

# 存在金融对冲的两级供应链优化决策

程永文<sup>1,2</sup>, 周永务<sup>2</sup>

(1. 合肥学院经济系, 安徽 合肥 230022

2. 华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510641)

**摘要:** 为了了解不同供应链协调合约决策主体的收益风险, 采用产品市场与金融市场正相关的假设, 对决策者的收益分析表明柔性合约(flexible contracts)和金融对冲(financial hedging)的避险功能存在一致性. 在此基础上, 以批发价格合约, 回购合约为例, 考虑存在金融对冲的情况下供应链的优化问题. 最后, 以批发价格合约为例, 零售商同时决策订购量和避险工具数量. 模型的结果表明: 对于风险规避者, 金融避险工具的使用降低决策者风险导致批发价格合约的零售商提高订购量, 这也间接证明了批发价格合约在实践中如此普遍的一个原因.

**关键词:** 供应链; 协调合约; 回购合约; 金融对冲; 条件在值风险

**中图分类号:** O227      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-5781(2014)03-0371-13

## Two-echelon supply chain coordination with financial hedging instruments

Cheng Yongwen<sup>1,2</sup>, Zhou Yongwu<sup>2</sup>

(1. Economy Department, Hefei University, Hefei 230022, China;

2. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

**Abstract:** In order to know of the revenue risk of the different agents in the supply chain, the hypothesis that product markets are positive correlation with financial markets was adopted. The analysis shows that flexible contracts are coherent with financial hedging instruments in hedging risk. Based on the results, modeled with wholesale price contracts and buyback contracts, the optimization of supply chain was solved using the financial hedging instruments. Finally the optimal decision on the order quantity and hedging quantity of the wholesale price contract was explained. The results of the model show that hedging instruments can decrease the profit risk, therefore risk-averse agents prefer to improve the ordering. It also proves indirectly that the wholesale price contracts are universal in supply chain contracts.

**Key words:** supply chain; coordination contracts; buyback contracts; financial hedging; conditional value at risk

## 1 引言

企业在规避风险方面可以采取同上、下游企业签订固定订购合约或期权数量合约规避风险. 同时, 企业也越来越擅长采用金融市场工具来对冲市场风险. 研究较多的方面体现在对待汇率风险的规避, 最常使用

收稿日期: 2012-9-25; 修订日期: 2013-04-25.

资助项目: 国家自然科学基金重点资助项目(71131003); 国家自然科学基金青年基金资助项目(71201044); 教育部博士点资助项目(20100172110032); 广东省自然科学基金资助项目(1015106410100000).

的是金融市场上的外汇期权工具. Ding等<sup>[1]</sup>和Zhu等<sup>[2]</sup>在运作对冲的基础上,假定决策者是风险规避,运用金融对冲汇率风险. Boyabatli等<sup>[3,4]</sup>研究了灵活生产技术和金融风险共存的相互影响,认为灵活生产技术和金融风险管理的互补关系有赖于公司的规模. 考虑到企业不仅仅面对汇率风险,更主要的是市场风险,更多学者研究了运作策略. Cohen等<sup>[5]</sup>说明跨国企业应对汇率风险建立多地区生产中心的运作策略,运用动态规划方法对分属不同地区的生产选择权进行定价. Kogut等<sup>[6]</sup>在Dixit等<sup>[7,8]</sup>的理论基础上对在不同国家的两个生产中心的生产选择权进行定价. Li等<sup>[9]</sup>研究了在价格不确定的情况下的灵活且风险共享的供应合约,他们说明了合约灵活应对和风险共享可以有效降低采购成本. VanMieghem<sup>[10]</sup>研究了资源共享,资源多元化和设计报童网络的灵活性来降低风险. 叶飞等<sup>[11]</sup>研究了风险中性公司和风险规避农户的供应链协调问题,认为“收购补贴+市场保护价+保证金”型契约可实现供应链协调.

Anvari<sup>[12]</sup>运用资本资产定价模型(CAPM)研究报童面临正态分布的随机需求. Caldentey等<sup>[13]</sup>证明了不同的信息假设导致了不同类型的解. Cohen等<sup>[14]</sup>,和Kouvelis<sup>[15]</sup>等给出了运作策略的概念,认为企业可以通过与供应链上其它企业通过合作和订立契约,实现灵活的复合型选择权(real compound options)来应对市场的变化. 例如通过数量弹性合约、两阶段订货合约、批发价格合约与期权合约的混合合约、延迟订购策略等. 虽然运作策略在激励零售商提高订购量和规避风险方面具有优势,但是因存在信息不对称和违约风险的存在,导致在实际运用中益处大为减小,而金融市场工具则不存在这方面的缺陷. 但这类避险工具与存货产品并不是完全相关,恰当的对冲比例的选择一直是个难题. Gaur等<sup>[16]</sup>研究使用金融市场工具对冲存货风险的问题. 他们从产品的需求与标准普尔500指数之间的相关关系断定两者之间存在显著的正相关关系,由此认为可以通过购买以股票指数作为目标证券的衍生证券对冲未来需求风险. 这个加入金融工具的存货对冲组合可以降低未来利润风险(组合收益的标准差减小). 他们证明了对于风险规避的决策者,这种对冲组合可以有效提高效用水平. Chod等<sup>[17]</sup>证明了运作对冲和金融对冲在经济上是具有互补性和相互替代性. Caldentey等<sup>[18]</sup>在模型中假定存在金融市场的连续交易扩展了Gaur等<sup>[16]</sup>的工作. Chen<sup>[19]</sup>在多期存货和定价模型中加入了风险规避的假定和金融对冲方法. Zhou等<sup>[20]</sup>建立避险公司和签发合约公司之间进行店头市场交易(OTC)模型并研究合约的定价问题. Chen等<sup>[21]</sup>研究了需求与天气相关的产品,在风险规避的假设下,以VaR测度风险,制造商提供天气相关的折扣合约以实现供应链协调,同时运用天气相关的金融期权对冲风险. 本文主要研究零售商和供应商在不同合约下面临的风险,如何嵌入金融工具以降低风险,确定不同风险态度决策者的最优对冲数量,了解加入金融对冲工具对供应链协调性的影响,最后考虑运作对冲和金融对冲的相互替代问题.

## 2 对冲组合模型

假设在 $T$ 时刻股票指数或某一类金融资产为 $S_T$ ,初值为 $S_0$ ,金融市场为完全市场,零售商未来产品需求为 $D$ ,假设两者完全正相关并满足线性关系 $D = a + bS_T$ 其中 $b > 0$ . Gaur等<sup>[16]</sup>在文中已详细使用不同统计类型的产品销售与S&P500指数作相关性分析,都得出显著部分正相关的结论. 本文为便于推导,先假设完全正相关,在下一节放松假设为部分正相关. 零售商根据合约条件最优订购量为 $Q$ ,以价格 $r$ 销售,未对冲的 $T$ 时刻收益以 $V_{e,R}^T$ 表示,其中下标 $e$ 表示风险暴露,即未对冲风险的情况,若下标是 $h$ 则表示对冲风险的情况.  $R$ 表示零售商, $M$ 表示制造商. 下面对不同合约风险状况进行分析,并给出相应的对冲风险组合.

### 2.1 批发价格合约的风险分析和对冲组合

零售商在销售季节前与供应商签订批发价格契约,同意按批发价格 $w$ 购买数量 $Q$ 产品,假定产品残值为 $v$ ,则零售商购买产品时的收益为 $V_{e,R}^0(Q) = -wQ$ ,在不考虑短缺成本的情况下,实现销售后的收益为

$$V_{e,R}^T(Q) = r \min(Q, D) + v[Q - D]^+. \quad (1)$$

根据需求与金融资产间存在线性关系,可将上式重写为

$$\begin{aligned}
 V_{e,R}^T &= (r - v) \min(Q, a + bS_T) + vQ \\
 &= b(r - v) \left( S_T - \max \left( S_T - \frac{Q - a}{b}, 0 \right) \right) + a(r - v) + vQ,
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中  $\max(S_T - (Q - a)/b, 0)$  是看涨期权, 执行价为  $(Q - a)/b$ , 因此零售商相当于持有  $b(r - v)$  的标的资产, 同时卖出  $b(r - v)$  看涨期权, 执行价为  $(Q - a)/b$ . 其收益状况如下图 1(a)所示.

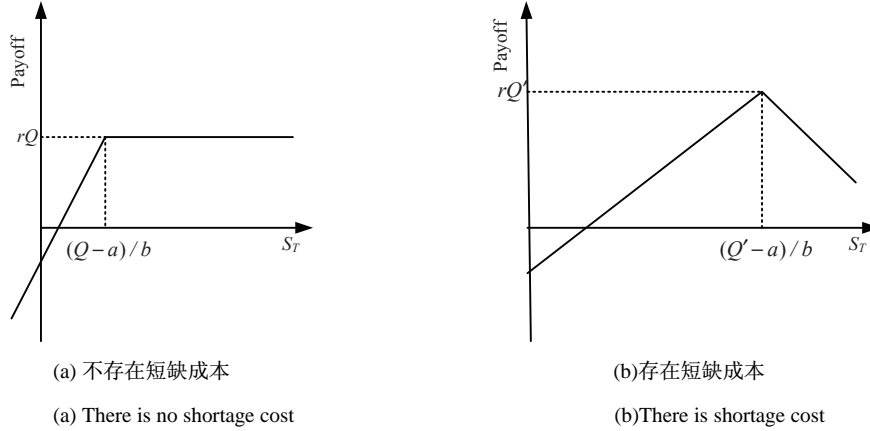


图1 批发价格合约零售商损益状况

Fig. 1 Retailer's payoff with wholesale price contracts

当考虑单位短缺成本  $p$ , 零售商  $T$  时的收益函数为

$$\begin{aligned}
 V_{e,R}^T(Q) &= r \min(Q', D) + V[Q' - D]^+ - p[D - Q']^+ \\
 &= b(r - v) \left( S_T - \max \left( S_T - \frac{Q' - a}{b}, 0 \right) \right) - \\
 &\quad bp \max \left( S_T - \frac{Q' - a}{b}, 0 \right) + a(r - v) + vQ'.
 \end{aligned} \tag{3}$$

损益状况如图 1(b)所示. 考虑短缺成本时, 订购量  $Q' > Q$ , 因此  $a(r - v) + vQ' > a(r - v) + vQ$ . 考虑短缺成本的损益变化与不考虑短缺成本之间的主要差异在持有的看涨期权空头的数量不一样. 存在短缺成本的情形下持有较多空头看涨期权(增加了  $bp$  个单位空头看涨期权).

为了对冲收益风险, 有如下结论.

**定理 1** 对于批发价格合约的零售商, 订购存货主要面临经济向下风险. 不考虑短缺成本时, 可采取购买适当数量的看跌期权, 执行价格为  $(Q - a)/b$ , 持有数量  $b(r - v)$  的看跌期权多头可完全对冲经济向下波动. 考虑短缺成本时, 还需另外持有有一定数量的看涨期权多头, 持有数量  $bp$  可完全对冲.

**证明** 1) 不考虑短缺成本, 设买入  $N$  数量的看跌期权, 单位期权费为  $t_p$ , 则收益为

$$\begin{aligned}
 V_{h,R}^T(Q) &= b(r - v) (S_T - \max(S_T - (Q - a)/b, 0)) + a(r - v) + vQ + \\
 &\quad N \max((Q - a)/b - S_T, 0) - Nt_p,
 \end{aligned}$$

上式可重写为

$$V_{h,R}^T(Q) = \begin{cases} N(Q - a)/b + a(r - v) + vQ - Nt_p + (b(r - v) - N)S_T, & S_T < (Q - a)/b \\ rQ - Nt_p, & S_T \geq (Q - a)/b. \end{cases} \tag{4}$$

由上式可看出当  $N = b(r - v)$ ,  $S_T < (Q - a)/b$  时,  $V_{h,R}^T(Q) = N(Q - a)/b + a(r - v) + vQ - Nt_p$ , 收益函数全部变成常量, 随机项  $S_T$  被抵消. 即使  $N < b(r - v)$ , 随机项没有完全抵消, 但随机项的敏感系数减小了, 有效降低随机波动.

2) 考虑短缺成本, 设持有  $M$  数量的看涨期权多头和  $N$  数量看跌期权多头, 期权费分别为  $t_c, t_p$ , 则对冲组合收益为

$$V_{h,R}^T(Q) = \begin{cases} \frac{N(Q' - a)}{b} + a(r - v) + vQ' - Nt_p - Mt_c + (b(r - v) - N)S_T, & S_T < \frac{Q' - a}{b} \\ rQ' - (M - bp)\frac{Q' - a}{b} - Nt_p - Mt_c + (M - bp)S_T, & S_T \geq \frac{Q' - a}{b}. \end{cases} \quad (5)$$

同样地, 如果  $M = bp, N = b(r - v)$  随机项都被完全抵消, 消除了不确定性; 如果  $M < bp, N < b(r - v)$ , 则降低了随机项的敏感系数. 证毕.

对于批发价格合约的供应商因不承担风险, 因此不必要讨论.

## 2.2 回购合约供应商的风险分析和对冲组合

在回购合约中, 因供应商承诺对未售出商品的回购. 因此, 供应链利润风险主要集中在供应商. 假设回购价格为  $c_r$ , 且  $c_r > v$ . 其它假设和符号与前相同.

供应商在零时刻以批发价格售出  $Q_b$  产品, 因此零时刻的损益为  $V_{e,m}^0(Q_b) = wQ_b$ ,  $T$  时刻的损益为  $V_{e,m}^T(Q_b) = (v - c_r)[Q_b - D]^+$ , 改写为与标的证券相关的式子, 得

$$V_{e,m}^T(Q_b) = b(c_r - v) \left( S_T - \max \left( S_T - \frac{Q_b - a}{b}, 0 \right) \right) + (a - Q_b)(c_r - v). \quad (6)$$

回购合约的供应商相当于持有  $b(c_r - v)$  标的证券和执行价为  $(Q_b - a)/b$  的看涨期权空头, 其损益状况如图 2. 对冲风险的组合应购买  $N_{bs}$  的看跌期权多头, 执行价为  $(Q_b - a)/b$ .

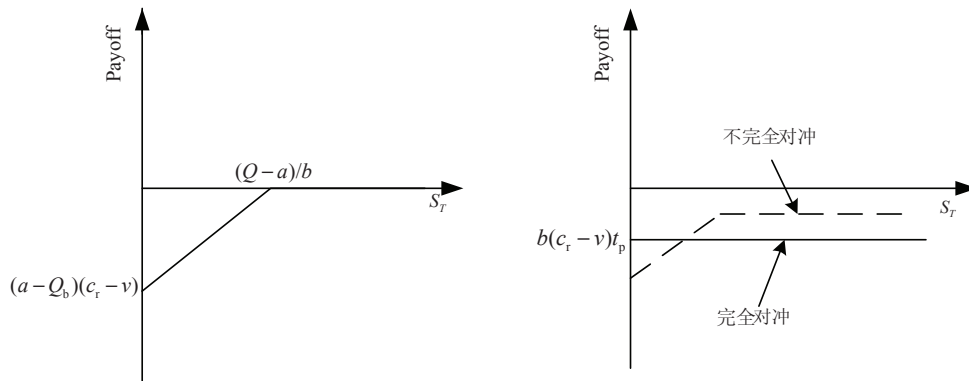


图 2 供应商回购合约损益图以及对冲风险损益图

Fig. 2 Supplier's payoff and hedged payoff with buyback contracts

对冲风险组合损益可改写为

$$V_{h,m}^T(Q_b) = \begin{cases} (a - Q_b)(c_r - v) + \frac{N_{bs}(Q_b - a)}{b} - N_{bs}t_p + (b(c_r - v) - N_{bs})S_T, & S_T < \frac{Q_b - a}{b} \\ -N_{bs}t_p, & S_T \geq \frac{Q_b - a}{b}. \end{cases} \quad (7)$$

由上式可发现  $b(c_r - v) - N_{bs} < b(c_r - v)$  降低了随机项的敏感系数, 因此降低了收益风险. 从图 2 中看出完全对冲时, 损益锁定为  $-b(c_r - v)t_p$ , 不完全对冲时, 损益波动明显减小.

**定理 2** 回购合约中, 供应商和零售商各自承担的风险与其在供应链中利润分享成正比, 这一结论与资本资产定价模型一致.

**证明** 从以上推导结果来看, 供应商主要面临经济向下风险. 为便于与零售商面临的风险进行比较, 不考虑短缺成本的情况下, 零售商也主要面临经济向下风险. 零售商风险暴露损益函数中的随机项敏感系数为  $b(r - c_r)$ , 而供应商的风险暴露损益函数中的随机项敏感系数为  $b(c_r - v)$ , 设  $S$  的标准差为  $\sigma$ , 零售商的

标准差为  $\sigma_r$ , 供应商的标准差为  $\sigma_s$ , 则  $\sigma_r/\sigma_s = (r - c_r)/(c_r - v)$ .  $r$  和  $v$  固定的情形下, 合约中回购价格是双方讨价还价的结果, 回购价格越高, 零售商风险承担越小, 但其风险利润分成也越低. 相反, 如果回购价格越低, 但不得低于残值  $v$ , 零售商面临风险较高, 但其风险利润也越高. 对于供应商也是如此. 证毕.

### 3 条件在值风险约束下的最优对冲比例

在市场上很难找到完全正相关的标的证券, 多数是部分正相关. 因此, 假设  $D = a + bS_T + \varepsilon$ , 其中  $E[\varepsilon] = 0$ ,  $E[\varepsilon^2] < \infty$ ,  $\varepsilon$  为误差项, 与需求  $D$  相互独立.

设  $\hat{S}_T = S_T + \varepsilon/b$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon/b$ , 则  $\hat{S}_T = S_T + \varepsilon'$ ,  $D = a + b\hat{S}_T$ , 保留了前文假设的形式, 只要将  $S_T$  转换成  $\hat{S}_T$  即可. 第1节的内容只是讨论了不同合约面临的风险特性和如何构建对冲组合, 本节主要探讨决策者是风险规避者的假设下, 决策者如何决策对冲参数.

本节风险度量采用条件在值风险(CVaR), 因其满足 Artzner 等<sup>[22]</sup>提出了一致性风险测度(coherent risk measure) 概念, 即具有单调性、绝对齐次性、平移不变性和次可加性的性质. 在值风险测度在概率分布是连续函数且严格增函数的情况下具有以上性质, 反之, 则以上性质不能同时满足. 为了弥补其不足, Rockafellar 等<sup>[23]</sup>证明了构造预期损失(expected shortfall) 分布函数符合一致性风险测度.

#### 3.1 批发价格合约的最优对冲选择

先以批发价格合约为例, 不考虑短缺成本时, 其损益函数为

$$\begin{aligned} V_{e,R}^T &= (r - v) \min(Q, a + b\hat{S}_T) + vQ \\ &= b(r - v) \left( \hat{S}_T - \max \left( \hat{S}_T - \frac{Q - a}{b}, 0 \right) \right) + a(r - v) + vQ. \end{aligned} \quad (8)$$

其对冲方法为持有  $1N$  数量的看跌期权多头, 期权费单价为  $t_p$ , 执行价格为  $(Q - a)/b$ . 看跌期权的损益可写为  $N \max \left( (Q - a)/b - \hat{S}_T, 0 \right) - Nt_p = \frac{N}{b} \max \left( Q - a - b\hat{S}_T, 0 \right) - Nt_p = \frac{N}{b} [Q - D]^+ - Nt_p$ , 因此, 对冲组合也可以写为

$$\begin{aligned} V_{h,R}^T(Q) &= b(r - v) \left( \hat{S}_T - \max \left( \hat{S}_T - \frac{Q - a}{b}, 0 \right) \right) + a(r - v) + vQ + \\ &\quad N \max \left( \frac{Q - a}{b} - \hat{S}_T, 0 \right) - Nt_p \\ &= r \min(Q, D) + v [Q - D]^+ + \frac{N}{b} (Q - D)^+ - Nt_p \\ &= r \min(Q, D) + \left( v + \frac{N}{b} \right) (Q - D)^+ - Nt_p. \end{aligned} \quad (9)$$

设损失函数  $L(N, D) = -V_{h,R}^T(Q) = -r \min(Q, D) - \left( v + \frac{N}{b} \right) [Q - D]^+ + Nt_p$ , 由此构造 CVaR 辅助函数

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\beta}(N, \alpha) &= \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_0^{\infty} [L(N, D) - \alpha]^+ f(D) dD \\ &= \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_0^Q \left[ Nt_p - \left( v + \frac{N}{b} \right) Q - \left( r - \frac{N}{b} - v \right) D - \alpha \right]^+ f(D) dD + \\ &\quad \frac{1}{1 - \beta} \int_Q^{\infty} [Nt_p - rQ - \alpha]^+ f(D) dD \end{aligned} \quad (10)$$

**定理3** 当决策者要求的  $\alpha < Nt_p - rQ$ , 且  $r - \frac{N}{b} - v \geq 0$  时, 于风险对冲者, 如果  $t_p \geq \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD$ ,

即对冲成本较高,则放弃购买看跌期权. 如果  $t_p < \frac{1}{b} \int_0^Q F(D)dD$ , 则持有  $N^* = b(r - v)$  看跌期权.

**证明** 当  $r - \frac{N}{b} - v \geq 0$ , 即  $N \leq b(r - v)$ , 且当  $\alpha < Nt_p - rQ$ , 则

$$\text{CVaR}_\beta(N, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \left( Nt_p - rQ - \alpha + \left( r - \frac{N}{b} - v \right) \int_0^Q F(D) dD \right).$$

对两变量的一阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N, \alpha)}{\partial \alpha} &= 1 - \frac{1}{1 - \beta}, \\ \frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N, \alpha)}{\partial N} &= \frac{1}{1 - \beta} \left( t_p - \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD \right). \end{aligned}$$

因此, 有下列结论:

当  $t_p \geq \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD$ ,  $\text{CVaR}_\beta(N, \alpha)$  是关于  $N$  的增函数, 为了使  $\text{CVaR}_\beta(N, \alpha)$  值最小,  $N^* = 0$ ;

当  $t_p < \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD$ ,  $\text{CVaR}_\beta(N, \alpha)$  是关于  $N$  的减函数, 为了使  $\text{CVaR}_\beta(N, \alpha)$  值最小,  $N^*$  应取最大值, 即  $N^* = b(r - v)$ . 证毕.

由这个定理当零售商对风险极其厌恶, 或者零售商意识到经济下行风险非常高的情况下, 只要对冲成本  $t_p$  较低时, 将会采取完全对冲策略. 如果经济向下风险较低, 且对冲成本高, 零售商将放弃对冲保值策略.

**定理 4** 当  $r - \frac{N}{b} - v \geq 0$  且  $Nt_p - rQ < \alpha \leq Nt_p - \left( v + \frac{N}{b} \right) Q$ , 为了使  $\text{CVaR}_\beta(N, \alpha)$  值最小, 最优策略为联立方程

$$\begin{cases} \left( t_p + \frac{F^{-1}(1 - \beta) - Q}{b} \right) (1 - \beta) = \frac{1}{b} \int_0^{Q'} F(D) dD \\ Q' = F^{-1}(1 - \beta), \end{cases}$$

其中  $Q' = (Nt_p - (v + N/b)Q - \alpha)/(r - N/b - v)$ .

**证明** 当  $r - N/b - v \geq 0$  且  $Nt_p - rQ < \alpha \leq Nt_p - (v + N/b)Q$  时

$$\text{CVaR}_\beta(N, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_0^{Q'} \left( Nt_p - \left( v + \frac{N}{b} \right) Q - \left( r - \frac{N}{b} - v \right) D - \alpha \right) f(D) dD,$$

其中  $Q' = (Nt_p - (v + N/b)Q - \alpha)/(r - N/b - v)$ .

对两变量求其一阶导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N, \alpha)}{\partial \alpha} &= 1 - \frac{1}{1 - \beta} F(Q') = 0 \Rightarrow Q' = F^{-1}(1 - \beta), \\ \frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N, \alpha)}{\partial N} &= \left( t_p + \frac{Q' - Q}{b} \right) F(Q') - \frac{1}{b} \int_0^{Q'} F(D) dD = 0 \\ &\Rightarrow \left( t_p + \frac{1}{b} F^{-1}(1 - \beta) - Q \right) (1 - \beta) = \frac{1}{b} \int_0^{Q'} F(D) dD, Q' = F^{-1}(1 - \beta). \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

由这个定理显示零售商对目前经济愿意承担部分风险, 表现在决策上就是采取部分对冲策略, 以达到意愿的风险承担. 按照现代投资理论的观点, 即投资者选择合意的风险利润以达到最大化效用.

当  $r - N/b - v < 0$  时, 即  $N > b(r - v)$ , 超过了完全对冲风险所持有的头寸. 这不是套期保值的范畴, 而是投机范畴. 持有超过完全对冲风险的数量就成为市场的投机者, 也与本节讨论的目标相违背. 因此对于  $r - N/b - v < 0$  的情形在此不予讨论.

### 3.2 回购合约中供应商的最优对冲选择

之所以选择供应商作为研究对象, 是因为供应商作为两级供应链的领导者, 能通过提高回购价格激励零售商提高订购量, 从而提高供应链的利润. 随着回购价格的提高, 供应商面临的风险也越高, 所以考虑供应商的风险将是主要的. 根据前文, 假设供应商购买  $N_{bs}$  数量的看跌期权, 期权成本为  $t_p$ , 其中  $N_{bs} \leq b(c_r - v)$ . 其对冲组合损益可写为

$$\begin{aligned} V_{h,br}^T(Q_b) &= b(r - c_r) \left( S_T - \max \left( S_T - \frac{Q_b - a}{b}, 0 \right) \right) + \\ &\quad a(r - c_r) + c_r Q_b + N_{bs} \max \left( \frac{Q_b - a}{b} - S_T, 0 \right) - N_{bs} t_p \\ &= \left( \frac{N_{bs}}{b} + v - c_r \right) [Q_b - D]^+ - N_{bs} t_p, \end{aligned} \quad (11)$$

构造损失函数

$$L(N_{bs}, D) = -V_{h,br}^T(Q_b) = (c_r - v - N_{bs}/b) [Q_b - D]^+ + N_{bs} t_p. \quad (12)$$

条件在值风险函数为

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\beta(N_{bs}, \alpha) &= \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_0^\infty [L(N_{bs}, D) - \alpha]^+ f(D) dD \\ &= \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \left( \int_0^{Q_b} [(c_r - v - N_{bs}/b)(Q_b - D) + N_{bs} t_p - \alpha]^+ f(D) dD + \right. \\ &\quad \left. \int_{Q_b}^\infty [N_{bs} t_p - \alpha]^+ f(D) dD \right). \end{aligned} \quad (13)$$

**定理 5** 当  $\alpha < N_{bs} t_p$ , 且  $t_p \geq \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD$  时,  $N_{bs}^* = 0$ ; 当  $\alpha < N_{bs} t_p$ , 且  $t_p < \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD$  时,  $N_{bs}^* = b(c_r - v)$ .

**证明** 当  $\alpha < N_{bs} t_p$  时, 条件在值风险函数可以写为

$$\text{CVaR}_\beta(N_{bs}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \left( N_{bs} t_p - \alpha + \left( c_r - v - \frac{N_{bs}}{b} \right) \int_0^{Q_b} F(D) dD \right),$$

对两变量求一阶导数为,

$$\frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N_{bs}, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1 - \beta} = 0 \Rightarrow \beta = 0,$$

$$\frac{\partial \text{CVaR}_\beta(N_{bs}, \alpha)}{\partial N_{bs}} = \frac{1}{1 - \beta} \left( t_p - \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD \right).$$

条件在值风险是否最小, 取决于  $t_p - \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD$  的符号, 当  $t_p \geq \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD$  时,  $N_{bs}^* = 0$  使条件在值风险最小, 当  $t_p < \frac{1}{b} \int_0^{Q_b} F(D) dD$  时,  $N_{bs}^* = b(c_r - v)$ . 其管理含义与前文的结论类似, 当供应商对风险厌恶, 或者供应商意识到经济下行风险非常高的情况下, 在对冲成本  $t_p$  较低时, 将会采取完全对冲策略. 如果经济向下风险较低, 且对冲成本  $t_p$  较高, 供应商将放弃对冲保值策略. 证毕.

**定理 6** 当  $N_{bs} t_p \leq \alpha < (c_r - v - N_{bs}/b) Q_b + N_{bs} t_p$  时, 最优对冲策略则满足如下条件

$$\begin{cases} b(1 - \beta) \left( t_p + \frac{Q'_b - Q_b}{b} \right) = \int_0^{Q'_b} F(D) dD \\ F(Q'_b) = 1 - \beta, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $Q'_b = Q_b - \frac{\alpha - N_{bs} t_p}{c_r - v - N_{bs}/b}$ .

**证明** 当  $N_{bs}t_p \leq \alpha < (c_r - v - N_{bs}/b)Q_b + N_{bs}t_p$  时, 条件在值风险函数可以写为

$$CVaR_\beta(N_{bs}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_0^{Q'_b} ((c_r - v - N_{bs}/b)(Q_b - D) + N_{bs}t_p - \alpha) f(D) dD,$$

其中  $Q'_b = Q_b - \frac{\alpha - N_{bs}t_p}{c_r - v - N_{bs}/b}$ .

$$\frac{\partial CVaR_\beta(N_{bs}, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 - \frac{F(Q'_b)}{1-\beta} = 0 \Rightarrow F(Q'_b) = 1 - \beta,$$

$$\frac{\partial CVaR_\beta(N_{bs}, \alpha)}{\partial N_{bs}} = \frac{1}{1-\beta} \left( (t_p + \frac{Q'_b - Q_b}{b}) F(Q'_b) - \frac{\int_0^{Q'_b} F(D) dD}{b} \right) = 0$$

$$\Rightarrow b(1-\beta) \left( t_p + \frac{Q'_b - Q_b}{b} \right) = \int_0^{Q'_b} F(D) dD.$$

证毕.

#### 4 金融对冲与运作对冲间替代关系的讨论

数量弹性合约、期权合约和两阶段订购合约是典型的运作对冲合约. 供应商或零售商通过提供给对方以应对未来情境变化的选择权, 也即所谓的“柔性合约”. 期权合约允许零售商根据现实需求, 购买不超过订购量  $Q$  的任何数量, 当实际需求减少, 零售商购买数量就少. 数量弹性合约提供一个选择订购量的区间  $[(1-\beta)Q, (1+\alpha)Q]$ . 两阶段订购则允许零售商根据实际需求进行二次采购. 这些合约都是为了应对未来需求的变动, 或称为“风险”, 但是这类合约如同金融市场的远期合约, 具有优势也存在劣势. 虽然合约可以根据需要灵活签订, 但存在违约风险.

批发价格合约是市场上普遍存在的合约, 也被证明在单期两极供应链中因存在“双边化效应(double marginalization)”而不具备协调供应链的作用. 对于批发价格合约被广泛接受的原因易被接受的观点是, 由于签约成本高昂(包括违约成本)导致使用最简单的合约. 本节试图证明由于金融对冲的存在, 对柔性合约具有替代作用. 因金融工具是标准化合约, 没有违约风险、交易成本低廉而大受青睐. 因此, 批发价格合约可能因金融对冲的存在, 也能如同其它协调合约一样提高订购量, 使其同样具有“协调作用”.

**定理 7** 对于风险规避和风险中性的零售商, 金融对冲的存在提高了其最优订购量.

**证明** 设零售商的确定性等价系数为  $e$ .  $e = 0$  为风险中性,  $e > 0$  为风险规避决策者. 零售商主要回避订购过剩风险. 其它变量设定同上, 则零售商的预期利润为

$$E[\pi_r(Q, N)] = r \min(Q, D) + \left( v + \frac{N}{b} \right) (Q - D)^+ - Nt_p - wQ, \quad (15)$$

期望效用为

$$E[U(Q, N)] = Q(r - w) - Nt_p - (1 + e) \left( r - v - \frac{N}{b} \right) \int_0^Q F(D) dD. \quad (16)$$

因  $(Nt_p - (v + N/b)Q - \alpha)/(r - N/b - v) = F^{-1}(1 - \beta)$ ,  $N = A + BQ^\gamma$  ( $A > 0, B > 0, 0 < \gamma < 1$ ), 拉格朗日函数为

$$L(N, \lambda) = E[U(Q, N)] + \lambda(N - A - BQ^\gamma). \quad (17)$$

对式(16)关于  $Q$  和  $N$  求一阶偏导, 得

$$\frac{\partial E[U]}{\partial Q} = (r - w) - (1 + e)(r - v - N/b)F(Q), \quad \frac{\partial E[U]}{\partial N} = \frac{(1 + e)}{b} \int_0^Q F(D) dD - t_p,$$

二阶偏导分别为  $\frac{\partial^2 E[U]}{\partial Q^2} = -(1 + e) \left( r - v - \frac{N}{b} \right) f(Q)$ ,  $\frac{\partial^2 E[U]}{\partial N^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 E[U]}{\partial Q \partial N} = \frac{(1 + e)}{b} F(Q)$ , 其加边



海塞矩阵为

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma BQ^{\gamma-1} & 1 \\ -\gamma BQ^{\gamma-1} & -(1+e)(r-v-N/b)f(Q) & \frac{(1+e)}{b}F(Q) \\ 1 & \frac{(1+e)}{b}F(Q) & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

则加边海赛行列式为

$$\det(\bar{H}) = \frac{2(1+e)}{b}F(Q)(-\gamma BQ^{\gamma-1}) + (1+e)\left(r-v-\frac{N}{b}\right)f(Q).$$

当  $\left(r-v-\frac{N}{b}\right)f(Q) > \frac{2}{b}F(Q)\gamma BQ^{\gamma-1}$  时,  $\det(\bar{H}) > 0$ , 则期望效用函数存在最大值, 即当

$$(r-w) - (1+e)\left(r-v-\frac{N}{b}\right)F(Q^*) = 0,$$

最优订购量满足  $F(Q^*) = \frac{r-w}{(1+e)\left(r-v-\frac{N}{b}\right)}$ .

由最优订购量  $Q^* = F^{-1}\left(\frac{r-w}{(1+e)\left(r-v-\frac{N}{b}\right)}\right)$  可知,

1) 当  $e = 0$  时, 决策者是风险中性, 存在对冲风险的情形下, 设其最优订购量为

$$Q_{hn}^* = F^{-1}\left(\frac{r-w}{r-v-N/b}\right) > F^{-1}\left(\frac{r-w}{r-v}\right) = Q_n^*,$$

$Q_n^*$  为不存在金融对冲情形下的批发价格最优订购量. 从上式可明显看出, 对于风险中性决策者, 金融对冲的存在, 提高了最优订购量;

2) 当  $e > 0$  时, 决策者为风险规避者, 存在对冲风险的情形下, 设其最优订购量为

$$Q_{ha}^* = F^{-1}\left(\frac{r-w}{1+e}\right)(r-v-N/b) > F^{-1}\left(\frac{r-w}{(1+e)(r-v)}\right) = Q_a^*,$$

其中  $Q_a^*$  为不存在金融对冲情形下风险规避零售商的最优订购量. 因此, 可以认为对于风险规避的零售商, 存在金融对冲情形下, 最优订购量得以提高. 证毕.

运作对冲策略可以激励零售商提高订购量, 降低双边效应, 从而达到供应链的协调. 同样, 金融对冲也可以起到同样的效果. 所以, 从另一个侧面也证明了批发价格合约为何仍能在市场上大行其道的原因, 那就是存在金融对冲的手段.

## 5 数值实验

设  $a = -600, b = 0.2, r = 100, w = 80, c = 50, v = 20, t_p = 8$ , 需求分布假设为  $[0, 1000]$  的均匀分布, 则按批发价格合约, 在不考虑短缺成本的情况下, 订购量应为  $Q^* = F^{-1}\left(\frac{r-w}{r-v}\right) = 250$ , 集中供应链下的订购量为  $Q^0 = F^{-1}\left(\frac{r-c}{r-v}\right) = 650$ . 回购合约中为达到完美协调, 回购价  $c_r^* = 68$ . 期权合约中设  $w_e = 70$ , 则达到完美协调的期权价格为  $w_o = 11.25$ . 下面数值实验将以批发价格合约、回购合约、期权合约为例说明金融对冲.

根据定理 7 的证明, 得出  $N = (\alpha + F^{-1}(1-\beta)(r-v) + vQ) / \left(t_p + \frac{F^{-1}(1-\beta) - Q}{b}\right) = \frac{6000 + 20Q}{4758 - 5Q}$ , 令  $e = 0$ , 即中性时, 则  $Q^* = 562.54, N^* = 8.87$ . 相关的系统利润和不同的风险偏好见表 1. 从表 1 数据可以

发现,当零售商越对风险规避,表现为要求的确定性等价系数提高( $e$  越来越高),主要采取购买较多可供对冲的期权,提高采购量,整个系统利润提高.这非常接近现实情况,即,决策者都是风险规避的,合约签订者多为批发价格合约.此时零售商的行为似乎与直觉相反,一般是零售商越害怕风险,订购量越低.这是在没有风险对冲机制的情况下的表现.当零售商能够通过金融市场花少许成本,就能对冲经济风险,相当于买了保险,此时零售商在利润的驱动下提高了采购量.虽然采购量提高,利润风险提高,但通过金融对冲机制,降低利润风险.因此看似反常的行为,却存在内在合理机制.

表1 批发价格合约的最优订购和最优对冲策略  
Table 1 The optimal ordering and hedging policies

$e$	$Q^*$	$N^*$	$\Pi_s$	$\Pi_r$	$\Pi_{sc}$
0.0	562.54	8.87	16 876.2	5 539.1	22 415.3
0.2	606.04	10.49	18 181.2	6 977.5	25 158.7
0.4	627.19	11.43	18 815.7	7 958.1	26 773.8
0.6	640.31	12.08	19 209.3	8 691.6	27 900.9

存在金融对冲的情况下,批发价格合约零售商按集中供应链下最优订购量  $Q^0 = 650$  订购,图3是定理4中符合条件  $\alpha$  下的  $CVaR(N, \alpha)$  函数.图3(a)在假定  $\alpha = -70\,000, t_p = 8, \beta = 0.05$  时的函数关系,函数图表现为凹函数,存在最小条件风险值.图3(a)和图3(b)是在期权费用分别为8和160下的图形,表现出期权费用越高,对冲的期权数量下降,对冲风险的效果也降低.图3中(a), (c), (d)在不同的  $\alpha$  值下的条件风险函数图,表现为  $\alpha$  值越高,即零售商对风险越厌恶,购买期权数量越多,而且对冲效果越明显,对于风险厌恶程度较低的情形,期权对冲效果不明显,这从图3(c)和图3(d)对比可以明显看出两个极端的差别.

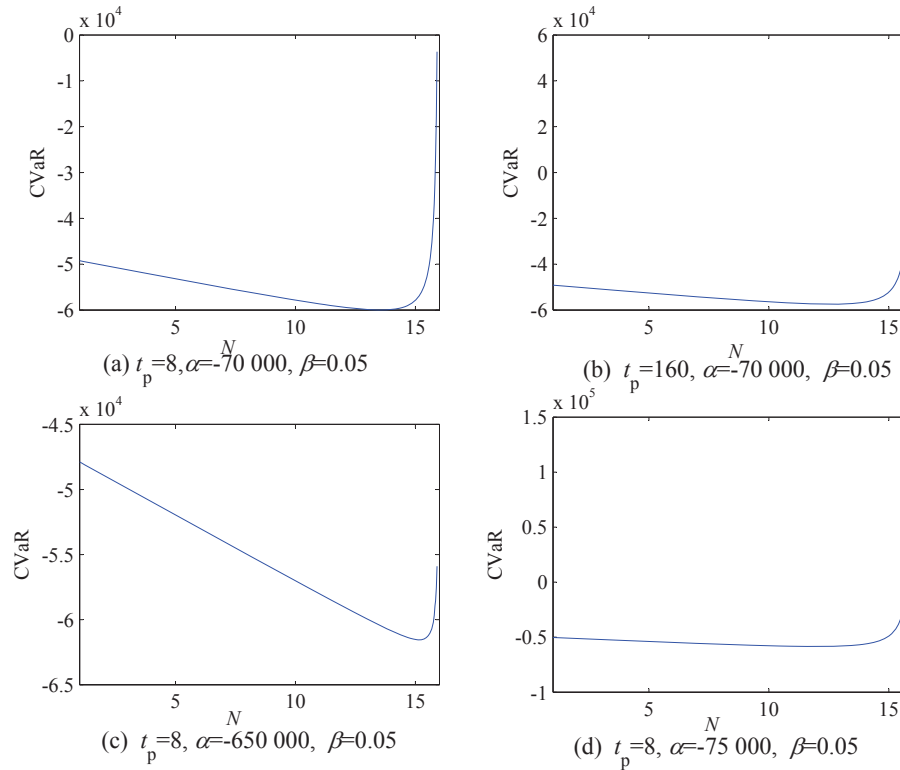


图3 批发价格合约零售商不同风险约束和不同期权费的条件在值风险函数图

Fig. 3 CVaR function of the retailer with wholesale price contracts in different risk and different option value

对定理3的情形,设  $\alpha = -80\,000$ , 当  $t_p = 8 < \frac{1}{b} \int_0^Q F(D)dD = 1\,055.25$  时,条件风险函数图见图4(a),从图上可以看出,条件风险值取最小应在右边界,即  $N^* = 16$ ,这与定理3相符.当  $\alpha = -70\,000, t_p =$

$1200 > \frac{1}{b} \int_0^Q F(D)dD = 1055.25$  时, 条件风险函数图见图 4(b), 从图 4(b) 可看出, 条件风险最小应取在  $N^* = 0$  处, 即期权费用很高时, 放弃对冲是最优策略。

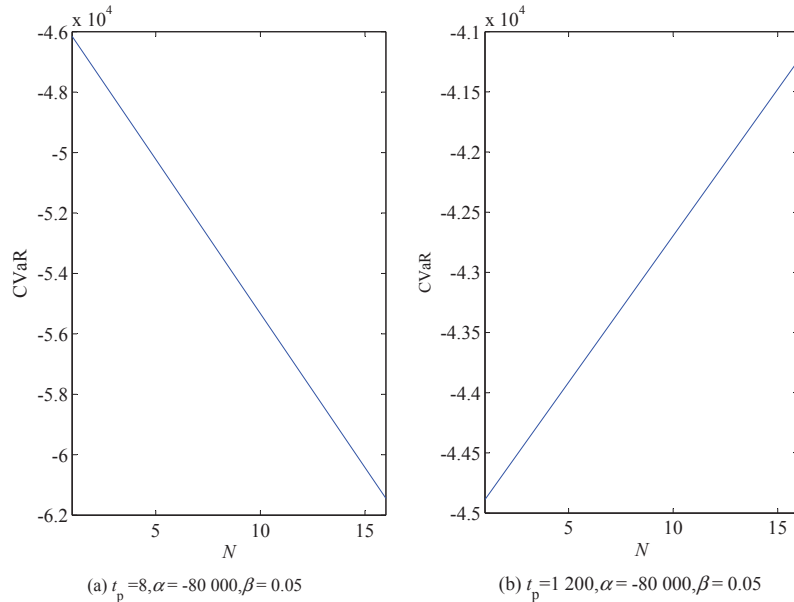


图 4 批发价格合约零售商不同期权费的最优对冲数量选择

Fig. 4 Optimal hedging volume of the retailer with wholesale price contracts in different option value

图 5 反映了定理 6 的内容. 与定理 4 类似, 回购合约中供应商随  $\alpha$  的变化对 CVaR 函数的影响, 从图中可看出  $\alpha$  越小越接近风险中性,  $\alpha$  越小, 随着对冲数量的增加, CVaR 值变化很小.  $\alpha$  较大时, 表示风险厌恶程度高, 对冲效果非常明显, 如图 5(c), CVaR 值降低明显。

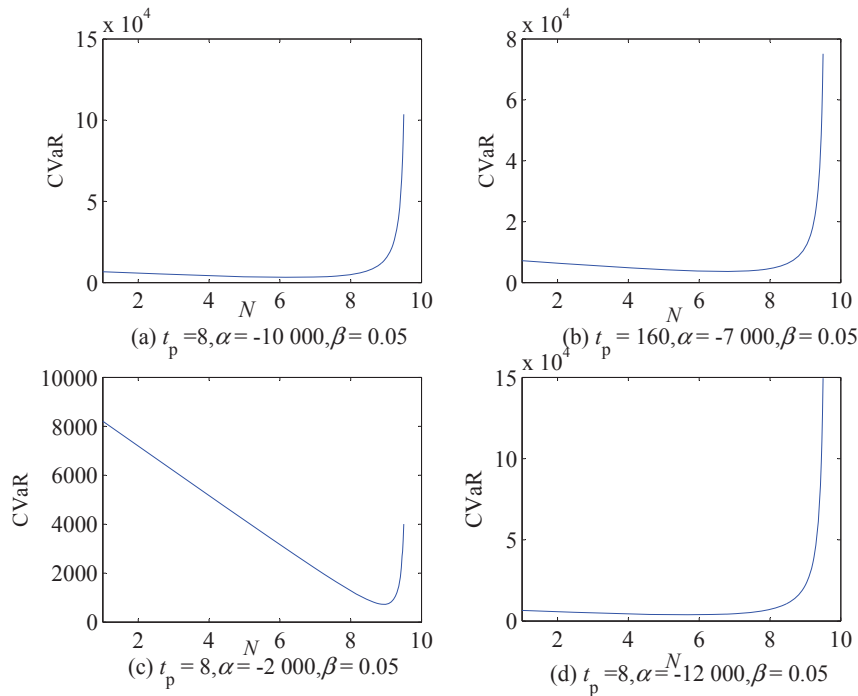


图 5 回购合约供应商不同风险约束的条件在值风险函数图

Fig. 5 CVaR function of the supplier with buyback contracts in different risk

图 6 反映期权费对回购合约供应商的影响, 与定理 5 对应. 当  $\alpha = -1\,000$  时, 回购合约供应商对风险非

常厌恶, 只要  $t_p = 8 < \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD = 976.6$ , 最优对冲策略是购买  $N_b^* = 9.6$  (见图 6(a)), 否则, 当  $t_p > \frac{1}{b} \int_0^Q F(D) dD = 976.6$ , 期权费用很高, 才会放弃对冲策略 (见图 6(b)), 表示为期权费较高, 决策者放弃对冲风险的情况. 图 6(a) 和图 6(b) 与定理 5 的结论一致.

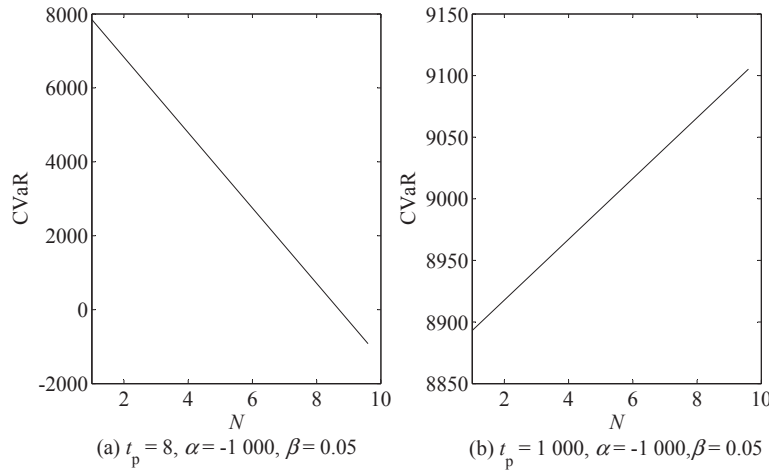


图 6 不同期权费下的回购合约供应商的最优对冲选择

Fig. 6 Optimal hedging volume of the supplier with buyback contracts in different option value

## 6 结束语

本文重要的创新表现在以下两个方面:

(1) 将金融工具与一般的协调合约作比较, 在金融市场与产品市场部分正相关假设下, 得出的重要结论是, 一般协调合约与金融工具在改变决策者的风险特性方面是具有同样功能, 因此二者可以替代使用. 通过对批发价格合约、回购合约的风险特征分析, 结合金融对冲工具, 说明了企业在实际运作中回避风险可以有很多途径. 如果产品很难用金融市场工具对冲风险, 则需要供需双方通过签订分散风险的合约, 如: 回购合约、期权合约和数量弹性合约, 相反, 如果订购的产品可以通过金融市场工具轻松避险, 最简单的批发价格合约就可以通过金融避险工具同样达到提高订购量.

(2) 供应链决策者之间采用合约协调或采用避险工具, 两者不仅具有一定的替代作用, 两者同时也有互补作用. 如柔性合约的签订, 可能使供应链一方避险功能强化, 如回购合约中的零售商, 但供应商的风险没有有效转移, 所以在极端市况下, 运用金融工具回避风险成为必要. 在需求与金融市场正相关的假定下, 运用金融工具对冲风险, 为风险规避的决策者提高利润提供了重要的手段.

本文详细讨论了批发价格合约、回购合约的金融工具避险方法, 证明了对冲组合数量的选择与风险规避程度和避险工具的成本有关. 除此之外文章以批发价格和约论证了金融对冲工具能够协调供应链的作用, 并给出了风险规避者同时决策  $(Q^*, N^*)$  的条件, 其它合约在风险规避的假定下应该有类似结果, 在文中未加讨论. 这个定理的发现也间接证明了为何批发价格合约如此普遍的一个原因, 就是批发价格合约简便易行, 更重要的是在于风险规避的决策者可以通过金融市场有效避险, 从而在利润的驱使下敢于订购或生产较多产品.

## 参考文献:

- [1] Ding Q, Dong L, Kouvelis P. On the integration of production and financial hedging decisions in global markets[J]. Operations Research, 2007, 55(3): 470-489.
- [2] Zhu W, Kapuscinski R. Optimal operational versus financial hedging for a risk-averse firm[DB/OL]. <http://ink.library.smu.edu.sg/lkc->

- sbresearch smu/10, 2007.
- [3] Boyabatli O, Toktay L B. Capacity investment in imperfect capital markets: The interaction of operational and financial decisions[EB/OL]. <http://www.econ.upf.edu/docs/seminars/boyabatli.pdf>, 2006.
- [4] Boyabatli O, Toktay L B. The interaction of technology choice and financial risk management: An integrated risk management perspective[EB/OL]. [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=947451](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=947451), 2006.
- [5] Cohen M A, Mallik S. Global supply chains: Research and applications[J]. *Production and Operation Management*, 1997, 6(2): 193–210.
- [6] Kogut B, Kalatilaka N. Operating flexibility, global manufacturing and the option value of a multinational network[J]. *Management Science*, 1994, 40(1): 123–139.
- [7] Dixit A K. Entry and exit decisions under uncertainty[J]. *Political Economy*, 1989, 97(3): 620–638.
- [8] Dixit A K, Pindyck R S. *Investment under Uncertainty*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [9] Li C L, Kouvelis P. Flexible and risk-sharing supply contracts[J]. *Management Science*, 1999, 45 (10): 1378–1398.
- [10] Van Mieghem J A. Risk mitigation in newsvendor networks: Resource diversification, flexibility, sharing, and hedging[J]. *Management Science*, 2007, 53(8): 1269–1288.
- [11] 叶飞, 林强, 李怡娜. 基于 CVaR 的“公司 + 农户”型订单农业供应链协调契约机制[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 13(3): 450–460.  
Ye Fei, Lin Qiang, Li Yina. Supply chain coordination for “company+farmer” contract farming with CVaR criterion[J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2011, 13(3): 450–460. (in Chinese)
- [12] Anvari M. Optimality criteria and risk in inventory models: The case of the Newsboy Problem[J]. *The Journal of the Operational Research Society*, 1987, 38(7): 625–632.
- [13] Caldentey R, Haugh M B. The Martingale Approach to Operational and Financial Hedging[EB/OL]. <http://pages.stern.nyu.edu/rcaldent/papers/Presentation-Duke.pdf>, 2005.
- [14] Cohen M A, Mallik S. Global supply chains: Research and applications[J]. *Production and Operation Management*, 1997, 6(2): 193–210.
- [15] Kouvelis P. Global sourcing strategies under exchange rate uncertainty[J]. *Quantitative Models for Supply Chain Management*, 1999, 625–668.
- [16] Gaur V, Seshadri S. Hedging Inventory Risk through market instruments[J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2005, 7(2): 103–120.
- [17] Chod J, Rudi N, Van Mieghem J A. Operational flexibility and financial hedging: Complementarity or substitutes[J]. *Management Science*, 2010, 56(6): 1030–1045.
- [18] Caldentey R, Haugh M. Optimal control and hedging of operations in the presence of financial markets[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2006, 31(2): 285–304.
- [19] Chen X, Sim M, Levi D S, et al. Risk aversion in inventory management[J]. *Operations Research*, 2007, 55(5): 828–842.
- [20] Zhou J N R. Pricing of over-the-counter hedging contracts for real investments[EB/OL]. <http://www.insead.edu/facultyresearch/faculty/personal/nrudi/documents/Hedging-MS-07302007.pdf>, 2007.
- [21] Chen F Y, Yano C A. Improving supply chain performance and managing risk under weather-related demand uncertainty[J]. *Management Science*, 2010, 56(8): 1380–1397.
- [22] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, et al. Coherent measures of risk[J]. *Mathematical Finance*, 1999, 9(3): 203–228.
- [23] Rockafellar R T, Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2002, 26(7): 1443–1471.

### 作者简介:

程永文(1971—), 男, 安徽肥东人, 博士, 副教授, 研究方向: 物流与供应链管理, Email: cyw3152000@126.com;

周永务(1964—), 男, 安徽庐江人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 物流与供应链管理, Email: zyw666@hotmail.com.