

## 基于非配置点部分误差控制联立方法的编队卫星队形重构

陈伟锋<sup>1</sup>, 邵之江<sup>2</sup>

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023; 2. 浙江大学

a. 工业控制技术国家重点实验室, b. 工业控制研究所, 杭州 310027)

**摘要:** 针对编队卫星队形重构问题, 提出一种基于非配置点部分误差控制的联立方法. 首先采用基于 Radau 配置点的拉格朗日插值多项式对微分代数方程组进行离散化处理; 然后引入非配置点, 要求避撞条件在非配置点处严格满足, 但不对状态变量在非配置点处的误差估计进行控制, 从而降低离散化后得到的非线性规划命题的求解难度; 最后对 3 颗编队卫星的队形重构问题进行测试和仿真并与相应文献中的结果进行了比较, 数值实验结果表明该方法具有更高的求解精度和求解效率.

**关键词:** 卫星编队飞行; 队形重构; 最优控制; 联立法; 非配置点

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Simultaneous approach with partial error control on non-collocation points based satellite formation reconfiguration

CHEN Wei-feng<sup>1</sup>, SHAO Zhi-jiang<sup>2</sup>

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China; 2a. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, 2b. Institute of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. Correspondent: SHAO Zhi-jiang, E-mail: zjshao@iipc.zju.edu.cn)

**Abstract:** A simultaneous approach with partial error control on non-collocation points for formation reconfiguration of satellite formation flying is proposed. Firstly, Radau collocation points based Lagrange polynomials are utilized to discretize the group of differential algebraic equations. Non-collocation points are introduced. The collision avoidance conditions are required to be satisfied on the non-collocation points, while the error estimation of state variables are not. Then, solving difficulty of the nonlinear programming problem obtained by discretizing is reduced. Finally, the formation reconfiguration problem of three formation-flying satellites is demonstrated and simulated. The comparisons are made with the results in the related reference. The numerical results show that the proposed approach is more accurate and efficient.

**Key words:** satellite formation flying; formation reconfiguration; optimal control; simultaneous approach; non-collocation points

## 0 引言

随着人类航天活动的逐渐深入, 探测任务复杂程度的逐步提高, 对单颗卫星的分辨率和覆盖能力的要求也越来越高, 致使卫星的研制难度增加并呈现大型化和复杂化的发展趋势, 进而导致卫星成本的大幅度增加和安全性的降低. 卫星编队飞行是 21 世纪航天领域具有重要战略意义的关键技术之一<sup>[1]</sup>. 卫星编队飞行系统可通过若干颗低成本、高可靠性的小型卫星的数目增减以及队形重构来代替单颗大型卫星完成特定的任务, 相比于单颗大型卫星而言, 其具有更强

的功能性和更好的鲁棒性<sup>[2-3]</sup>.

卫星编队飞行任务分为行星轨道环境飞行任务和深空环境飞行任务, 二者都存在队形重构问题<sup>[4]</sup>. 当编队卫星的任务发生变化时, 需要通过队形重构来改变编队卫星的几何布局以满足任务的要求. 队形重构过程中最重要的问题是如何防止碰撞以及精确地达到指定的状态(包括位置、速度等), 并在此基础上考虑诸如燃料消耗或者能量消耗、重构时间等性能指标<sup>[4]</sup>. 为保证队形重构的在线运行, 要求算法能够快速规划出各个卫星的重构路径. 卫星队形重构是实

收稿日期: 2013-08-26; 修回日期: 2013-12-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203132).

作者简介: 陈伟锋(1984—), 男, 讲师, 博士, 从事飞行器轨迹规划等研究; 邵之江(1970—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂过程系统控制与优化等研究.

现和推行卫星编队飞行的核心技术手段。

国内外很多学者对最优队形重构问题做了不少研究工作. Richards 等<sup>[5]</sup>基于线性化的动力学方程将整个规划时域离散成多个时间步,在每一个时间步上要求满足线性化的动力学方程以及避撞条件,最终采用混合整数线性规划求解燃料消耗最小问题.由于采用了线性化的动力学模型,所得解的精度有待于提高,并且在时间步之间,避撞条件不一定能够满足. Junge 等<sup>[6]</sup>将避撞条件利用罚函数进行转换,直接将燃料消耗函数和罚函数进行加和,进而采用一阶变分条件将队形重构问题转变成两点边值问题进行求解,但没有考虑采用罚因子在燃料消耗函数与罚函数之间做出一个平衡以确保避撞条件的满足,所求得解的精度难以保证. Sultan 等<sup>[7]</sup>在队形重构中设置若干个航路点,假设每两个航路点之间的轨迹可以用分段三次多项式来表示并且是一次连续可微的,离散化后得到的问题具有拟二次结构,并利用这种结构设计了基于梯度的算法进行求解. Hwang 等<sup>[8]</sup>在 Sultan 的基础上利用线性化的 Hill 动力学方程的解析解来表示相邻两个航路点之间的轨迹,采用基于梯度的算法找到了满足避撞条件的最优航路点,进而得到了整个重构轨迹.以上这两种方法都只能得到一个近似的次优解. Huntington 等<sup>[9]</sup>和黄海滨等<sup>[10]</sup>利用伪谱法将队形重构问题离散化成非线性规划问题,进而采用非线性规划求解器进行求解.黄海滨等的数值结果显示,所得到的解的精度还有改进的空间,并且避撞约束条件也有较大的违反.

伪谱法将状态变量和控制变量在整个优化时域内均看作是时间高阶连续光滑的函数,所采用的节点越多,光滑的阶次越高.而实际上,控制变量有可能是不光滑的甚至是不连续的,这是伪谱法本质上的不足之处.本文主要针对深空环境下编队卫星的队形重构问题进行研究,将队形重构问题表述成最优控制问题,采用联立法对其进行求解,并通过增加非配置点上的避撞约束条件来提高求解的精度.在求得控制变量曲线后,通过积分器进行连续仿真,并与文献[10]中的数值结果进行比较,验证了算法的求解精度和求解效率.

## 1 深空环境下队形重构问题

考察  $M$  颗卫星的队形重构问题.在深空环境下,每颗卫星受到的外部引力十分微弱,可以忽略不计,其主要依靠内部产生的推力来改变自身的运动状态,因此可以采用如下质点模型来描述各颗卫星<sup>[7]</sup>:

$$\dot{r}_i(t) = v_i(t), \dot{v}_i(t) = a_i(t), i = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

其中:  $r_i$  为第  $i$  颗卫星的位置矢量,  $v_i$  为第  $i$  颗卫星的

速度矢量,  $a_i$  为第  $i$  颗卫星的加速度矢量.

假定要在  $0 \sim T$  这段时间内完成队形重构,各颗卫星的初始状态和终端状态为

$$\begin{aligned} r_i(0) &= r_{i0}, v_i(0) = v_{i0}, \\ r_i(T) &= r_{iT}, v_i(T) = v_{iT}, \\ i &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $r_{i0}$  为第  $i$  颗卫星的初始位置矢量,  $v_{i0}$  为第  $i$  颗卫星的初始速度矢量,  $r_{iT}$  为第  $i$  颗卫星的终端位置矢量,  $v_{iT}$  为第  $i$  颗卫星的终端速度矢量.

对于第  $i$  颗卫星,如果采用以质点  $r_i$  为中心,  $R_i$  为半径的球面作为安全边界,则任意两颗卫星之间的避撞条件可表示为

$$\begin{aligned} \|r_i(t) - r_j(t)\|^2 &\geq (R_i + R_j)^2, t \in [0, T], \\ i &= 1, 2, \dots, M-1, j = i+1, \dots, M. \end{aligned} \quad (3)$$

由于卫星自身产生的推力有限,各个方向的加速度存在边界约束条件,即

$$\begin{aligned} |a_{ik}(t)| &\leq A_{ik}, t \in [0, T], \\ i &= 1, 2, \dots, M, k = x, y, z. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}$  为第  $i$  颗卫星在  $x, y, z$  三个方向上的加速度分量;  $A_{ix}, A_{iy}, A_{iz}$  为加速度分量的边界.

衡量重构过程各颗卫星运行轨迹优劣的性能指标主要有重构时间、燃料消耗或能量消耗等.目标函数的选择是以任务为导向的.在深空环境中,为了延长在轨运行时间,燃料消耗或能量消耗是首要考虑的性能指标<sup>[11]</sup>.本文以能量消耗作为性能指标,故将重构问题的目标函数定义为

$$J = \sum_{i=1}^M \mu_i \int_0^T a_i^T(t) a_i(t) dt, \quad (5)$$

其中  $\mu_i$  为权重因子,满足  $\mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^M \mu_i = 1$ .当某颗卫星所储备的能量偏少时,可以考虑加大该卫星的权重因子,减少其在重构过程中的能量消耗.

综上所述,以卫星的各加速度分量为控制变量,编队卫星队形重构问题可表述为如下形式的最优控制命题:

$$\begin{aligned} \min J, \\ \text{s.t. 式(1)~(4)}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 基于非配置点部分误差控制的联立法

### 2.1 联立法

为叙述方便,将命题(6)写成 Mayer 型性能指标的一般最优控制命题形式,即

$$\begin{aligned} \min \varphi(z(t_f)), \\ \text{s.t. } \dot{z}(t) = F(z(t), u(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(z(t), u(t)) &\leq 0, \\ u_L &\leq u(t) \leq u_U, \\ z(0) &= z^0, z(t_f) = z^{t_f}, t \in [0, t_f]. \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $\varphi$  是一个标量目标函数;  $z(t)$  是由微分状态变量组成的向量,  $z(t) \in R^n$ ,  $z^0$  是  $z(t)$  的初始状态,  $z^{t_f}$  是  $z(t)$  的终端状态;  $u(t)$  是由控制变量组成的向量,  $u(t) \in R^l$ ,  $u_U$  和  $u_L$  分别为控制变量的上下边界;  $F$  是  $n$  条微分方程的右边约束;  $G$  是关于状态变量和控制变量的不等式约束方程。

采用联立法将整个时域  $[0, t_f]$  划分为  $N$  段有限元, 在每段有限元  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 上, 采用拉格朗日插值多项式对状态变量和控制变量进行逼近<sup>[12-13]</sup>, 有

$$\begin{cases} z^K(t) = \sum_{j=0}^K l_j(\tau) z_{ij}, \\ u^K(t) = \sum_{j=1}^K \bar{l}_j(\tau) u_{ij}, \tau \in [0, 1], \\ t = t_{i-1} + h_i \tau, h_i = (t_i - t_{i-1}). \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$l_j(\tau) = \prod_{k=0, k \neq j}^K \frac{(\tau - \tau_k)}{(\tau_j - \tau_k)}, \bar{l}_j(\tau) = \prod_{k=1, k \neq j}^K \frac{(\tau - \tau_k)}{(\tau_j - \tau_k)},$$

$K$  为插值的阶次. 由拉格朗日插值基函数的性质可知

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{i-1} + (t_i - t_{i-1})\tau_j, \\ z^K(t_{ij}) &= z_{ij}, u^K(t_{ij}) = u_{ij}. \end{aligned} \quad (9)$$

将式 (8) 和 (9) 代入命题 (7) 的微分方程组, 得到配置方程

$$\begin{aligned} R_i(\tau_j) &= \sum_{k=0}^K \dot{l}_k(\tau_j) z_{ik} - h_i F(z_{ij}, u_{ij}) = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (10)$$

与伪谱法不同的是, 在有限元端点处联立法对控制变量没有额外的约束条件, 即控制变量可以是不连续的. 而微分状态变量在整个时域上是可微的, 故在有限元端点处必须连续, 即

$$z_{i+1,0} = \sum_{j=0}^K l_j(1) z_{ij}, i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (11)$$

至此, 可以得到原最优控制命题 (7) 离散化后的非线性规划命题形式, 即

$$\begin{aligned} \min_{z_{ij}, u_{ij}} &\varphi(z(t_f)). \\ \text{s.t.} &\sum_{k=0}^K \dot{l}_k(\tau_j) z_{ik} - h_i F(z_{ij}, u_{ij}) = 0, \\ &G(z_{ij}, u_{ij}) \leq 0, u_L \leq u_{ij} \leq u_U, \\ &i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, K; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{1,0} &= z^0, z_f = z_{N,K} = z^{t_f}, \\ z_{i+1,0} &= \sum_{j=0}^K l_j(1) z_{ij}, \\ i &= 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2.2 非配置点部分误差控制

关于有限元上的配置点的选择, 若按照 Gauss 点进行配置, 则数值积分的代数精度最高,  $K$  个 Gauss 点能达到  $2K - 1$  阶的代数精度; 若采用  $K$  个 Radau 点进行配置, 则代数精度要比 Gauss 点低一阶, 为  $2K - 2$ . 因基于 Radau 点的离散化命题具有更好的稳定性<sup>[14]</sup>, 故本文采用 Radau 点进行配置。

为了提高求解的精度, Vasantharajan 等<sup>[15]</sup>在有限元上插入非配置点  $\tau_{nc}$ , 要求在非配置点上状态变量的误差估计和约束  $G$  分别满足以下条件:

$$\begin{aligned} \|\bar{C}R_i(\tau_{nc})\| &< \epsilon, \\ G(z_i(\tau_{nc}), u_i(\tau_{nc})) &\leq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\bar{C} = \frac{1}{A} \int_0^{\tau_{nc}} \prod_{j=1}^K (s - \tau_j) ds, A = \prod_{j=1}^K (\tau_{nc} - \tau_j).$$

同时将有限元的长度作为变量与优化命题一起寻优. 这种方法能够在有限元个数较少的情况下提高求解的精度. 但是也存在缺陷: 一方面要求状态变量在非配置点的误差估计以及不等式约束条件满足式 (13), 从而引入大量的方程, 增加了计算量; 另一方面, 有限元的长度的变化对目标函数值的影响不大, 从而导致拉格朗日函数对有限元的长度的 Hessian 矩阵是病态的, 因此增加了优化计算的难度。

编队卫星在重构过程中, 首先考虑的是如何避撞, 也就是要保证避撞约束条件 (3) 的高精度满足, 故本文仅要求在非配置点上满足不等式约束条件, 不对状态变量在非配置点上的误差估计进行控制, 并且让有限元的长度固定, 即非配置点部分误差控制, 从而降低问题的求解难度. 非配置点上的状态变量和控制变量值可由式 (8) 求得. 最终需要求解的非线性规划命题为

$$\begin{aligned} \min_{z_{ij}, u_{ij}} &\varphi(z(t_f)). \\ \text{s.t.} &\sum_{k=0}^K \dot{l}_k(\tau_j) z_{ik} - h_i F(z_{ij}, u_{ij}) = 0, \\ &G(z_{ij}, u_{ij}) \leq 0, \\ &u_L \leq u_{ij} \leq u_U, \\ &i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, K; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & G(z_i^K(\tau_{nc_j}), u_i^K(\tau_{nc_j})) \leq 0, \\
 & i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, L; \\
 & z_{1,0} = z^0, z_f = z_{N,K} = z^{t_f}, \\
 & z_{i+1,0} = \sum_{j=0}^K l_j(1) z_{ij}, \\
 & i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中  $L$  为每个有限元上所加入的非配置点的个数. 本文在每两个相邻的配置点之间等间距地插入  $d$  个非配置点, 故有  $L = K \cdot d$ .

命题 (14) 的求解过程分两步进行. 首先不考虑配置点和非配置点上的不等式条件约束, 得到如下问题:

$$\begin{aligned}
 & \min_{z_{ij}, u_{ij}} \varphi(z(t_f)). \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{k=0}^K \dot{l}_k(\tau_j) z_{ik} - h_i F(z_{ij}, u_{ij}) = 0, \\
 & u_L \leq u_{ij} \leq u_U, \\
 & i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, K; \\
 & z_{1,0} = z^0, z_f = z_{N,K} = z^{t_f}, \\
 & z_{i+1,0} = \sum_{j=0}^K l_j(1) z_{ij}, \\
 & i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)
 \end{aligned}$$

将所有状态变量的初值设为初始状态, 控制变量的初值设为 0, 采用非线性规划求解器可以很容易求得命题 (15) 的解, 然后将这些解作为命题 (14) 的初值再进行求解.

### 3 数值实验

3 颗卫星队形重构的数值实验是基于 Intel(R) Pentium(R) CPU P6100 处理器, 2.00 GHz, 2.00 G 内存的计算机进行的, 所采用的非线性规划求解器是由卡耐基梅隆大学开发的 IPOPT<sup>[16-17]</sup>.

队形重构的时间  $T$  为 10 个单位, 各颗卫星的位置变化和速度变化以单位位置和单位速度进行描述, 3 颗卫星的起始和终端状态为<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned}
 [r_1(0); v_1(0)] &= [0, 0, 0; 0, 0, 0]^T, \\
 [r_1(T); v_1(T)] &= [12, 12, 12; 0, 0, 0]^T; \quad (16a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [r_2(0); v_2(0)] &= [8, 0, 0; 0, 0, 0]^T, \\
 [r_2(T); v_2(T)] &= [0, 12, 12; 0, 0, 0]^T; \quad (16b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [r_3(0); v_3(0)] &= [8, 0, 8; 0, 0, 0]^T, \\
 [r_3(T); v_3(T)] &= [0, 12, 0; 0, 0, 0]^T. \quad (16c)
 \end{aligned}$$

卫星的各加速度分量最大为 1 个单位, 安全边界球面半径为 1 个单位, 因此在队形重构过程中, 任意两个

质点卫星之间的距离应不小于 2 个单位. 3 颗卫星的权重因子均取为 1/3.

将队形重构时间分成 5 个有限元, 每个有限元上采用 2 个 Radau 点进行配置, 故总共有 10 个配置点, 每两个配置点之间插入 10 个非配置点. 先不考虑避撞条件, 将最优控制命题离散成非线性规划命题 (15) 的形式进行求解. IPOPT 的迭代次数为 8 次, 求解时间为 0.032 s, 将所得到的结果作为命题 (14) 的初值. 求解命题 (14) 时, IPOPT 的迭代次数为 44 次, 求解时间为 0.413 s, 故总的计算时间仅为 0.445 s, 远远小于文献 [10] 所需要的计算时间 31.324 s. 各卫星的控制变量曲线如图 1 所示, 每一幅子图为一颗卫星在  $x, y, z$  三个方向的加速度分量曲线.

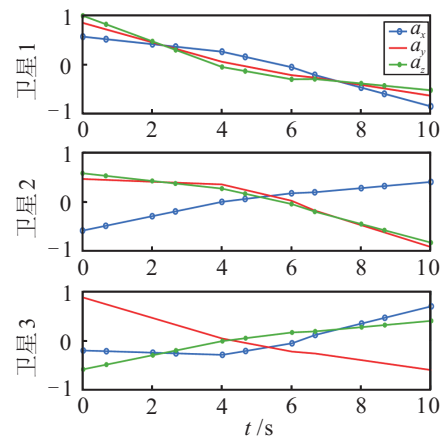


图 1 3 颗卫星队形重构的最优控制曲线

采用 Matlab 下的 ODE45 对求得的控制变量进行连续仿真, 得到 3 颗卫星的队形重构轨迹如图 2 所示. 将仿真得到的各卫星重构轨迹进行碰撞实验, 得到任意两颗卫星之间的距离随时间变化的曲线如图 3 所示. 其中卫星 1 与卫星 2 之间距离曲线以及卫星 2 与卫星 3 之间的距离曲线几乎是完全重合的. 在整个队形重构过程中各颗卫星相互之间的最小距离为 2.005 个单位, 即碰撞约束条件是完全严格满足的, 而文献 [10] 中的碰撞约束却违反了  $1.04 \times 10^{-2}$  个单位. 重构过程的目标函数值为 4.498 4 个单位. 各颗卫星满足终端约束条件的情况如表 1 所示,

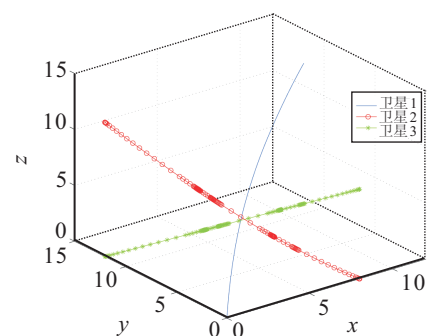


图 2 3 颗卫星的队形重构轨迹

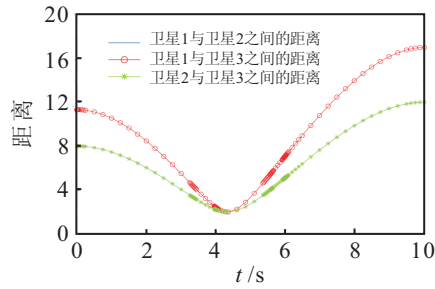


图3 任意两颗卫星之间的距离曲线

表1 3颗卫星队形重构各卫星终端约束条件违反程度

T时刻	$\delta r_x$	$\delta r_y$	$\delta r_z$	$\delta v_x$	$\delta v_y$	$\delta v_z$
卫星1	7.9e-11	6.0e-11	1.1e-10	2.2e-11	1.7e-11	3.5e-11
卫星2	6.0e-11	1.4e-10	7.9e-11	1.7e-11	3.8e-11	2.2e-11
卫星3	1.4e-10	7.5e-11	5.7e-11	3.9e-11	2.1e-11	1.6e-11

从表1可以看出,各卫星精确到达了指定位置且速度为零。

## 4 结 论

卫星编队飞行要求在队形重构过程中严格满足避撞条件,在此基础上考虑重构时间、燃料消耗或能量消耗等性能指标才有意义。本文提出了一种基于非配置点部分误差控制的联立方程,用于求解编队卫星的队形重构问题。采用基于Radau配置点的拉格朗日插值多项式对队形重构问题进行离散化处理,引入非配置点,仅要求避撞条件在非配置点上严格满足,即可保证求解的精度和求解的效率。数值实验表明,与文献[10]的结果相比,本文方法具有更好的避撞效果以及更高的求解精度和求解效率,适合在深空环境下机载在线运行。

## 参考文献(References)

- [1] Beard R W, Lawton J, Hadaegh F Y. A coordination architecture for spacecraft formation control[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2001, 9(6): 777-790.
- [2] Lim H C, Bang H. Adaptive control for satellite formation flying under thrust misalignment[J]. Acta Astronautica, 2009, 65(1/2): 112-122.
- [3] Sabol C, Burns R, McLaughlin C A. Satellite formation flying design and evolution[J]. J of Spacecraft and Rockets, 2001, 38(2): 270-278.
- [4] Scharf D, Hadaegh F Y, Ploen S R. A survey of spacecraft formation flying guidance and control, Part I: Guidance[C]. Proc of American Control Conf. New York: IEEE Press, 2003: 1733-1739.
- [5] Richards A, Schouwenaars T, How J P, et al. Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(4): 755-764.
- [6] Junge O, Ober-Blobaum S. Optimal reconfiguration of formation flying satellites[C]. Decision and Control 2005 and 2005 European Control Conf. New York: IEEE Press, 2005: 66-71.
- [7] Sultan C, Seereram S, Mehra R K. Deep space formation flying spacecraft path planning[J]. Int J of Robotics Research, 2007, 26(4): 405-430.
- [8] Hwang I, Park S, Park C. Collision avoidance algorithm for satellite formation reconfiguration under the linearized central gravitational fields[J]. J of Astronomy and Space Science, 2013, 30(1): 11-15.
- [9] Huntington G T, Rao A V. Optimal reconfiguration of spacecraft formations using the Gauss pseudospectral method[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(3): 689-698.
- [10] 黄海滨, 马广富, 庄宇飞, 等. 基于伪谱法的编队卫星队形重构防碰撞轨迹优化[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 551-556.  
(Huang H B, Ma G F, Zhuang Y F, et al. Optimal trajectory planning for reconfiguration of satellite formation with collision avoidance based on pseudospectral method[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 551-556.)
- [11] Ajorlou A, Moezzi K, Aghdam A G, et al. Two-stage time-optimal formation reconfiguration strategy[J]. Systems and Control Letters, 2013, 62(6): 496-502.
- [12] Betts J T, Huffman W P. Application of sparse nonlinear programming to trajectory optimization[J]. AIAA J of Guidance, Control and Dynamics, 1992, 15(1): 198-206.
- [13] Kameswaram S, Biegler L T. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau points[J]. Computational Optimization and Applications, 2008, 41(1): 81-126.
- [14] Bausa J, Tsatsaronis G T. Dynamic optimization of startup and load-increasing processes in power plants, Part I: Method—Internal combustion engines[J]. J of Engineering for Gas Turbines and Power, 2001, 123(1): 246-250.
- [15] Vasantharajan S, Biegler L T. Simultaneous strategies for optimization of differential-algebraic systems with enforcement of error criteria[J]. Computers and Chemical Engineering, 1990, 14(10): 1083-1100.
- [16] Wachter A, Biegler L T. Line search filter methods for nonlinear programming: Motivation and global convergence[J]. SIAM J on Optimization, 2005, 16(1): 1-31.
- [17] Wachter A, Biegler L T. Line search filter methods for nonlinear programming: Local convergence[J]. SIAM J on Optimization, 2005, 16(1): 32-48.