

配对, 能够确保整体匹配方案的稳定性.

5 结束语

本文针对基于弱偏好序信息的双边匹配决策问题, 提出了一种决策分析方法. 该方法是通过考虑匹配方案的稳定性约束, 建立以匹配主体双边满意度最大为目标的优化模型来确定最优匹配方案. 此外, 对考虑稳定性约束情形下确定的匹配方案和不考虑稳定性约束情形下确定的匹配方案进行了对比分析, 进一步说明所提出方法将使匹配方案更加可靠和有效. 与已有研究成果相比, 本文给出的双边匹配决策分析方法, 同时考虑了匹配方案的满意性和稳定性, 可以避免单纯考虑满意性或稳定性时, 只能得到部分主体最优的匹配方案或有些匹配主体由于不愿意接受当前匹配对象而使匹配失效的情形.

参考文献:

[1] Gale D, Shapley L. College admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69 (1): 9–15.

[2] Abraham D J, Irving R W, Manlove D F. Two algorithms for the student-project allocation problem[J]. Journal of Discrete Algorithms, 2007, 5(1): 73–90.

[3] 汪定伟. 电子商务中的建模与优化[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Wang Dingwei. Modeling and Optimization in E-commerce[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)

[4] 乐 琦, 樊治平. 基于累积前景理论的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2013, 28(1): 38–46.
Yue Qi, Fan Zhiping. Decision method for two-sided matching based on cumulative theory[J]. Journal of Systems Engineering, 2013, 28(1): 38–46. (in Chinese)

[5] Roth A E. Common and conflicting interests in two-sided matching market[J]. European Economic Review, 1985, 27 (1): 75–96.

[6] Yoshihisa M, Tatsuya H, Yoshiteru I. A network visualization of stable matching in the stable marriage problem[J]. Artificial Life and Robotics, 2011, 16(1): 40–43.

[7] Pais J. Random matching in the college admission problem[J]. Economic Theory, 2008, 35(1): 99–116.

[8] 乐 琦, 樊治平. 一种具有序值信息的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(2): 185–192.
Yue Qi, Fan Zhiping. Method for two-sided matching decision-making with ordinal interval numbers[J]. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(2): 185–192. (in Chinese)

[9] Vicki K. Marriage matching and gender satisfaction[J]. Social Choice Welfare, 2009, 32(1): 15–27.

[10] Khaled J, Jean-Marc M. An ordinal sorting method for group decision-making[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 180(3): 1272–1289.

[11] 乐 琦, 樊治平. 基于悲观度的双边匹配决策问题研究[J]. 管理科学, 2012, 25(2): 112–120.
Yue Qi, Fan Zhiping. Research on two-sided matching decision problems based on pessimism degree[J]. Journal of Management Science, 2012, 25(2): 112–120. (in Chinese)

[12] Vande V J H. Linear programming brings marital bliss[J]. Operations Research Letters, 1989, 8(3): 147–153.

[13] Steuer R E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application[M]. New York: Wiley, 1986.

作者简介:

梁海明(1986—), 男, 吉林吉林人, 博士生, 研究方向: 管理决策分析, Email: parklhm@sina.com;

姜艳萍(1968—), 女, 辽宁沈阳人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 管理决策分析, Email: ypjiang@mail.neu.edu.cn.