

需求分布不确定条件下的多周期库存鲁棒优化模型

邱若臻, 黄小原, 苑红涛

(东北大学 工商管理学院, 沈阳 110004)

摘要: 在离散需求情景概率不确定的条件下, 建立基于最大最小方法的多周期库存鲁棒优化模型. 考虑需求分布分别隶属于区间和椭球不确定集两种情形, 运用对偶理论将多周期库存鲁棒优化模型转化为易于求解的凸规划问题. 数值结果表明, 与已知需求分布下的系统最优绩效相比, 采用鲁棒订货策略虽然会导致部分绩效损失, 但损失值很小, 表明基于鲁棒优化的多周期库存订货策略具有良好的鲁棒性, 能够有效抑制需求分布不确定性对库存运作绩效的影响.

关键词: 多周期库存; 鲁棒优化; 不确定性; 订货策略; 模型

中图分类号: F274

文献标志码: A

Robust optimization model of multi-period inventory with uncertain demand distribution

QIU Ruo-zhen, HUANG Xiao-yuan, YUAN Hong-tao

(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: QIU Ruo-zhen, E-mail: rzqiu@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The robust optimization models for multi-period inventory based on the max-min method are developed under the uncertain discrete demand probability. The interval and ellipsoid uncertain sets which the uncertain demand distribution belongs to are considered, and the multi-period inventory robust optimization models are transformed to tractable convex programmings by using the dual theory. The numerical results show that, comparing to the optimal condition with full distribution information, the robust ordering strategies will lead to performance loss, but the loss is very small. The results show that the multi-period inventory strategies derived by robust optimization has superior robustness, so that can reduce the impact of demand distributional uncertainty on the multi-period inventory operation performance.

Key words: multi-period inventory; robust optimization; uncertainty; ordering strategy; model

0 引言

库存问题是供应链运作管理领域重要的议题之一. 库存在企业实际运营过程中具有重要作用: 一方面, 库存可以满足市场需求, 给企业带来利润; 另一方面, 保持过高或过低的库存会给企业带来额外的库存持有成本或缺货损失. 因此, 许多学者致力于库存优化和控制问题的研究^[1-4]. 作为供应链库存研究的基础之一, 经典报童问题, 又称为单周期库存问题, 长期以来一直是供应链运作管理问题研究的重要领域^[5]. 在单周期库存问题的基础上, 一些学者将问题扩展到多周期环境, 研究多周期库存动态运作问题^[6-9]. 然而, 现有研究大多假设需求是确定的, 或者服从某一已知随机分布. 随着企业经营环境的复杂多变, 各种不确

定因素日益增加, 特别是市场信息的快速变化和企业自身在掌握市场变化能力方面的局限性, 使得这种假设不再适应实际情况.

鲁棒优化作为解决不确定性问题的有效手段, 近年来受到广泛关注^[10]. 鲁棒优化方法实施的关键是对于包含不确定数据的问题产生一个易于求解的鲁棒对应^[11]. Scarf^[12]最早采用最小最大准则研究了仅知道需求均值和方差信息的单周期报童订货问题. 在此基础上, Gallego等^[13]采用同样的准则进一步研究了需求分布满足线性约束下的有限周期库存问题. Ahmed等^[14]采用一致风险测度方法研究了单周期和多周期报童问题, 指出一致风险测度与最小最大鲁棒对应之间存在一一对应关系. Lin^[15]研究了仅知提前

收稿日期: 2013-11-19; 修回日期: 2014-02-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71372186); 教育部人文社会科学研究一般项目(11YJC630165).

作者简介: 邱若臻(1980-), 男, 副教授, 从事供应链管理的研究; 黄小原(1947-), 男, 教授, 博士生导师, 从事供应链管理研究.

期需求均值和方差信息在经济订货批量模型. Ben-Tal等^[16]针对多级多周期库存系统, 考虑不确定参数满足多面体约束, 采用鲁棒优化方法将问题转化为一个线性规划问题. See等^[17]提出了一种鲁棒优化方法解决多周期库存运作中仅知道需求分布均值、方差和区间等信息条件下的不确定性问题. 类似地, Wagner^[18]考虑失去销售和订单积压两种情况, 研究了有限周期和无限周期下, 通过优化对需求完全未知的库存管理者绩效与具有完备需求信息的竞争对手绩效的比率确定合理的需求水平, 并由此确定完全自由分布下的库存管理策略. Klabjan^[19]针对具有单一产品的多周期周期性随机订货批量问题, 提出了一种集成数据拟合和库存优化的最小最大鲁棒优化模型.

由上述研究可见, 能否获得易于求解的鲁棒对应, 关键在于对多周期库存运作过程中不确定性的定量描述和鲁棒建模准则的确定. 基于此, 本文采用最大最小鲁棒建模准则, 研究不确定环境下的多周期库存鲁棒优化问题. 与上述研究大多假设需求是连续的或已知需求相关矩信息不同, 在不确定性建模方面, 考虑不确定需求属于某一离散情景集合, 但每一需求情景发生的概率未知. 特别地, 假设需求情景概率分别隶属于区间和椭球不确定集两种情况. 通过对偶理论将原问题转化为便于求解的凸规划, 进一步对比分析了当额外获得需求分布真实信息时, 基于最大最小鲁棒优化方法的多周期库存策略的有效性.

1 基本模型描述

考虑库存管理者在有限周期 N (N 为一自然数) 内订购并销售产品. 在每一周期 t 的期初, 库存管理者观察到库存水平 x_t , 然后以单位采购价格 c_t 订购 q_t 数量的产品补充库存, 这里假设瞬时到货; t 周期期末, 需求 D_t 实现, 在收到 q_t 数量的产品和 D_t 单位的需求发生后, t 周期期末的库存更新为 $x_t + q_t - D_t$. 多周期库存动态运作如图 1 所示.

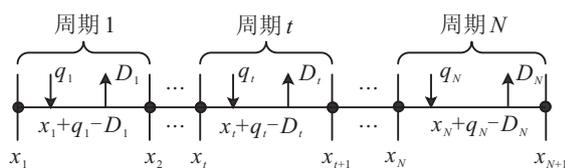


图 1 多周期库存动态模型

库存状态方程为

$$x_{t+1} = x_t + q_t - D_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1a)$$

或者可等价地描述为

$$x_{t+1} = x_1 + \sum_{s=1}^t (q_s - D_s), \quad (1b)$$

其中 x_1 为给定的初始库存水平. 第 t 周期内, 库存管理者获得的利润为

$$\pi_t(q_t, D_t) = r_t \min\{x_t + q_t, D_t\} - h_t x_{t+1}^+ - b_t x_{t+1}^- - c_t q_t - S_t I_t(q_t). \quad (2)$$

其中

$$I_t(q_t) = \begin{cases} 0, & q_t \leq 0; \\ 1, & q_t > 0 \end{cases}$$

为示性函数; $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$; $\pi_t(q_t, D_t)$ 为库存管理者在 t 周期所获得的利润; r_t 为 t 周期的产品零售价格; c_t 为 t 周期的产品采购价格; h_t 为 t 周期的库存持有成本; b_t 为 t 周期需求未满足的订单积压成本, 注意到, 订单积压意味着允许库存为负值, 即当期未被满足的需求可以在下一周期得到满足, 但必须付出一定的惩罚成本; S_t 为第 t 周期的固定订货成本. 在上述参数定义下, 整个周期 N 内的总利润为

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{D}) = \sum_{t=1}^N \pi_t(q_t, D_t). \quad (3)$$

其中: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ 为 N 个周期的订货量向量, $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \dots, D_N)^T$ 为 N 个周期的需求向量. 传统的随机规划模型通常假设各周期的需求服从某一已知分布的连续随机变量, 这里假设各周期内的需求是离散的. 令 $\{D_t^1, D_t^2, \dots, D_t^{K_t}\}$ 表示周期 t 内可能的需求情景集合, K_t 为正整数. 在周期 t 内, 需求情景 $D_t^{k_t}$ ($k_t = 1, 2, \dots, K_t$) 发生时的库存动态方程为

$$x_{t+1} = x_t + q_t - D_t^{k_t}.$$

在需求情景 $D_t^{k_t}$ 下, 库存管理者的利润函数为

$$\pi_t(q_t, D_t^{k_t}) = r_t D_t^{k_t} - c_t q_t - \max\{h_t x_{t+1}, -(r_t + b_t)x_{t+1}\} - S_t I_t(q_t).$$

令 $p_t^{k_t}$ 表示周期 t 内需求情景 $D_t^{k_t}$ 发生的概率, 即

$$p_t^{k_t} = \Pr\{D_t = D_t^{k_t}\}, \quad k_t = 1, 2, \dots, K_t.$$

为方便描述, 令 $\mathbf{p}_t = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^{K_t})^T$ 表示周期 t 内各需求情景发生的概率向量. 由于各周期的需求是相互独立的, N 个周期的总期望利润为

$$E[\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{D})] = \sum_{t=1}^N \sum_{k_t=1}^{K_t} \pi_t(q_t, D_t^{k_t}) p_t^{k_t} = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\pi}_t^T \mathbf{p}_t. \quad (4)$$

其中

$$\boldsymbol{\pi}_t = (\pi_t^1, \pi_t^2, \dots, \pi_t^{K_t})^T, \quad \pi_t^{k_t} = \pi_t(q_t, D_t^{k_t}),$$

$$\mathbf{p}_t = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^{K_t})^T,$$

$$t = 1, 2, \dots, N, \quad k_t = 1, 2, \dots, K_t.$$

库存管理者的任务是寻找最优的订货量 \mathbf{q}^* 满足 $\mathbf{q}^* = \operatorname{argmax} E[\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{D})]$.

2 不确定集下的多周期库存鲁棒优化模型

传统研究通常假设各周期的需求概率分布 \mathbf{p}_t 已知, 通过优化求解式 (4), 可得到各周期的最优订货量. 对于不确定性问题的考虑, 传统研究通常直接将需求

作为不确定性参数,这一考虑适用于需求是连续变量的情况.对于现实中大量存在的需求是离散变量的情况,这一处理方法略显不足.本文假设已知各周期内可能发生的需求情景,但每一需求情景发生的概率未知,即每一周期的需求是定义在某一确定集合上的离散随机变量.特别地,假设离散需求概率分布隶属于区间和椭球两种不确定集.为了求解需求分布不确定条件下的最优库存策略,运用对偶理论将问题转化为便于求解的凸规划问题.

2.1 区间不确定集下的多周期库存鲁棒优化模型

假设周期 t 内离散需求概率向量 \mathbf{p}_t 隶属于如下区间不确定集:

$$\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B = \{\mathbf{p}_t | \mathbf{p}_t = \bar{\mathbf{p}}_t + \boldsymbol{\xi}_t, \mathbf{e}^T \boldsymbol{\xi}_t = 0, \underline{\boldsymbol{\xi}}_t \leq \boldsymbol{\xi}_t \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}_t\}. \quad (5)$$

其中: $\bar{\mathbf{p}}_t$ 为周期 t ($t = 1, 2, \dots, N$) 内离散需求最可能的概率分布, $\boldsymbol{\xi}_t \in [\underline{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}]$ 为不确定参数向量, \mathbf{e} 为单位向量. 约束条件 $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\xi}_t = 0$ 确保了 \mathbf{p}_t 是一个概率分布. 在区间不确定集下,多周期库存优化问题(4)的鲁棒对应为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B} E[\Pi(\mathbf{q}, D)] = \\ \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B} E\left[\sum_{t=1}^N \pi_t(q_t, D_t)\right] = \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{p}_t. \end{aligned} \quad (6)$$

考虑问题(6)的内层优化问题,即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B} E[\Pi(\mathbf{q}, D)] = \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_B} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{p}_t = \\ \sum_{t=1}^N \pi_t^T \bar{\mathbf{p}}_t + G^*(\boldsymbol{\xi}_t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $G^*(\boldsymbol{\xi}_t)$ 为如下线性规划的最优值:

$$\min_{\boldsymbol{\xi}_t} \left\{ \sum_{t=1}^N \pi_t^T \boldsymbol{\xi}_t \mid \mathbf{e}^T \boldsymbol{\xi}_t = 0, \underline{\boldsymbol{\xi}}_t \leq \boldsymbol{\xi}_t \leq \bar{\boldsymbol{\xi}}_t \right\}. \quad (8)$$

线性规划问题(8)的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max_{\delta_t, \boldsymbol{\tau}_t, \boldsymbol{\nu}_t} \sum_{t=1}^N \bar{\boldsymbol{\xi}}_t^T \boldsymbol{\tau}_t + \underline{\boldsymbol{\xi}}_t^T \boldsymbol{\nu}_t; \\ \text{s.t. } \mathbf{e} \delta_t + \boldsymbol{\tau}_t + \boldsymbol{\nu}_t = \boldsymbol{\pi}_t, \\ \boldsymbol{\tau}_t \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_t \geq \mathbf{0}, t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

根据线性规划对偶理论,式(8)和(9)的最优目标函数值相等,因此,区间不确定集下的多周期库存鲁棒优化问题(6)等价于

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}, \delta_t, \boldsymbol{\tau}_t, \boldsymbol{\nu}_t} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \bar{\mathbf{p}}_t + \bar{\boldsymbol{\xi}}_t^T \boldsymbol{\tau}_t + \underline{\boldsymbol{\xi}}_t^T \boldsymbol{\nu}_t; \\ \text{s.t. } \mathbf{e} \delta_t + \boldsymbol{\tau}_t + \boldsymbol{\nu}_t = \boldsymbol{\pi}_t, \\ \boldsymbol{\tau}_t \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_t \geq \mathbf{0}, t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

其中变量 $(\mathbf{q}, \delta_t, \boldsymbol{\tau}_t, \boldsymbol{\nu}_t) \in R^N \times R \times R^{K_t} \times R^{K_t}$. 显然,问题(10)是一个便于求解的凸规划.由于函数 $\pi_t(q_t, D_t)$ 是分段线性函数,问题(10)是分段线性规划问题.特别地,当 $\underline{\boldsymbol{\xi}}_t = \bar{\boldsymbol{\xi}}_t = \mathbf{0}$ 时,问题(10)简化为已知需求分布 $\bar{\mathbf{p}}_t$ 下的多周期库存优化问题.

2.2 椭球不确定集下的多周期库存鲁棒优化模型

假设周期 t 内离散需求概率向量 \mathbf{p}_t 隶属于如下椭球不确定集:

$$\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_E = \{\mathbf{p}_t | \mathbf{p}_t = \bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t, \bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t \geq \mathbf{0}, \mathbf{e}^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t = 0, \|\boldsymbol{\xi}_t\| \leq 1\}. \quad (11)$$

其中: $\|\cdot\|$ 为定义在 R^n 上的标准欧几里得范数,其对偶范数为 $\|\cdot\|_*$; $\|\boldsymbol{\xi}_t\| = \sqrt{\boldsymbol{\xi}_t^T \boldsymbol{\xi}_t}$, 根据欧几里得范数的自对偶性, $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|$; $\bar{\mathbf{p}}_t$ 为椭球中心,可认为是周期 t ($t = 1, 2, \dots, N$) 内离散需求最可能的概率分布; $\mathbf{A}_t \in R^{n \times n}$ 为已知放缩矩阵,表示椭球不确定集的范围,约束条件 $\mathbf{e}^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t = 0$ 和 $\bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t \geq \mathbf{0}$ 确保 \mathbf{p}_t 是一个概率分布.在椭球不确定集下,多周期库存优化问题(4)的鲁棒对应为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_E} E[\Pi(\mathbf{q}, D)] = \\ \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_E} E\left[\sum_{t=1}^N \pi_t(q_t, D_t)\right] = \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_E} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{p}_t. \end{aligned} \quad (12)$$

考虑式(12)的内层优化问题

$$\min_{\mathbf{p}_t \in \mathcal{P}_E} E[\Pi(\mathbf{q}, D)] = \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{p}_t = \sum_{t=1}^N \pi_t^T \bar{\mathbf{p}}_t + Q^*(\boldsymbol{\xi}_t), \quad (13)$$

其中 $Q^*(\boldsymbol{\xi}_t)$ 为如下问题的最优值:

$$\min_{\boldsymbol{\xi}_t} \left\{ \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t \mid \mathbf{e}^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t = 0, \bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t \geq \mathbf{0}, \|\boldsymbol{\xi}_t\| \leq 1 \right\}. \quad (14)$$

可以看出,式(14)是一个以 $\boldsymbol{\xi}_t$ 为变量的二阶锥规划问题,其拉格朗日对偶函数为

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\lambda}_t, \rho_t, \gamma_t) = \min_{\boldsymbol{\xi}_t} \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}_t, \rho_t, \gamma_t; \boldsymbol{\xi}_t) = \\ \min_{\boldsymbol{\xi}_t} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t + \sum_{t=1}^N \lambda_t (-\bar{\mathbf{p}}_t - \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t) + \\ \sum_{t=1}^N \rho_t (\|\boldsymbol{\xi}_t\| - 1) + \sum_{t=1}^N \gamma_t \mathbf{e}^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi}_t = \\ - \sum_{t=1}^N (\lambda_t \bar{\mathbf{p}}_t + \rho_t) - \mathcal{F}^*(\mathbf{y}_t). \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(\mathbf{y}_t) = \max_{\boldsymbol{\xi}_t} \left\{ \sum_{t=1}^N \mathbf{y}_t^T \boldsymbol{\xi}_t - \sum_{t=1}^N \rho_t \|\boldsymbol{\xi}_t\| \right\}, \\ \mathbf{y}_t^T = -\pi_t^T \mathbf{A}_t + \lambda_t \mathbf{A}_t - \gamma_t \mathbf{e}^T \mathbf{A}_t. \end{aligned}$$

为了求解上述拉格朗日对偶问题, 给出如下引理 1.

引理 1 如果函数 $f(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$, 其中 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 为凸函数, 其共轭函数分别为 $f_1^*(\cdot)$ 和 $f_2^*(\cdot)$, 则函数 $f(\cdot)$ 的共轭函数为

$$f^*(w, z) = f_1^*(w) + f_2^*(z). \quad (16)$$

引理 1 表明, 两个相互独立的凸函数之和的共轭是这两个凸函数各自共轭的总和. 引理 1 可以容易推广到具有 $n (n > 2)$ 个相互独立的凸函数的情况, 即 $n (n > 2)$ 个相互独立的凸函数之和的共轭是这 n 个函数各自共轭的总和. 根据引理 1, 式 (15) 等价于

$$g(\lambda_t, \rho_t, \gamma_t) = -\sum_{t=1}^N (\lambda_t \bar{p}_t + \rho_t) - \sum_{t=1}^N f_t^*(\mathbf{y}_t). \quad (17)$$

其中

$$f_t^*(\mathbf{y}_t) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{y}_t\|_* \leq \rho_t; \\ \infty, & \|\mathbf{y}_t\|_* > \rho_t \end{cases}$$

为函数 $f_t(\xi_t) = \rho_t \|\xi_t\|$ 的共轭函数. 根据范数 $\|\cdot\|$ 的自对偶性, 式 (14) 的拉格朗日对偶问题为

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_t, \rho_t, \gamma_t} g(\lambda_t, \rho_t, \gamma_t) = \\ \max_{\lambda_t, \rho_t, \gamma_t} \left\{ -\sum_{t=1}^N \lambda_t \bar{p}_t + \rho_t \left\| \|\mathbf{y}_t\| \leq \rho_t, \lambda_t \geq 0, \rho_t \geq 0 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

显然, 式 (18) 是一个凸规划问题, 根据概率分布特性, 存在一个 ξ_t 使得 $\bar{p}_t + \mathbf{A}_t \xi_t > 0$, 即 Slater 条件成立, 从而确保拉格朗日强对偶性成立. 因此, 椭球不确定集的多周期库存鲁棒优化问题 (12) 等价于

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}, \lambda_t, \rho_t, \gamma_t} \sum_{t=1}^N \pi_t^T \bar{p}_t - \lambda_t \bar{p}_t - \rho_t; \\ \text{s.t. } \|\mathbf{y}_t\| \leq \rho_t, \lambda_t \geq 0, \\ \mathbf{y}_t^T = -\pi_t^T \mathbf{A}_t + \lambda_t \mathbf{A}_t - \gamma_t \mathbf{e}^T \mathbf{A}_t, \\ \rho_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

其中变量 $(\mathbf{q}, \lambda_t, \rho_t, \gamma_t) \in R^N \times R^{K_t} \times R \times R$. 可以看出, 问题 (19) 是一个易于求解的二阶锥规划问题. 特别地, 当 $\mathbf{A}_t = \mathbf{0}$ 时, 问题 (19) 变为已知需求分布 \bar{p}_t 下的多周期库存优化问题.

3 数值分析

为了验证所提出方法得到的鲁棒库存策略的有效性, 应用 Matlab 2011b 计算软件, 分别针对规划问题 (10) 和 (19) 进行数值计算. 模型参数赋值如下: $N = 5, K_t = 5, r_t = 10, h_t = 0.5, b_t = 0.3, c_t = 3, S_t = 3, \bar{\xi}_t = -0.01, \underline{\xi}_t = -\bar{\xi}_t, \mathbf{A}_t = a\mathbf{I}, \mathbf{I}$ 为单位矩阵, $a = 0.05$. 采用随机生成的方式确定需求情境 D_t^k 和最可能的概率分布 \bar{p}_t . 首先, 在区间 $[10, 30]$ 内均匀生成 5 个不同的数值, 并按从小到大的顺序排列, 以此作为一个周期内可能的需求情景. 重复该操作 $N = 5$

次, 得到所有 5 个周期的需求情景; 然后, 在区间 $[0, 1]$ 范围内, 根据均匀分布随机数生成方法随机产生 $K_t = 5$ 个数值, 将其归一化, 得到一个周期最可能的离散需求概率向量, 重复该操作 $N = 5$ 次, 得到所有 5 个周期最可能的概率分布 \bar{p}_t . 不失一般性, 令 \bar{p}_t 为真实需求分布.

为了便于分析, 令 MaxminPer 为需求分布不确定条件下的最大最小绩效; $\text{Per}|\bar{p}_t$ 为在真实分布 \bar{p}_t 下, 采用鲁棒库存策略得到的系统绩效; $\text{PerLoss}|\bar{p}_t$ 为与真实分布 \bar{p}_t 下的最优绩效相比, 采用鲁棒库存策略导致的绩效损失. 表 1 给出了针对问题 (10) 和 (19) 进行求解得到的数值结果. 在区间不确定集下, 通过优化求解问题 (10), 得到有限周期下的多周期订货向量为

$$\mathbf{q}_{\text{interval}} = (29.01, 19.56, 29.31, 24.60, 29.44),$$

最大最小绩效值为 552.13; 在椭球不确定集下, 通过优化求解问题 (19), 得多周期订货向量为

$$\mathbf{q}_{\text{ellipsoid}} = (29.19, 18.68, 30.00, 24.60, 29.44),$$

最大最小绩效值为 537.49.

表 1 基于鲁棒优化的多周期库存绩效

	真实分布 \bar{p}_t	区间不确定集 $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$	椭球不确定集 $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$
MaxminPer	563.31	552.13	537.49
$\text{Per} \bar{p}_t$	563.31	561.97	562.08
$\text{PerLoss} \bar{p}_t$	0	1.34	1.23

为了比较两种不确定集下鲁棒库存策略的有效性, 进一步计算真实分布 \bar{p}_t 下的订货量及其绩效指标. 在优化求解问题 (4), 或者求解问题 (10) 和 (19) 时, 分别令 $\underline{\xi}_t = \bar{\xi}_t = \mathbf{0}, \mathbf{A}_t = \mathbf{0}$, 得到真实分布 \bar{p}_t 下的订货向量为 $\mathbf{q}_0 = (29.19, 24.58, 24.10, 24.60, 29.44)$, 相应的利润绩效为 563.31. 可以看出, 由于需求分布信息的缺失, 采用鲁棒优化方法获得的最大最小绩效小于已知真实需求分布信息下的系统最优绩效. 为了衡量多周期鲁棒库存策略的鲁棒性, 通过计算发现, 在真实需求分布信息下, 当分别采用基于区间不确定集和椭球不确定集的鲁棒库存策略时, 所获得的利润绩效分别为 561.97 和 562.08, 相应的绩效损失分别为 1.34 (563.31 - 561.97) 和 1.23 (563.31 - 562.08), 损失比率分别为 0.24% 和 0.22%. 特别地, 在椭球不确定集下, \mathbf{A}_t 描述了不确定集的范围, 不同 \mathbf{A}_t 下的绩效损失情况如图 2 所示. 由图 2 可见, 随着 a 的增加, 系统绩效损失呈递增趋势, 表明随着不确定性程度的增加, 鲁棒决策下的系统绩效会偏离系统最优绩效. 需求分布信息缺失虽然会导致系统绩效损失, 但损失值很小, 这一数值可以解释为库存管理者为了获得真实的需求分布信息所需付出的额外成本. 因此, 所提出方法下的多周期鲁棒库存策略具有良好的鲁棒性, 能够有效抑制需求不确定性对系统绩效的影响.

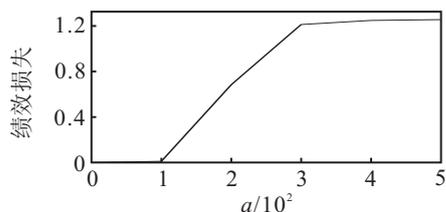


图2 不同 A_t 下的绩效损失

4 结 论

本文在多周期库存运作环境下,研究了需求分布未知条件下的鲁棒库存策略.在允许出现订单积压情况下,考虑各周期需求分布分别满足区间和椭圆两种不确定集情况,采用最大最小鲁棒对应准则建立了需求分布不确定条件下的多周期库存鲁棒优化模型,并针对区间和椭圆两种不确定集,分别运用线性规划对偶理论和拉格朗日对偶理论将问题转化为易于求解的凸规划问题.数值算例结果显示,由于需求分布信息缺失,基于最大最小鲁棒优化的多周期库存订货策略虽然会导致部分绩效损失,但损失值很小,表明在需求分布未知条件下,所提出的多周期库存策略方法具有良好的鲁棒性.进一步,可考虑采用某种风险测度(如风险值(VaR)或条件风险值(CVaR))衡量库存管理者的风险偏好态度,研究不确定条件下,基于风险测度的多周期库存运作问题.此外,对不同鲁棒建模准则的考虑也是未来的研究方向.

参考文献(References)

- [1] Yachine R. Inventory inaccuracies in the wholesale supply chain[J]. *Int J of Production Economics*, 2011, 133(1): 172-181.
- [2] Xu J P, Jiang W, Feng G Z, et al. Comparing improvement strategies for inventory inaccuracy in a two-echelon supply chain[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 221(1): 213-221.
- [3] Kang J H, Kim Y D. Inventory control in a two-level supply chain with risk pooling effect[J]. *Int J of Production Economics*, 2012, 135(1): 116-124.
- [4] 郑长征, 刘志学, 左晓露. 急于购买行为的随机生命周期易逝品库存策略[J]. *控制与决策*, 2012, 27(1): 28-34. (Zheng C Z, Liu Z X, Zuo X L. Optimal policies for deteriorating inventory problems based on purchasing behavior[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(1): 28-34.)
- [5] Qin Y, Wang R X, Vakharia A J, et al. The newsvendor problem: Review and directions for future research[J]. *European J of Operational Research*, 2011, 213(4): 361-374.
- [6] Cheaitou A, Delf C, Dallery Y, et al. Two-period production planning and inventory control[J]. *Int J of Production Economics*, 2009, 118(2): 118-130.
- [7] 李兰兰, 诸克军, 郭海湘. 多周期报童模型在煤炭物资库存管理中的应用[J]. *运筹与管理*, 2010, 19(5): 167-183. (Li L L, Zhu K J, Guo H X. Application of multi-period newsboy extended model in coal material inventory management[J]. *Operations Research and Management Science*, 2010, 19(5): 167-183.)
- [8] Farahvash P, Altiok T. A multi-period inventory model with multi-dimensional procurement bidding[J]. *Annals of Operations Research*, 2011, 186(1): 101-118.
- [9] Schmitt A, Snyder L. Infinite-horizon models for inventory control under yield uncertainty and disruptions[J]. *Computers & Operations Research*, 2012, 39(8): 850-862.
- [10] Klibi W, Martel A, Guitouni A. The design of robust value-creating supply chain networks: A critical review[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 203(3): 283-293.
- [11] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust optimization: Methodology and applications[J]. *Mathematical Programming*, 2002, 92(3): 453-480.
- [12] Scarf H E. A min-max solution to an inventory problem[C]. *Studies in Mathematical Theory of inventory and production*. Stanford: Stanford University Press, 1958: 201-209.
- [13] Gallego G, Ryan J, Simchi-Levi D. Minimax analysis for finite-horizon inventory models[J]. *IIE Transactions*, 2001, 33(8): 861-874.
- [14] Ahmed S, Cakmak U, Shapiro A. Coherent risk measures in inventory problems[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 182(1): 226-238.
- [15] Lin Y J. Minimax distribution free procedure with backorder price discount[J]. *Int J of Production Economics*, 2008, 111(1): 118-128.
- [16] Ben-Tal A, Golany B, Shtern S. Robust multi-echelon multi-period inventory control[J]. *European J of Operational Research*, 2009, 199(9): 922-935.
- [17] See C T, Sim M. Robust approximation to multiperiod inventory management[J]. *Operations Research*, 2010, 58(3): 583-594.
- [18] Wagner M R. Fully distribution-free profit maximization: The inventory management case[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2010, 35(4): 728-741.
- [19] Klabjan D, Simchi-Levi D, Song M. Robust stochastic lot-sizing by means of histograms[J]. *Production and Operations Management*, 2013, 22(3): 691-710.
- [20] Boyd S P, Vandenberghe L. *Convex optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 95.

(责任编辑: 郑晓蕾)