

# 基于 FA-NSGA 分扭传动系统的均载和轻量化优化设计

付晨曦<sup>1</sup>, 赵 宁<sup>1</sup>, 赵永志<sup>1</sup>, 扶碧波<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 陕西省机电传动与控制工程实验室, 西安 710072;

2. 中国航空工业集团公司 中国航空动力机械研究所 传动技术中心, 湖南 株洲 412002)

**摘 要:** 以提高均载性能和轻量化为目标对某分扭传动系统进行了多目标优化设计. 建立了分扭传动的非线性动力学模型, 通过计算不同输入功率和输入转速下的均载系数, 衡量分扭传动系统均载性能. 以分扭传动系统参数为设计变量, 考虑多工况条件, 建立了以均载系数和质量最小为目标函数的多目标优化模型. 为了提高计算效率, 提出了具有适应值预测机制的非支配排序遗传算法 (FA-NSGA). 利用 3 个基准函数对 FA-NSGA 进行收敛性和有效性的测试. 结果表明: FA-NSGA 对于 3 个测试函数均能获得满意的最优解, 并且都能减少 60% 以上的真实适应值计算次数. 采用 FA-NSGA 对实例进行优化求解, 在得到的 Pareto 最优解中选取了一组满意的设计参数, 该设计结果与参照方案相比均载系数降低了 0.05, 分扭传动系统质量减少了 3.57 kg.

**关键词:** 分扭传动; 均载系数; 适应值预测; 多工况; 多目标优化; 齿轮动力学

**中图分类号:** V231; TH132

**文献标志码:** A

## Load sharing and lightweight optimization design of torque-split transmission system based on FA-NSGA

FU Chen-xi<sup>1</sup>, ZHAO Ning<sup>1</sup>, ZHAO Yong-zhi<sup>1</sup>, FU Bi-bo<sup>2</sup>

(1. Shaanxi Engineering Laboratory for Transmissions and Controls, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Transmission Technology Center, China Aviation Powerplant Research Institute, Aviation Industry Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

**Abstract:** The load sharing characteristics and lightweight were considered as the objectives, so a multi-objective optimization design of torque-split transmission system was conducted. First of all, a non-linear dynamics model of torque-split transmission system was established. Load sharing coefficients under different powers and speeds were calculated to measure load sharing characteristics of torque-split transmission system. Afterwards, a multi-objective optimization model including minimum load sharing coefficient and mass was developed with the torque-split transmission system parameters selected as design variables, and the effects of different working conditions were taken into consideration. In order to improve the solution efficiency, a modified fitness approximation mechanism non-dominated sorting genetic algorithm (FA-NSGA) was promoted. Three benchmark functions were used to test the convergence and effectiveness of FA-NSGA. The test results show that satisfactory optimal solutions in all three test functions are achieved by using FA-NSGA, and more than 60% of the computation times of real fitness can be reduced at the same time. Finally,

a given instance was solved by using FA-NSGA, and the satisfactory design variables were selected from the Pareto optimal solution. Compared with the reference design, the selected one reduces the load sharing coefficient by 0.05, and the mass by 3.57 kg at the same time.

**Key words:** torque-split transmission; load sharing coefficient; fitness approximation; multi-working condition; multi-objective optimization; gear dynamics

White 首次提出了一种多支路齿轮传动系统:分扭传动系统<sup>[1]</sup>,用于替代行星传动应用于先进的直升机主减速器传动系统中. Krantz<sup>[2]</sup> 研究指出,虽然分扭传动相比于行星传动具有很多优点,但是分扭传动的不均载问题更突出. 当传动系统不均载时,某一支路承担的载荷增加,从而影响传动系统的承载能力、增加传动系统的振动和噪声. 因此,分扭传动系统的均载性能是影响传动系统性能的关键因素<sup>[2-3]</sup>.

为了提高多支路齿轮传动系统的均载性能,相关学者做了大量研究<sup>[2-8]</sup>. 其中具有代表性的是 Krantz<sup>[2,5]</sup> 和 Kahraman 等<sup>[6-8]</sup>,他们为了量化研究传动系统的均载性能,提出了基于啮合力的均载系数的概念,来衡量传动系统的均载性能. Krantz<sup>[2]</sup> 研究了分扭传动系统的均载性能,通过求解分扭传动系统动力学方程得到了均载系数,指出加工和制造误差是引起分扭传动系统不均载的主要原因. Kahraman<sup>[6]</sup> 建立了行星传动系统的非线性动力学模型,研究发现工况对行星传动系统的均载系数影响较大,不同工况条件下的均载系数曲线呈非线性.

基于对多支路齿轮传动系统均载性能的研究,主要采用的均载方法包括:弹性均载<sup>[2-3,9]</sup>、浮动均载<sup>[4,6]</sup>和相位角均载<sup>[5,10]</sup>. NASA 的研究人员<sup>[11]</sup>指出现有的均载方法无法满足更高性能齿轮传动系统的均载要求. 上述所有均载方法均是在给定传动系统参数后提出的, Bodas 等<sup>[7]</sup>指出,传动系统的均载性能还受系统参数的影响. 本文在系统设计阶段,考虑通过设计系统参数来提高传动系统的均载性能,该方法可以和现有的均载方法结合使用,进一步提高传动系统的均载性能.

设计系统参数时,对传动性能要求较高的齿轮传动系统(航空、船舶等),在保证某些性能的同时还要求传动系统轻量化<sup>[3,11-12]</sup>. 采用优化算法设计系统参数,是一种有效的手段. Padmanabhan 等<sup>[13]</sup>采用遗传算法,通过优化设计齿轮参数,提高直齿轮副承载能力的同时减轻质量. 秦大同等<sup>[14]</sup>通过优化设计风力发电齿轮传动系统参数,在保证高可靠度的同时降低传动系统质量.

本文建立了分扭传动系统的非线性动力学模型,计算得到不同功率、转速下的均载系数. 为了提高分扭传动系统均载性能同时满足轻量化设计要求,考虑多工况条件,以均载系数和质量最小为目标函数,建立了分扭传动系统多目标优化模型. 采用非支配排序遗传算法 II (NSGA-II) 进行优化,该方法在求解多目标优化问题时,已被证明是一种简便、有效的方法<sup>[15-16]</sup>. 由于优化模型需要进行大量不同工况条件下非线性动力学方程的求解,优化求解时间长,对 NSGA-II 适应值的计算进行改进,建立了具有适应值预测机制的非支配排序遗传算法(FA-NSGA). 通过求解多目标优化模型得到设计参数,提高分扭传动系统性能、降低制造成本.

## 1 分扭传动系统动力学分析

### 1.1 非线性动力学模型

某分扭传动系统如图 1 所示<sup>[2]</sup>,分扭传动系统采用两级传动,输入级一个输入小斜齿轮同时与两个相同的输出大斜齿轮啮合,输出级两个相同的输入小直齿轮同时与一个输出大直齿轮啮合,两根双联齿轮轴将分扭传动系统分为两支路.

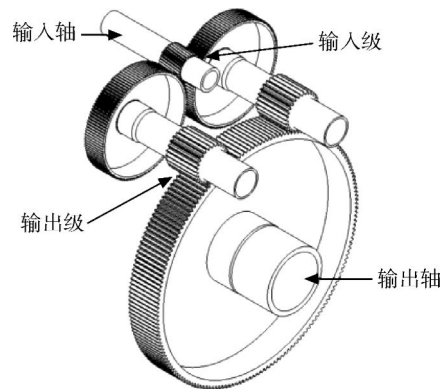


图 1 某分扭传动系统示意图

Fig. 1 Schematic of a torque-split transmission system

如图 2 所示,标记分扭传动系统方位,将分扭传动系统分为左、右(l,r)两支路. 将分扭传动系统中小斜齿轮,左、右大斜齿轮,左、右小直齿轮和

大直齿轮依次标记为1~6.

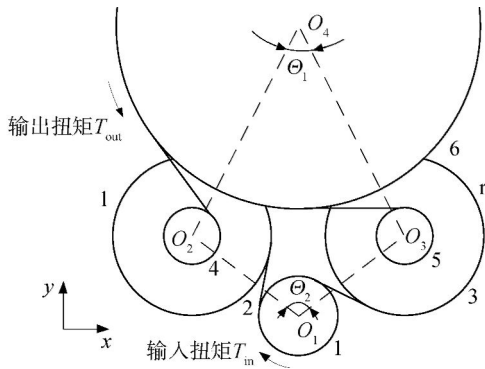


图 2 某分扭传动系统坐标系  
Fig.2 Coordinates of a torque-split transmission system

建立分扭传动系统广义坐标系,以齿轮 2 的形心  $O_2$  指向齿轮 3 的形心  $O_3$  为  $x$  轴正向,以齿轮 1 的形心  $O_1$  指向齿轮 6 的形心  $O_6$  为  $y$  轴正向,以  $x$  轴  $\times$   $y$  轴方向为  $z$  轴正向.为了便于统一建模,分扭传动系统建模过程中将直齿轮视为螺旋角为  $0^\circ$  的斜齿轮.分扭传动系统的广义位移如式(1)所示.

$$\mathbf{x} = [x_1, y_1, z_1, \theta_1, x_2, y_2, z_2, \theta_2, \dots, x_6, y_6, z_6, \theta_6]^T \quad (1)$$

式中  $x_i$  为齿轮  $i$  沿  $x$  向的平动位移,  $y_i$  为齿轮  $i$  沿  $y$  向的平动位移,  $z_i$  为齿轮  $i$  沿  $z$  向的平动位移,  $\theta_i$  为齿轮  $i$  绕  $z$  轴的转动位移,  $i=1\sim 6$ .

为了统一分扭传动系统振动微分方程的量纲,将转动位移  $\theta_i$  转化为切向线位移  $u_i$ ,如式(2)所示.

$$u_i = r_{bi}\theta_i \quad (2)$$

式中  $r_{bi}$  为齿轮  $i$  的基圆半径.

建立分扭传动系统振动微分方程时,首先建立齿轮副的啮合刚度矩阵和方向矢量

$$\mathbf{K}_{m,ij} = k_{m,ij} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{q}_{ij}^T$$

$$\mathbf{q}_{ij} = [\cos \beta_{ij} \sin \varphi_{ij}, -\cos \beta_{ij} \cos \varphi_{ij}, \sin \beta_{ij}, \cos \beta_{ij}, -\cos \beta_{ij} \sin \varphi_{ij}, \cos \beta_{ij} \cos \varphi_{ij}, -\sin \beta_{ij}, -\cos \beta_{ij}]^T \quad (3)$$

式中  $k_{m,ij}$  为齿轮时变啮合刚度,  $\mathbf{q}$  表示各自由度方向的广义位移对接触线法向的投影,  $\varphi_{ij}$  为从  $y$  轴正向到接触线正向(从动轮指向主动轮)逆时针的夹角;  $\beta_{ij}$  为基圆螺旋角.

建立轴的刚度矩阵,包括扭转刚度、弯曲刚度和拉压刚度矩阵,如式(4)~式(6)所示.

$$\mathbf{k}_{m,ij} = k_{m,ij} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{bi}^2} & -\frac{1}{(r_{bi} \cdot r_{bj})} \\ -\frac{1}{(r_{bi} \cdot r_{bj})} & \frac{1}{r_{bj}^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{k}_{b,ij} = k_{b,ij} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{k}_{a,ij} = k_{a,ij} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $k_{s,ij}$ ,  $k_{b,ij}$ ,  $k_{a,ij}$  表示齿轮  $i$  和齿轮  $j$  之间轴的扭转、弯曲和拉压刚度;  $r_{bj}$  为齿轮  $j$  的基圆半径.

再次,分别对齿轮副的啮合刚度矩阵和轴的扭转刚度、弯曲刚度、拉压刚度矩阵进行拼装,拼装方法如下:

$$\mathbf{K}_o = \sum \mathbf{R}_{ij}^T \mathbf{K}_{o,ij} \mathbf{R}_{ij} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{K}_{o,ij}$  ( $o=m, s, b, a$ ) 分别表示啮合刚度矩阵和轴的扭转刚度、弯曲刚度、拉压刚度矩阵,  $\mathbf{R}_{ij}$  为拼装矩阵.

拼装矩阵  $\mathbf{R}_{ij}$  为  $2 \times 6$  的分块稀疏矩阵,各子矩阵维数相同,如式(8)所示.

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_{1i} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_{2j} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{R}_{1i}$ ,  $\mathbf{R}_{2j}$  分别为第 1 行  $i$  列和 2 行  $j$  列的子矩阵;不同刚度矩阵对应拼装矩阵的子矩阵不同.

齿轮副啮合刚度矩阵的拼装矩阵的子矩阵为

$$\mathbf{R}_{1i} = \mathbf{R}_{2j} = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (9)$$

轴的扭转刚度矩阵的拼装矩阵的子矩阵为

$$\mathbf{R}_{1i} = \mathbf{R}_{2j} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (10)$$

轴的弯曲刚度矩阵的拼装矩阵的子矩阵为

$$\mathbf{R}_{1i} = \mathbf{R}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

轴的拉压刚度矩阵的拼装矩阵的子矩阵为

$$\mathbf{R}_{1i} = \mathbf{R}_{2j} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (12)$$

最后得到分扭传动系统的振动微分方程,如式(13)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} - \mathbf{F}(e) - \mathbf{F}(\dot{e}) \quad (13)$$

式中总刚度矩阵  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{xy}$ , 为齿轮副啮合刚度矩阵,轴的扭转刚度、弯曲刚度、拉压刚度矩阵,轴承的支撑刚度矩阵之和;  $\mathbf{C}$  为阻尼矩阵;  $\mathbf{M}$  为质量矩阵;  $\mathbf{F}$  为外载荷矩阵;  $\mathbf{F}(e)$  和  $\mathbf{F}(\dot{e})$  分别为由误差引起的弹性力矩阵和阻尼力矩阵,其表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{F}(e) = \sum \mathbf{R}_{ij}^T(k_{m,ij} e_{ij} \mathbf{q}_{ij}) \\ \mathbf{F}(\dot{e}) = \sum \mathbf{R}_{ij}^T(c_{m,ij} \dot{e}_{ij} \mathbf{q}_{ij}) \end{cases} \quad (14)$$

式中  $e_{ij}$  为齿轮  $i, j$  的法向啮合误差,  $c_{m,ij}$  为齿轮  $i, j$  的啮合阻尼.

齿轮运转时,都存在由于齿侧间隙引起的齿面分离现象.在动力学模型中计入齿侧间隙的影响,对啮合刚度矩阵(式(3))的拼装矩阵(式(8))进行修改,拼装矩阵的子矩阵表达式为

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_j = g_i(\mathbf{x}_{ij}) \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (15)$$

式中

$$g_i(\mathbf{x}_{ij}) = \begin{cases} 0 & -b_{ij} \leq \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij} + e_{ij} \leq b_{ij} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

式中  $\mathbf{x}_{ij}$  为某一对齿轮副广义位移,  $\mathbf{q}_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $b_{ij}$  分别为对应于该对齿轮副的方向矢量、法向啮合误差和法向平均齿侧间隙的一半.

于是,可以得到考虑齿侧间隙的分扭传动系统振动微分方程,如式(16)所示

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} - \mathbf{F}(e) - \mathbf{F}(\dot{e}) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}(b) \quad (16)$$

式中  $\mathbf{G}$  为系数.当  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} + e > b$  时,  $\mathbf{G} = 1$ ; 当  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} + e < -b$  时,  $\mathbf{G} = -1$ .

$$\mathbf{F}(b) = \sum \mathbf{R}_{ij}^T(k_{m,ij} b_{ij} \mathbf{q}_{ij})$$

### 1.2 激励参数分析

齿轮在啮合过程中,齿牙的塑性变形会引起啮合刚度周期性变化,对分扭传动系统形成一种力激励.本文采用法国学者 Velex 等在文献[17]中提出的一种啮合刚度计算方法,计算斜齿轮和直齿轮副啮合刚度,  $t$  时刻齿轮副的啮合刚度可按照式(17)计算.

$$k(t) = \int_{L(t)} k(N) dL \quad (17)$$

式中  $L(t)$  为接触线的总长度,  $k(N)$  为  $N$  点处单位接触线长度的啮合刚度,  $dL$  为接触线长度微元.

加工、制造形成的法向啮合误差对齿轮形成一种周期性的位移激励,通常采用正弦函数表示.

$$e_t = e_0 \sin(\omega t) \quad (18)$$

式中  $e_0$  为法向啮合误差幅值,可根据精度等级进行选取;  $\omega$  为从动齿轮轴旋转频率.

### 1.3 均载性能

参照 Kahraman 在文献[6]中定义非线性分

扭传动系统均载系数的方法,定义均载系数如式(19)所示.均载系数越大,说明分扭传动系统的均载性能越差.

$$k_u = \frac{\max(F_l, F_r)}{T_{in}/(2n_{b,hl})} \quad (19)$$

式中  $F_l, F_r$  为输入小斜齿轮左、右两支路的啮合力;  $T_{in}$  为输入扭矩;  $n_{b,hl}$  为输入小斜齿轮基圆半径.

参照文献[2]给出某分扭传动系统参数如表 1 所示,输入功率为 372.85 kW,输入转速为 8780 r/min,材料为 9310 钢,分扭传动系统并车距(输入小斜齿轮形心与输出大直齿轮形心的距离  $|O_1 O_4|$ ) 为 300.833 mm,安装角  $\Theta_1$  和  $\Theta_2$  (见图 2) 为  $48.4^\circ, 116.28^\circ$ .选取此设计方案为参照与优化结果进行比较.

表 1 某分扭传动系统参数

Table 1 Parameters of a torque-split transmission system

参数	输入级		输出级	
	小齿轮	大齿轮	小齿轮	大齿轮
齿数	32	124	27	176
模数/mm	1.59		2.54	
压力角/ $^\circ$	20		25	
螺旋角/ $^\circ$	6		0	
齿宽/mm	44.45	38.10	66.04	59.94

误差对均载性能的影响不是本文关注的重点,由于分扭传动系统加工完成后存在的加工、制造误差恒定,此处假设:加工、制造引起的右侧斜齿轮副产生的法向啮合误差幅值为 0.02 mm,左侧直齿轮副产生的法向啮合误差幅值为 0.03 mm,不存在其他误差.计算得到在给定输入功率和输入转速波动 50%范围内的均载系数,均载系数等值线图如图 3 所示.

由图 3 可以看出,由于齿侧间隙的存在,分扭传动系统均载性能呈现出一种非线性行为.在给定的工况条件下,分扭传动系统均载系数为 1.918;不同工况条件,分扭传动系统均载系数在 1.512~2.747 之间波动.随着输入功率的增加,分扭传动系统均载系数有所降低,均载性能提高.这是由于输入功率增加引起了分扭传动系统扭矩增加,分扭传动系统齿轮、轴和轴承的变形量增大,抵消了齿侧间隙的影响.

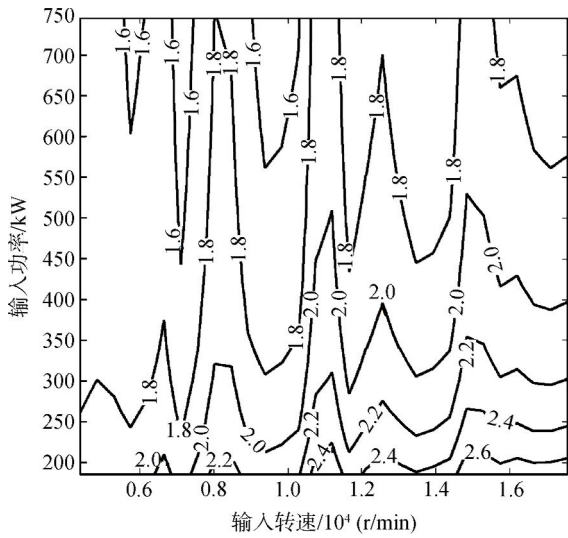


图 3 某分扭传动系统均载系数等值线图  
Fig. 3 Load sharing coefficient isogram of a torque-split transmission system

## 2 优化设计数学模型

### 2.1 目标函数

图 3 表明,不同工况条件下,分扭传动系统均载系数变化较大,并且呈非线性。如果工况条件改变,优化后得到的分扭传动系统参数对应的均载系数可能比优化前大,分扭传动系统的均载性能反而变差。为了解决这个问题,有必要在优化设计时考虑多工况条件。本文考虑最差工况,以给定输入功率、输入转速波动 50% 范围内的最大均载系数为目标。

考虑提高分扭传动系统均载性能和轻量化设计要求,提出分扭传动系统均载系数和质量最小为优化目标函数,如式(20)所示。

$$\begin{aligned} \min Y_1 &= \max k_u \\ \min Y_2 &= M_{ts} = M_g + M_a \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $\max k_u$  为给定输入功率、输入转速波动 50% 范围内的最大均载系数;  $M_{ts}$  为分扭传动系统总质量,  $M_g$  为所有齿轮的总质量,  $M_a$  为所有传动轴的总质量。

在优化设计阶段,精确考虑结构细节以求精确计算质量是不必要的,设计参数的变化能够正确反映质量增减的趋势即可。基于这一原则,本文只对齿轮和传动轴的质量做近似计算。

齿轮质量的计算方式与其轮体结构形式有关,参照文献[18],以齿顶圆大小为设计依据,轮体结构通常采用 3 种不同的形式:实心结构、辐板式结构和轮辐式结构。轮体采用不同结构形式的

根本原因是为了实现轻量化,齿轮的径向尺寸越大,对齿轮的轻量化要求也越迫切。本文引入轻量化系数  $\psi$  来衡量不同轮体结构对实现齿轮轻量化的影响,则齿轮的质量  $M_{gi}$  可由实体质量乘以轻量化系数计算得到,如式(21)所示。

$$M_{gi} = \psi_i M_{gi}^* \quad (21)$$

其中  $M_{gi}^*$  为齿轮  $i$  按实心结构计算的质量。

轻量化系数  $\psi$  的引入使得 3 种结构形式下齿轮的质量计算方法得到统一,而不同结构形式的差异性则通过  $\psi$  的不同取值来体现。

按照文献[18]的设计原则,在 CATIA 软件中进行齿轮的三维参数化建模(其中轮齿部分以分度圆为平均半径进行简化)。建立在 0~1000 mm 范围内一系列齿顶圆直径  $d_{ak}$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) 下的齿轮模型,分别用 CATIA 软件测量其实际质量  $M_{gk}$  ( $k=1,2,3,\dots$ ),并按照式(22)计算各自的轻量化系数  $\psi_k$  ( $k=1,2,3,\dots$ ),将上述结果整理成表。

在优化过程中,对于指定的齿轮  $i$ ,将按照其齿顶圆直径进行查表插值得到对应的轻量化系数  $\psi_i$ 。而齿轮对应的实心结构的质量  $M_{gi}^*$  可按照式(22)计算。

$$M_{gi}^* = \rho \frac{\pi}{4} h \cdot (d^2 - D^2) \quad (22)$$

式中  $\rho$  为材料密度;  $h$  为齿宽;  $d$  为分度圆直径;  $D$  为轴的外径;  $i=1,2,3,4,5,6$ 。

传动轴统一考虑成空心轴进行质量计算。

$$M_{aj} = \rho \frac{\pi}{4} D^2 L_a (1 - \lambda^2) \quad (23)$$

式中  $L_a$  为传动轴的长度,  $\lambda$  为轴的内外径比,  $j=1,2,3,4$ 。

分扭传动系统总质量可按照式(24)进行计算。按照此方法计算得到参照方案分扭传动系统总质量为 38.39 kg。

$$M_{ts} = M_g + M_a = \sum_{i=1}^6 M_{gi} + \sum_{j=1}^4 M_{aj} \quad (24)$$

### 2.2 设计变量和约束条件

一个分扭传动系统包含很多设计参数和技术指标,在其中选择合适的参数作为独立设计变量是优化设计的前提条件。分扭传动系统结构上的自封闭性决定了其特殊的安装条件<sup>[3]</sup>,即分扭传动系统的齿数配比与安装角之间存在确定的关系。当齿数配比与安装角确定,由于并车距的限制,两级齿轮的中心距也随之确定,从而导致齿轮的模数未必能按照标准模数取值。换言之,为了保

证分扭传动系统的正确安装,必须以牺牲齿轮模数的标准性为代价。

基于上述考虑,本文选取的独立设计变量包括:第1级传动比  $i_1$ ,两级大齿轮齿数  $z_{21}$  和  $z_{22}$ ,斜齿轮副螺旋角  $\beta$ ,安装角  $\Theta_1$  和  $\Theta_2$ ,如式(25)所示。

$$\mathbf{X} = [i_1, z_{21}, z_{22}, \beta, \Theta_1, \Theta_2]^T \quad (25)$$

其他分扭传动系统参数由式(26)~式(28)计算得到。

$$i_2 = \frac{i_0}{i_1} \quad (26)$$

$$z_{11} = \frac{z_{21}}{i_1} \quad z_{12} = \frac{z_{22}}{i_2} \quad (27)$$

$$\begin{cases} m_1 = 2H \frac{\cos \beta}{z_{11} + z_{21}} \cdot \frac{\sin(\Theta_1/2)}{\sin(\Theta_1/2 + \Theta_2/2)} \\ m_2 = 2H \frac{1}{z_{12} + z_{22}} \cdot \frac{\sin(\Theta_2/2)}{\sin(\Theta_1/2 + \Theta_2/2)} \end{cases} \quad (28)$$

式中  $m$  为模数;  $i_0$  为总传动比;  $H$  为分扭传动系统并车距;  $z_{11}$ ,  $z_{12}$  为两级小齿轮齿数。

约束条件主要包括:齿轮的齿数的正整数约束、齿轮不发生根切的约束、齿轮的接触强度约束、弯曲强度约束、传动轴的合成强度约束、齿轮径向不干涉约束和等强度约束。

### 3 优化方法

#### 3.1 FA-NSGA

本文优化的目标是提高分扭传动系统均载性能同时实现轻量化,属于多目标优化设计。传统的多目标优化设计问题中,往往采用线性加权的方法将多个优化目标进行统一,使原问题退化成单目标优化。但是由于各目标之间的权值选取具有一定的主观性,采用 NSGA-II 可以避免这样的缺点<sup>[15]</sup>。

此外,本文的优化问题还存在适应值计算非常耗时的特点:需要进行大量不同工况条件下非线性动力学方程的求解,这类问题的优化求解在工程上一般无法接受。

基于上述原因,本文提出了 FA-NSGA,对 NSGA-II 适应值的计算方式进行了改进。FA-NSGA 对部分个体的适应值进行预测而非直接计算真实适应值,因而能够避开耗时的目标函数的计算,一定程度上减少计算消耗。FA-NSGA 的本质在于利用某个个体周围其他个体的适应值预测其本身的适应值,关键在于如何构造预测模型来

控制预测的时机和频率。

#### 3.2 基于可信度的适应值预测模型

##### 3.2.1 可信度及适应值共享半径

对于种群中的每一个个体  $p$ ,都有其对应的适应值  $f_{in}(p)$  以及该适应值的可信度  $R(p)$ 。当  $f_{in}(p)$  是真实计算的适应值时,其可信度  $R(p) = 1$ ; 当  $f_{in}(p)$  是预测的适应值时,其可信度  $0 \leq R(p) < 1$ 。

如图4所示,对于种群中的每一个个体  $p$ ,指定其适应值共享半径  $r_{share}$ ,解空间中到个体  $p$  的无量纲欧氏距离不大于适应值共享半径  $r_{share}$  的区域称作个体  $p$  的适应值共享区域,记作  $\Omega_p$ 。

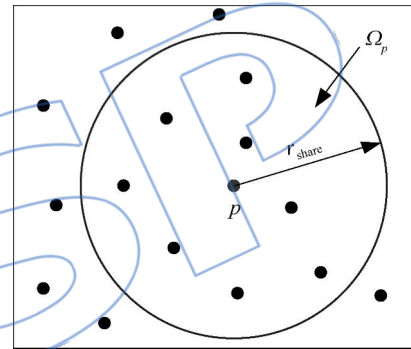


图4 适应值共享区域

Fig. 4 Fitness sharing region

##### 3.2.2 适应值计算方法

假设个体  $p$  的适应值共享区域  $\Omega_p$  中包含  $v$  个其他个体,这  $v$  个个体组成集合  $S = [s_1, s_2, \dots, s_v]$ 。则个体  $p$  的适应值  $f_{in}(p)$  计算方法如下:

按式(29)计算个体  $p$  预测的可信度  $R(p)$ 。

$$R(p) = \sum_{j=1}^v \omega(s_j) \cdot R(s_j) \quad (29)$$

式中  $s_j$  表示  $\Omega_p$  中包含的一个个体,  $R(s_j)$  表示  $s_j$  的可信度,  $\omega(s_j)$  表示  $s_j$  对个体  $p$  可信度的贡献权重。设集合  $S$  中每个个体到个体  $p$  的无量纲欧氏距离分别为  $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_v$ , 则  $\omega(s_j)$  可由式(30)计算得到。

$$\omega(s_j) = \frac{\exp(-\alpha \cdot \bar{d}_j)}{\sum_{k=1}^v \exp(-\alpha \cdot \bar{d}_k)} \quad j = 1, 2, \dots, v \quad (30)$$

式中  $\alpha$  为权重放缩系数。

如图5所示,判断可信度  $R(p)$  是否超过信任阈值  $R^*$ ,若  $R(p) \geq R^*$ ,则按照式(31)预测个体  $p$  的适应值;否则  $R(p) < R^*$ ,计算个体  $p$  的真实

适应值,并将其适应值可信度  $R(p)$  置为 1.

$$f_{in}(p) = \sum_{j=1}^v \tau w(s_j) \cdot f_{in}(s_j) \quad (31)$$

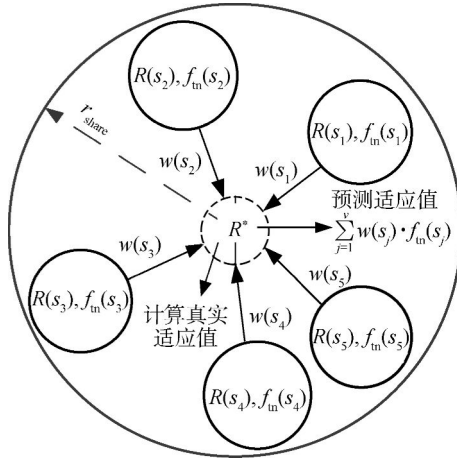


图 5 适应值预测模型

Fig. 5 Fitness approximate model

### 3.2.3 历史种群更新及可信度流失

为了防止历史种群信息的规模过于庞大而导致空间复杂度和计算量的增大,每一代进化完成后,需要剔除冗余的数据,因此引入种群个体冗余度的概念来判别数据是否冗余.数据库中某个个体  $p$  的冗余度  $I_r$  定义为

$$I_r(p) = \sum_{k=1}^n \Delta \bar{x}_k(p) \quad (32)$$

式中  $\Delta \bar{x}_k(p)$  表示在设计空间的第  $k$  维上,个体  $p$  的前一个投影点与后一个投影点的坐标差值(取绝对值).当某个体的冗余度小于给定阈值  $I_r^*$  时,该个体即被剔除.

此外,随着种群的逐代进化,具有预测适应值的个体可信度应该逐渐下降.设具有预测适应值的个体  $p$  在第  $n$  代的可信度为  $R(p, n)$ ,则第  $n+1$  代的可信度  $R(p, n+1)$  可由式(33)更新得到.

$$R(p, n+1) = \gamma \cdot R(p, n) \quad (33)$$

式中  $\gamma$  称作可信度流失速率因子,且  $0 < \gamma < 1$ .

当个体  $p$  的可信度  $R(p, n)$  下降到低于阈值  $R_0$  时,该适应值不再可信,须从历史种群数据库中剔除.

### 3.2.4 适应值预测算法流程

第 1 步:初始化历史种群数据库,初始种群置空,适应值置 0,可信度置 0.

第 2 步:对于个体  $p$ ,划定其适应值共享区域  $\Omega_p$ ,在历史种群数据库中找到  $\Omega_p$  包含的个体的集合  $S$ .

第 3 步:按照式(29)计算个体  $p$  的适应值预测可信度  $R(p)$ ,判断若  $R(p) \geq R^*$ ,则按照式(31)预测个体  $p$  的适应值;否则,计算个体  $p$  的真实适应值,并置其适应值可信度  $R(p)=1$ .

第 4 步:将个体  $p$  添加到历史种群数据库中.

第 5 步:判断当前种群中是否每个个体都已经计算了适应值,是则转第 6 步,否则转第 2 步.

第 6 步:对历史种群数据库进行如下更新:

- ① 计算所有个体的冗余度  $I_r$ ,剔除所有冗余个体;
- ② 对于所有具有预测适应值的个体,按照式(33)更新其可信度  $R$ ,剔除所有不可信个体.

### 3.3 FA-NSGA 的有效性验证

数值实验的目的为:测试 FA-NSGA 的有效性,即测试该算法能多大程度地减少真实适应值的评价次数.采用文献[19]中的 3 个基准函数:Goldstein-Price 函数、six-Hump Camel-Back 函数、Shekel's Foxholes 函数进行测试.每个问题独立运行 20 次,测试结果如表 2 所示.

表 2 FA-NSGA 有效性测试结果

Table 2 Effectiveness test results of FA-NSGA

基准函数	最大计算次数	平均计算次数	平均比例/%
Goldstein-Price 函数	20000	7167.5	35.838
Six-Hump Camel-Back 函数	20000	7560.5	37.803
Shekel's Foxholes 函数	20000	7212.05	36.060

表 2 中“最大计算次数”和“平均计算次数”分别表示真实适应值的最大可能计算次数和实际计算平均次数,“平均比例”表示真实适应值计算的平均比例.

由表 2 可知,本文提出的预测模型可以大大减少真实适应值的计算次数,3 个测试函数分别减少了 64.162%,62.197%,63.940% 的适应值平均计算次数.这意味着,在适应值函数的计算非常耗时的情况下,可以节省大约 2/3 的计算时间.

## 4 优化实例

优化设计时选取参照方案(见表 1)的工况作为给定工况,保证分扭传动系统并车距和总传动比不变,并且采用相同齿轮材料和误差条件.图 6 为计算得到的 Pareto 最优解,图中每一个解(○表

示)的坐标值代表该设计变量对应的两个目标函数值,Δ符号位置为参照方案所对应的两个目标函数值.

优化后得到的 Pareto 最优解,所对应的均载系数分布在 2.010~3.209 之间、质量分布在 33.21~48.79kg 之间.过 Δ 的两条虚线将解集划分为 3 个区域.

区域 a:与参照方案相比,所有 Pareto 最优解所对应的均载系数大、质量小.

区域 b:与参照方案相比,所有 Pareto 最优解所对应的均载系数小、质量小.

区域 c:与参照方案相比,所有 Pareto 最优解所对应的均载系数小、质量大.

本文求解的是多目标优化问题,优化得到的

Pareto 最优解就全体目标函数而言无法比较其优劣<sup>[20]</sup>.从中选 9 个解作为备选方案 1~方案 9,对应设计变量、目标函数及相关重要参数如表 3 所示,图 6 中标出了这 9 个解的大致位置.

多目标优化计算得到 Pareto 最优解后,一般根据设计要求和工程实际经验选取合适的解.此处,选择较参照方案均载系数小、质量小的备选方案 5 作为优化结果.

图 7 为备选方案 5 的均载系数等值线图,可以看出齿面分离造成的非线性行为依然存在,多工况条件下分扭传动系统均载系数在 1.172~2.357 之间.与参照方案相比,分扭传动系统均载系数普遍降低,于是得到了多工况条件下分扭传动系统均载性能和质量均较优的解.

表 3 备选方案 1~方案 9 设计变量、目标函数和相关参数

Table 3 Design variables, objective function and corresponding parameters of alternative case 1 to case 9

项目	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8	方案 9
第 1 级传动比 $i_1$	3.743	3.868	3.765	3.921	3.947	4.054	4.182	4.233	4.233
大斜齿轮齿数	131	147	128	149	150	150	138	127	127
大直齿轮齿数	148	150	154	155	154	150	145	179	131
输入级模数	1.38	1.20	1.35	1.17	1.16	1.16	1.26	1.35	1.34
输出级模数	2.88	2.81	2.79	2.76	2.82	2.93	3.04	2.56	3.68
斜齿轮螺旋角 $\beta/(\circ)$	11.819	19.772	19.912	19.820	19.148	19.156	19.558	19.692	19.784
安装角 $\Theta_1/(\circ)$	43.575	43.569	43.574	43.604	43.703	43.698	43.603	43.578	43.669
安装角 $\Theta_2/(\circ)$	102.337	100.127	104.244	104.490	107.672	111.905	113.984	124.358	138.768
分扭传动系统质量/kg	33.21	33.23	33.39	33.91	34.82	36.70	38.29	42.40	48.79
均载系数	3.209	3.067	2.774	2.490	2.357	2.180	2.127	2.056	2.010

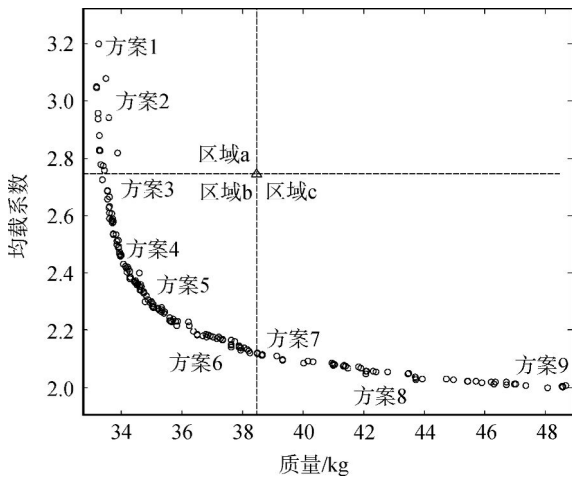


图 6 Pareto 最优解

Fig. 6 Pareto optimal solution

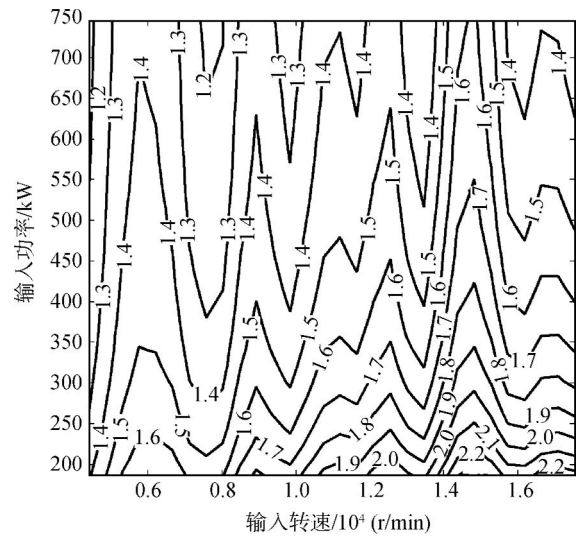


图 7 备选方案 5 均载系数等值线图

Fig. 7 Load sharing coefficient isogram of alternative case 5



## 5 结 论

1) 本文通过对分扭传动系统进行非线性动力学分析,计算得到了不同输入功率、输入转速下的均载系数,进而建立了分扭传动系统多目标优化设计模型,模型中考虑多工况条件,这保证了优化得到的分扭传动系统参数在多工况条件下都具有较优的均载性能。

2) 基于 NSGA-II 提出的 FA-NSGA,使一般工程上无法接受的耗时问题的优化成为可能。

3) 以降低均载系数和质量为目标,考虑多工况条件,采用 FA-NSGA,优化设计得到分扭传动系统参数,提出了一套分扭传动系统多目标优化设计方法,为分扭传动系统设计和进一步提高均载性能、实现轻量化提供参考。

4) 通过设计分扭传动系统参数,能够有效地提高多工况条件下分扭传动系统的均载性能,满足分扭传动系统轻量化设计要求,有利于提高分扭传动系统性能、降低制造成本。

## 参考文献:

- [1] White G. Split torque helicopter transmissions with widely separated engines[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 1989, 203(1): 53-65.
- [2] Krantz T L. Dynamics of a split torque helicopter transmission[R]. NASA TM-106410, 1994.
- [3] Heath G, Bossler R. Advanced rotorcraft transmission (ART) program; final report [R]. NASA CR-191057, 1993.
- [4] 董皓,方宗德,王宝宾,等.基于变形协调和间隙浮动的双路功率分流系统均载特性分析[J]. *航空动力学报*, 2013, 28(4): 872-877.  
DONG Hao, FANG Zongde, WANG Baobin, et al. Load sharing characteristics analysis of power split system based on deflection compatibility and clearance floating[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(4): 872-877. (in Chinese)
- [5] Krantz T L. A method to analyze and optimize the load sharing of split path transmissions [R]. NASA TM-107201, 1996.
- [6] Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmissions[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1151-1165.
- [7] Bodas A, Kahraman A. Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets[J]. *The Japan Society of Mechanical Engineers International Journal; Series C*, 2004, 47(3): 908-915.
- [8] Ligata H, Kahraman A, Singh A. An experimental study of the influence of manufacturing errors on the planetary gear stresses and planet load sharing[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(4): 041701. 1-041701. 9.
- [9] Singh A. Application of a system level model to study the planetary load sharing behavior[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(3): 469-476.
- [10] Krantz T L, Delgado I R. Experimental study of split-path transmission load sharing[R]. NASA TM-107202, 1996.
- [11] Handschuh R F, Zakrajsek J J. Current research activities in drive system technology in support of the NASA rotorcraft program[R]. NASA TM-214052, 2006.
- [12] Savsani V, Rao R V, Vakharia D P. Optimal weight design of a gear train using particle swarm optimization and simulated annealing algorithms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(3): 531-541.
- [13] Padmanabhan S, Ganesan S, Chandrasekaran M, et al. Gear pair design optimization by genetic algorithm and FEA [R]. [S. l.]: *Frontiers in Automobile and Mechanical Engineering*, 2010.
- [14] 秦大同,邢子坤,王建宏.基于动力学和可靠性的风力发电齿轮传动系统参数优化设计[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(7): 24-31.  
QIN Datong, XING Zikun, WANG Jianhong. Optimization design of system parameters of the gear transmission of wind turbine based on dynamics and reliability[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(7): 24-31. (in Chinese)
- [15] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II [C]// *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*. Paris: [s. n.], 2000: 849-858.
- [16] El-Kribi B, Houidi A, Affi Z, et al. Application of multi-objective genetic algorithms to the mechatronic design of a four bar system with continuous and discrete variables[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 61: 68-83.
- [17] Velez P, Houser D R, Bruyère J. Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears; influence of profile modifications[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2011, 133(3): 031010. 1-031010. 11.
- [18] 濮良贵,纪名刚. *机械设计* [M]. 8版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [19] 孙超利. *面向机械系统优化设计的微粒群算法* [M]. 北京: 机械工业出版社, 2012.
- [20] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.