第29卷 第10期 控 制 与 决 策 2014年 10月
Vol. 29 No. 10 Control and Decision Oct. 2014

文章编号: 1001-0920(2014)10-1803-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1133

上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划

邓胜岳[a], 周立前[b], 汪新凡[a]

(湖南工业大学 a. 理学院, b. 计算机与通信学院, 湖南 株洲 412007)

摘 要: 提出并研究了一类上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划模型, 利用结构元理论证明了该模型最优解等价于上层含约束条件的二层多随从线性规划模型最优解, 利用Kuhn-Tucker方法得到了该模型最优解, 并通过数值算例验证了该方法的可行性.

关键词: 二层线性规划; 多随从; 模糊决策变量; 结构元

中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A

Bi-level multiple followers linear programming with upper constraint and fuzzy decision variables

DENG Sheng-yue[a], *ZHOU Li-qian*[b], *WANG Xin-fan*[a]

(a. School of Science, b. School of Computer and Communication, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China. Correspondent: DENG Sheng-yue, E-mail: dsy110@163.com)

Abstract: The bi-level multiple followers linear programming with upper constraint and fuzzy decision variables model is firstly established and investigated, and the model optimal solution is proved to be equivalent to the optimal solution of the bi-level multiple followers linear programming model by using structured element theory. By using the Kuhn-Tucker approach, the optimal solution of the model is proved. Finally, an illustrative numerical example for the bi-level multiple followers linear programming with upper constraint and fuzzy decision variables model is provided to demonstrate the feasibility of the proposed method.

Key words: bi-level linear programming; multiple followers; fuzzy decision variables; structured element

0 引 言

Stackelberg[1]在其不平衡市场经济一书中首次提出了二层规划. 实践表明, 它们能有效处理实际分层管理系统的决策问题. 一般而言, 二层规划模型中上层决策者为领导者、下层决策者为随从, 领导者首先给出一个策略, 然后随从根据领导者的策略在约束条件内采取最优策略并反馈给领导者, 即上层领导者对下层随从子系统通过控制变量实现整个系统的最优化.

一般而言, 在二层规划理论和实践的研究中有2个基本的问题: 一是如何根据实际问题建立二层规划模型; 另一个是如何找到二层规划模型的性质和最优解. 在实际分层决策系统中二层规划有着广泛的应用, 如在工业、农业、金融、交通等领域[2-3]. 由于实际分层系统中资源、成本和需求等一些元素往往波动较大或难以衡量, 研究模糊分层决策系统就十分必要了. 在二层规划问题中, 将系数或变量为模糊数时的二层规划称为模糊二层规划. 例如, Sakawa等[4-5]研究了合作模糊二层规划问题, 在模糊数λ-截集的基础上提出了交互式模糊规划方法来解决这类问题. 与此同时, 一些研究者也应用了模糊集技术有效地解决了模糊二层规划问题, 如Sinha[6]运用模糊数学规划方法解决了模糊多层线性规划问题. 最近, Zhang等[7-8]研究了具有多目标、多随从特征的模糊二层规划问题, 基于隶属函数的模糊集理论提出了相关的算法, 并解决了该类问题. 到目前为止, 模糊二层规划仍然是模糊多层规划的研究热点.

本文提出了上层含约束条件且具有模糊决策变

收稿日期: 2013-08-20; **修回日期:** 2014-02-17.

基金项目: 湖南省教育厅一般项目(14C0350); 湖南省自然科学基金项目(14JJ3127, 13JJ3109); 湖南省教育厅重点项目(13A004); 教育部人文社科项目(12YJA630114).

作者简介: 邓胜岳(1981−), 男, 讲师, 从事模糊多层规划最优化理论及算法的研究; 周立前(1970−), 男, 教授, 博士, 从事生物信息学及最优化理论等研究.

量的二层多随从线性规划模型, 并利用模糊结构元法[9-12]证明了上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划问题等价于经典的二层多随从线性规划问题. 运用 Kuhn-Tucker 方法[13]得到了该问题的最优解, 从而避免了运用模糊 λ 截集理论将模糊二层多随从线性规划问题转化为二层多随从多目标问题[14], 简化了运算, 为解决模糊二层规划问题提供了新方法.

1 模糊结构元表示及结构元加权序

对模糊结构元表示法及其加权序进行如下介绍.

定义 1[9] 设 E 为实数域 R 上的模糊集, 隶属函数为 $E(x)$, $E(x)\in[0,1]$, $x\in R$. 如果 $E(x)$ 满足以下性质: 1) $E(0)=1$. 2) 当 $x\in[-1,0)$ 时, $E(x)$ 为单增右连续函数; 当 $x\in(0,1]$ 时, $E(x)$ 为单减左连续函数. 3) 当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时, $E(x)=0$. 则称 E 为 R 上的模糊结构元.

定义 2[9] 若模糊结构元 E 满足: 1) $\forall x\in(-1,1)$, $E(x)>0$. 2) 当 $x\in[-1,0)$ 时, $E(x)$ 为严格单增; 当 $x\in(0,1]$ 时, $E(x)$ 为严格单减. 则称 E 为正则模糊结构元.

定义 3[9] 若模糊结构元 E 满足 $E(-x)=E(x)$, 则称 E 为对称模糊结构元.

定义 4[10] 设 $\tilde{A}$ 为 R 上的模糊集, $\forall\lambda\in[0,1]$, 记 $A_\lambda=\{x|x\in R,\mu_{\tilde{A}}(x)\geqslant\lambda\}$. 其中: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 为 $\tilde{A}$ 的隶属函数, 称 A_λ 为 $\tilde{A}$ 的 λ-截集; $A_{\hat{\lambda}}=\{x|x\in R,\mu_{\tilde{A}}>\lambda\}$ 为 $\tilde{A}$ 的 λ-强截集; $\tilde{A}$ 为 R 上的凸模糊集, 当且仅当 A_λ 为 R 上的凸集; $\tilde{A}$ 为 R 上的闭模糊集, 当且仅当 A_λ 为 R 上的闭集; $\tilde{A}$ 为正规模糊集, 若存在 $x\in R$, 使得 $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$; $\tilde{A}$ 为 R 上的有界模糊集, 若 $A_{\hat{0}}$ 是有界的.

定义 5[11] 实数域 R 上全体有界闭模糊数记为 $\tilde{N}_c(R)$, 模糊结构元 E 是 R 上的正规凸模糊集, 是一种特殊的模糊数.

引理 1[9] 设 E 为 R 上的任意模糊结构元, 隶属函数为 $E(x)$, 设函数 $f(x)$ 在区间[−1, 1]上是单调有界函数, 且 $x\in R$, 则 $f(E)$ 为 R 上有界闭模糊数. 反之, 对于给定的正则模糊结构元 E 和任意有界闭模糊数 $\tilde{A}$, 在[−1, 1]上总存在单调有界函数 $f(x)$, 使得 $\tilde{A}=f(E)$, 称模糊数 $\tilde{A}$ 是由 E 生成的.

引理 2[9] 若模糊数 $\tilde{A}=f(E)$, 则 $\tilde{A}$ 的隶属函数为 $E(f^{-1}(x))$, 这里 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 关于变量 x 和 y 的轮换对称函数(若 $f(x)$ 为连续严格单调的, 则 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数).

定义 6[10] 设 $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2\in\tilde{N}_C(R)$, 其结构元表达式分别为 $\tilde{A}_i=f_i(E)$, $i=1,2$. 其中: E 为给定的某个正则模糊结构元, 其隶属函数为 $E(x)$; $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为[−1, 1]上的同序单调函数(具有相同单调性的函数), 则由下式确定的关系 “$\leqslant$” 为 $\tilde{N}_C(R)$ 上的全序, 称为模糊数的结构元加权序:

$$\tilde{A}_1\leqslant\tilde{A}_2\Leftrightarrow$$
$$F(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\int_{-1}^{1}E(x)(f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

引理 3[12] 若三角模糊数 $\tilde{A}=(a,b,c)$, E 为三角模糊结构元, 且表示为

$$E(x)=\begin{cases}1+x,\ -1\leqslant x\leqslant 0;\\ 1-x,\ 0<x\leqslant 1;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

则根据 E 可以得到

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)x+b,\ -1\leqslant x\leqslant 0;\\ (c-b)x+b,\ 0<x\leqslant 1;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

因此 $\tilde{A}=f(E)$.

引理 4[9] 设 E 是对称模糊结构元, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为[−1, 1]上的同序单调函数, 模糊数 $\tilde{A}_1=f_1(E)$, $\tilde{A}_2=f_2(E)$, 则有

$$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2(E),$$
$$\tilde{A}_1-\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2^\tau(E),$$
$$k\tilde{A}_1=|k|f_1^\tau(E).$$

其中: 当 $k\geqslant 0$ 时, $f_1^\tau(E)=f_1(E)$; 当 $k<0$ 时, $f_1^\tau(E)=-f_1(-E)$.

引理 5[9] 设 f 为[−1, 1]上单调有界函数, E 为 R 上给定模糊结构元, 模糊数 $\tilde{A}=f(E)$, 若 f 为[−1, 1]上单调递增函数, $\forall\lambda\in(0,1]$, 模糊数 $\tilde{A}$ 的 λ 截集为 R 上的闭区间 $\tilde{A}_\lambda=[f(E)]_\lambda=[f(E)_\lambda]=f([e_\lambda^-,e_\lambda^+])=[f(e_\lambda^-),f(e_\lambda^+)]$, f 为[−1, 1]上单调递减函数, 则模糊数 $\tilde{A}$ 的 λ 截集为 R 上的闭区间 $\tilde{A}_\lambda=[f(e_\lambda^+),f(e_\lambda^-)]$.

以上引理的详细证明过程参见文献[9-12].

2 上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划模型及算法

2.1 模型和证明

本文考虑上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划模型如下:

$$\begin{cases}\min\limits_{\tilde{x}_i}\tilde{Z}_1^1=\sum\limits_{i=1}^{N}c_i^1\tilde{x}_i+\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}d_{sj}^1\tilde{y}_{sj},\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=1}^{N}a_{ki}\tilde{x}_i+\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}b_{ksj}\tilde{y}_{sj}\leqslant\tilde{e}_k;\\ \min\limits_{\tilde{y}_{sj}}\tilde{Z}_s^2=\sum\limits_{i=1}^{N}c_{si}^2\tilde{x}_i+\sum\limits_{j=1}^{M}d_{sj}^2\tilde{y}_{sj},\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=1}^{N}a_{ti}^s\tilde{x}_i+\sum\limits_{j=1}^{M}b_{tj}^s\tilde{y}_{sj}\leqslant\tilde{e}_t^s.\end{cases}\tag{1}$$

其中: $\tilde{Z}_1^1$ 为上层领导者的目标函数; $\tilde{Z}_s^2$ 为下层第 s 个随从的目标函数; $\tilde{x}_i \geqslant 0$; $\tilde{y}_{sj} \geqslant 0$ 为下层解; $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_{sj}$, $\tilde{e}_k$, $\tilde{e}_t^s \in \tilde{N}_c(R)$; c_i^1, c_{sj}^2, d_{sj}^1, d_{sj}^2, a_{ki}, b_{ksj}, a_{ti}^s, $b_{tj}^s \in R$; $i = 1, 2, \cdots, N$; $j = 1, 2, \cdots, M$; $k = 1, 2, \cdots, K$; $s = 1, 2, \cdots, S$; $t = 1, 2, \cdots, T$.

定理 1　设 $\tilde{Z}_1^1 = G_1^1(E)$, $\tilde{Z}_s^2 = G_s^2(E)$, $\tilde{x}_i = f_i(E)$, $\tilde{y}_{sj} = F_{sj}(E)$, $\tilde{e}_t^s = \psi_t^s(E)$, $\tilde{e}_k = \psi_k(E)$, $M_1^1 = \int_{-1}^{1} E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t$, 如果 E 为正则模糊结构元, $G_1^1(t)$, $G_s^2(t)$, $f_i(t)$, $F_{sj}(t)$, $\psi_t^s(t)$ 和 $\psi_k(t)$ 为同序单调函数, 则模型 (1) 等价于下述模型:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\min_{\int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t} M_1^1 = \\
&\sum_{i=1}^{N} c_i^1 \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t + \\
&\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} d_{sj}^1 \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t. \\
&\text{s.t. } \sum_{i=1}^{N} a_{ki} \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t + \\
&\qquad \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} b_{ksj} \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t \leqslant \\
&\qquad \int_{-1}^{1} E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t; \\
&\min_{\int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t} M_s^2 = \\
&\sum_{i=1}^{N} c_{si}^2 \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t + \\
&\sum_{j=1}^{M} d_{sj}^2 \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t. \\
&\text{s.t. } \sum_{i=1}^{N} a_{ti}^s \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t + \\
&\qquad \sum_{j=1}^{M} b_{tj}^s \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t \leqslant \\
&\qquad \int_{-1}^{1} E(t)\psi_t^s(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

其中: $\int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t$ 是下层问题解; $f_i(-1) \geqslant 0$, $f'_i(t) \geqslant 0$; $F_{sj}(-1) \geqslant 0$, $F_{sj}{}'(t) \geqslant 0$; $i = 1, 2, \cdots, N$; $j = 1, 2, \cdots, M$; $k = 1, 2, \cdots, K$; $s = 1, 2, \cdots, S$; $t = 1, 2, \cdots, T$.

证明　由定义 6 可知, 衡量模糊数 $\tilde{Z}_1^1$ 大小可以比较其所对应的 $M_1^1 = \int_{-1}^{1} E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t$ 的大小. 所以, 模型 (1) 中求解 $\tilde{Z}_1^1$ 的最小化等价于求解 M_1^1 的最小化. 由引理 4 可知

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_1^1 = G_1^1(E) = \\
&\sum_{i=1}^{N} c_i^1 \tilde{x}_i + \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} d_{sj}^1 \tilde{y}_{sj} = \\
&\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| f_i^\tau(E) + \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} |d_{sj}^1| F_{sj}^\tau(E),
\end{aligned}
$$

由结构元理论可知

$$
\begin{aligned}
&M_1^1 = \\
&\int_{-1}^{1} E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t = \\
&\int_{-1}^{1} E(t)\Big[\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| f_i^\tau(t) + \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} |d_{sj}^1| F_{sj}^\tau(t)\Big]\mathrm{d}t = \\
&\int_{-1}^{1} E(t)\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| f_i^\tau(t)\mathrm{d}t + \\
&\int_{-1}^{1} E(t)\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} |d_{sj}^1| F_{sj}^\tau(t)\mathrm{d}t = \\
&\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| \int_{-1}^{1} E(t)f_i^\tau(t)\mathrm{d}t + \\
&\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} |d_{sj}^1| \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}^\tau(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

为了不失一般性, 这里讨论 $\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| \int_{-1}^{1} E(t)f_i^\tau(t)\mathrm{d}t$ 的情况.

由引理 4 可知, 当 $c_i^1 \geqslant 0$ 时, 有

$$
\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| \int_{-1}^{1} E(t)f_i^\tau(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} c_i^1 \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t;
$$

当 $c_i^1 < 0$ 时, 则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| \int_{-1}^{1} E(t)f_i^\tau(t)\mathrm{d}t = \\
&-\sum_{i=1}^{N} c_i^1 \int_{-1}^{1} E(t)(-f_i(-t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因为 E 是对称结构元, 故 $E(-t) = E(t)$, 根据定积分的换元法可以得到

$$
\sum_{i=1}^{N} |c_i^1| \int_{-1}^{1} E(t)f_i^\tau(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} c_i^1 \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t.
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} |d_{sj}^1| \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}^\tau(t)\mathrm{d}t = \\
&\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} d_{sj} \int_{-1}^{1} E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

从而有

$$
M_1^1 = \sum_{i=1}^{N} c_i^1 \int_{-1}^{1} E(t)f_i(t)\mathrm{d}t +
$$

$$\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} d_{sj}^{1}\int_{-1}^{1}E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t.$$

根据相同的方法可以得到

$$M_s^2=\sum_{i=1}^{N}c_{si}^{2}\int_{-1}^{1}E(t)f_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{M} d_{sj}^{2}\int_{-1}^{1}E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t.$$

由引理 3 和引理 4 得到

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ki}\int_{-1}^{1}E(t)f_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}b_{ksj}\int_{-1}^{1}E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^{1}E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ti}^{s}\int_{-1}^{1}E(t)f_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{M}b_{tj}^{s}\int_{-1}^{1}E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^{1}E(t)\psi_t^{s}(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $f_i(t)$ 和 $F_{sj}(t)$ 为单调递增函数, $f_i^{'}(t)\geqslant 0$, $F_{sj}^{'}(t)\geqslant 0$. 由定义 1、引理 3 和引理 5 可知, $E_\lambda=[e_\lambda^-, e_\lambda^+]$. 其中: $e_\lambda^-\in[-1,0]$, $e_\lambda^+\in[0,1]$. $\tilde{x}_i$ 和 $\tilde{y}_{sj}$ 都是模糊数, 假设函数 $f_i(x)$ 和 $F_{sj}(t)$ 在[−1,1]上都是单调递增的函数, 则有

$$(\tilde{x}_i)_\lambda=[f_i(E)]_\lambda=f_i(E_\lambda)=f_i(e_\lambda^-,e_\lambda^+)=[f_i(e_\lambda^-),f_i(e_\lambda^+)],$$

$$(\tilde{y}_{sj})_\lambda=[F_{sj}(E)]_\lambda=F_{sj}(E_\lambda)=F_{sj}(e_\lambda^-,e_\lambda^+)=[F_{sj}(e_\lambda^-),F_{sj}(e_\lambda^+)].$$

所以可以得到

$$f_i(-1)\leqslant f_i(e_\lambda^-)\leqslant f_i(e_\lambda^+)\leqslant f_i(1),$$

$$F_{sj}(-1)\leqslant F_{sj}(e_\lambda^-)\leqslant F_{sj}(e_\lambda^+)\leqslant F_{sj}(1).$$

由 $\tilde{x}_i\geqslant 0, \tilde{y}_{sj}\geqslant 0$ 可得

$$[f_i(-1),f_i(1)]\geqslant 0,\ [F_{sj}(-1),F_{sj}(1)]\geqslant 0.$$

从而有

$$f_i(-1)\geqslant 0,\ F_{sj}(-1)\geqslant 0.$$ □

2.2 算　法

综上所述, 本文算法描述如下.

Step 1: 若模糊数为三角模糊数, 则根据引理 3 可得到 E 的表达式, 并由 $\mu_{\tilde{A}}(t)=E(f^{-1}(t))$ 求出 $f_i(t)$, $F_{sj}(t)$, $\psi_k(t)$, $\psi_i^s(t)$;

Step 2: 计算 $\int_{-1}^{1}E(t)f_i(t)\mathrm{d}t$, $\int_{-1}^{1}E(t)F_{sj}(t)\mathrm{d}t$, $\int_{-1}^{1}E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t$, $\int_{-1}^{1}E(t)\psi_i^s(t)\mathrm{d}t$, 并代入模型 (1);

Step 3: 根据定理 1 将上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划问题 (1) 转化为上层含约束条件的二层多随从线性规划问题 (2), 再根据 Kuhn-Tucker 方法[13]得到模型 (2) 的最优解;

Step 4: 将模型 (2) 的最优解代入模型 (1) 得到该问题的最优解.

2.3 算　例

根据上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划模型, 建立上层为单人单目标, 下层为两人单目标, 且上层领导者和下层随从均有约束条件模型如下:

$$\begin{cases}\min\limits_{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2}\tilde{Z}_1^1=3\tilde{x}_1+8\tilde{x}_2+7\tilde{y}_{11}+11\tilde{y}_{21};\\ \text{s.t. } 5\tilde{x}_1+2\tilde{x}_2-\tilde{y}_{11}+6\tilde{y}_{21}\leqslant\widetilde{40},\\ \qquad 6\tilde{x}_1-\tilde{x}_2+13\tilde{y}_{11}\leqslant\widetilde{15},\\ \qquad \tilde{x}_1+\tilde{x}_2-7\tilde{y}_{21}\leqslant\widetilde{10},\\ \qquad 7\tilde{y}_{11}+4\tilde{y}_{21}\leqslant\widetilde{20}.\\ \min\limits_{\tilde{y}_{11}}\tilde{Z}_1^2=2\tilde{x}_1+\tilde{x}_2-\tilde{y}_{11};\\ \text{s.t. } 5\tilde{x}_1+7\tilde{y}_{11}\leqslant\widetilde{15},\\ \qquad -4\tilde{x}_2+25\tilde{y}_{11}\leqslant\widetilde{3.1}.\\ \min\limits_{\tilde{y}_{21}}\tilde{Z}_2^2=15\tilde{x}_1-\tilde{x}_2+80\tilde{y}_{21};\\ \text{s.t. } 40\tilde{x}_1+\tilde{y}_{21}\leqslant\widetilde{5}.\end{cases}$$

其中: $\tilde{x}_1\geqslant 0, \tilde{x}_2\geqslant 0$ 已给定; $\tilde{y}_{11}\geqslant 0, \tilde{y}_{21}\geqslant 0$ 为下层问题的解; $\widetilde{3.1}=(2.3,3.1,3.3)$, $\widetilde{5}=(4.5,5,5.5)$, $\widetilde{10}=(9,10,11)$, $\widetilde{15}=(13,15,17)$, $\widetilde{20}=(19.5,20,20.5)$, $\widetilde{40}=(37,40,43)$ 为三角模糊数.

解　根据三角模糊数, 设模糊数 $\tilde{x}_1=(\underline{x}_1,x_1,\bar{x}_1)$, $\tilde{x}_2=(\underline{x}_2,x_2,\bar{x}_2)$, $\tilde{y}_{11}=(\underline{y}_{11},y_{11},\bar{y}_{11})$, $\tilde{y}_{21}=(\underline{y}_{21},y_{21},\bar{y}_{21})$.

Step 1　由引理 3 可知, E 为三角模糊结构元, 原问题中三角模糊数对应的有界函数如下:

$$\psi_1(t)=\begin{cases}3t+40,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ 3t+40,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

$$\psi_2(t)=\psi_1^1(t)=\begin{cases}2t+15,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ 2t+15,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

$$\psi_3(t)=\begin{cases}t+10,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ t+10,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

$$\psi_4(t)=\begin{cases}0.5t+20,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ 0.5t+20,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$\psi_2^1(t)=\begin{cases}1.2t+3.1,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ 0.2t+3.1,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$\psi_1^2(t)=\begin{cases}0.5t+5,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ 0.5t+5,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_1(t)=\begin{cases}(x_1-\underline{x}_1)t+x_1,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{x}_1-x_1)t+x_1,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}(x_2-\underline{x}_2)t+x_2,\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{x}_2-x_2)t+x_2,\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_{11}(t)=\begin{cases}(y_{11}-\underline{y}_{11})t+y_{11},\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{y}_{11}-y_{11})t+y_{11},\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_{21}(t)=\begin{cases}(y_{21}-\underline{y}_{21})t+y_{21},\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{y}_{21}-y_{21})t+y_{21},\ 0<t\leqslant 1;\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

Step 2　计算

$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t=40,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}E(t)\psi_1^1(t)\mathrm{d}t=15,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_3(t)\mathrm{d}t=10,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_4(t)\mathrm{d}t=20,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_2^1(t)\mathrm{d}t=30,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)\psi_1^2(t)\mathrm{d}t=5,$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)f_1(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1),$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2),$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)F_{11}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11}),$$
$$\int_{-1}^{1}E(t)F_{21}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21}).$$

$$f_1'(t)=\begin{cases}(x_1-\underline{x}_1),\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{x}_1-x_1),\ 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$f_2'(t)=\begin{cases}(x_2-\underline{x}_2),\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{x}_2-x_2),\ 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$F_{11}'(t)=\begin{cases}(y_{11}-\underline{y}_{11}),\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{y}_{11}-y_{11}),\ 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$F_{21}'(t)=\begin{cases}(y_{21}-\underline{y}_{21}),\ -1\leqslant t\leqslant 0;\\ (\bar{y}_{21}-y_{21}),\ 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$f_1(-1)=\underline{x}_1,\ f_2(-1)=\underline{x}_2.$$
$$F_{11}(-1)=\underline{y}_{11},\ F_{21}(-1)=\underline{y}_{21}.$$

Step 3　根据定理 1, 将 Step 2 计算结果代入原问题, 则原问题等价于下述问题:

$$\begin{cases}\displaystyle\min_{\underline{x}_1,x_1,\bar{x}_1,\underline{x}_2,x_2,\bar{x}_2} M_1^1=\frac{1}{2}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\\ \displaystyle\frac{4}{3}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)+\frac{7}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})+\\ \displaystyle\frac{11}{6}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21});\\ \displaystyle\text{s.t. }\frac{5}{6}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\frac{1}{3}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)-\\ \displaystyle\quad\frac{1}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})+\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21}\leqslant 40,\\ \displaystyle\quad\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1-\frac{1}{6}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)+\\ \displaystyle\quad\frac{13}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})\leqslant 15,\\ \displaystyle\quad\frac{1}{6}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\frac{1}{6}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)-\\ \displaystyle\quad\frac{7}{6}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21})\leqslant 10,\\ \displaystyle\quad\frac{7}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})+\frac{2}{3}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21})\leqslant 20.\\ \displaystyle\min_{\underline{y}_{11},y_{11},\bar{y}_{11}} M_1^2=\frac{1}{3}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\\ \displaystyle\frac{1}{6}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)-\frac{1}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11});\\ \displaystyle\text{s.t. }\frac{5}{6}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\frac{7}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})\leqslant 15,\\ \displaystyle\quad-\frac{2}{3}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)+\frac{25}{6}(\underline{y}_{11}+4y_{11}+\bar{y}_{11})\leqslant 3.\\ \displaystyle\min_{\underline{y}_{21},y_{21},\bar{y}_{21}} M_2^2=\frac{5}{2}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)-\\ \displaystyle\frac{1}{6}(\underline{x}_2+4x_2+\bar{x}_2)+\frac{40}{3}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21});\\ \displaystyle\text{s.t. }\frac{20}{3}(\underline{x}_1+4x_1+\bar{x}_1)+\frac{1}{6}(\underline{y}_{21}+4y_{21}+\bar{y}_{21})\leqslant 5.\end{cases}$$

其中: $\underline{x}_1, x_1, \bar{x}_1, \underline{x}_2, x_2, \bar{x}_2$ 已给定, $\underline{y}_{11}, y_{11}, \bar{y}_{11}, \underline{y}_{21}, y_{21}, \bar{y}_{21}$ 为下层问题的解, 且有 $x_1-\underline{x}_1\geqslant 0, \bar{x}_1-x_1\geqslant 0, x_2-\underline{x}_2\geqslant 0, \bar{x}_2-x_2\geqslant 0, y_{11}-\underline{y}_{11}\geqslant 0, \bar{y}_{11}-y_{11}\geqslant 0, y_{21}-\underline{y}_{21}\geqslant 0, \bar{y}_{21}-y_{21}\geqslant 0, \underline{x}_1\geqslant 0, \underline{x}_2\geqslant 0, \underline{y}_{11}\geqslant 0, \underline{y}_{21}\geqslant 0$.

Step 4　根据 Kuhn-Tucker 方法得到该问题的最

优解, 且最优解为

$(\underline{x}_1, x_1, \bar{x}_1) = (0.043\,1, 0.104\,0, 0.250\,1)$,

$(\underline{x}_2, x_2, \bar{x}_2) = (2.644\,1, 8.038\,5, 35.928\,8)$,

$(\underline{y}_{11}, y_{11}, \bar{y}_{11}) = (0.315\,9, 1.159\,0, 7.084\,2)$,

$(\underline{y}_{21}, y_{21}, \bar{y}_{21}) = (0.072\,6, 0.195\,6, 0.778\,7)$;

$M_1^1 = 111.694\,6, M_1^2 = 10.018\,2, M_2^2 = 11.767\,9$;

$\tilde{Z}_1^1 = (\underline{z}_1^1, z_1^1, \bar{z}_1^1) = (24.292\,0, 74.884\,6, 346.335\,8)$,

$\tilde{Z}_2^1 = (\underline{z}_2^1, z_2^1, \bar{z}_2^1) = (-4.353\,9, 7.087\,5, 36.113\,1)$,

$\tilde{Z}_2^2 = (\underline{z}_2^2, z_2^2, \bar{z}_2^2) = (-29.474\,3, 9.169\,5, 63.403\,4)$.

通过本算例的分析和计算可知, 利用结构元方法能有效地解决上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划问题, 并为模糊二层规划问题的解决提供了新途径.

3 结 论

本文主要讨论了一类具有代表性的模糊二层线性规划问题, 即上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划问题, 利用结构元理论中模糊结构元加权序, 将模糊数的大小比较转化为单调函数的比较, 因而将上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划问题转化为经典的二层多随从线性规划问题, 简化了运算.

参考文献(References)

[1] Stackelberg H V. The theory of the market economy[M]. Oxford: Oxford University Press, 1952.

[2] Bialas M, Karwan M H. Two-level programming[J]. Management Science, 1984, 30(8): 1004-1020.

[3] Kogan K, Tapiero C S. Optimal co-investment in supply chain infrastructure[J]. European J of Operational Research, 2009, 192(1): 265-276.

[4] Sakawa M, Nishizaki I. Uemura Y. Interactive fuzzy programming for multilevel linear programming problems with fuzzy parameters[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 109(1): 3-19.

[5] Sakawa M, Katagiri H, Matsui T. Stackelberg solutions for fuzzy random two-level linear programming through probability maximization with possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 188: 45-57.

[6] Sinha S. Fuzzy programming approach to multi-level programming problems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(2): 189-202.

[7] Zhang G, Lu J, Gao Y. Fuzzy bilevel programming: Multi-objective and multi-follower with shared variables[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16: 105-133.

[8] Lu J, Zhang G, Dillon T. Fuzzy multi-objective bilevel decision making by an approximation Kth-best approach[J]. J Multi-Valued Logic Soft Computing, 2008, 14(3/4/5): 205-232.

[9] 郭嗣琮. 基于模糊结构元理论的模糊分析数学原理[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2004.
(Guo S Z. Principle of mathematical analysis based on structured element[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2004.)

[10] 刘海涛, 郭嗣琮. 基于结构元方法的变量模糊的线性规划[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(6): 94-99.
(Liu H T, Guo S Z. Fuzzy linear programming with fuzzy variables based on structured element method[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 28(6): 94-99.)

[11] 岳立柱, 闫艳, 仲维清. 基于结构元方法的模糊矩阵博弈求解[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(2): 272-276.
(Yue L Z, Yan Y, Zhong W Q. Solution of matrix fuzzy game based on structuring element theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice. 2010, 30(2): 272-276.)

[12] 赵海坤, 郭嗣琮. 全系数模糊两层线性规划[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(3): 98-106.
(Zhao H K, Guo S Z. Bi-level linear programming with all-coefficient-fuzzy[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2010, 24(3): 98-106.)

[13] Jie Lu, Chenggen Shi, Guangquan Zhang. On bilevel multi-follower decision making: General framework and solutions[J]. Information Sciences, 2006, 176(11): 1607-1627.

[14] 付永红, 杜纲. 具有模糊系数的两层线性规划[J]. 管理科学学报, 1999, 2(1): 42-49.
(Fu Y H, Du G. Bilevel linear programming with fuzzy coefficients[J]. J of Management Sciences in China, 1999, 2(1): 42-49.)

(责任编辑: 闫 妍)