文章编号:1007-2985(2012)05-0019-04

1 维零压流体运动方程组的解的局部结构*

张 茜,赵引川

(华北电力大学数理系,北京 102206)

摘 要:研究 1 维零压流体运动方程组,引进势函数并讨论它的最小值点.当初值$(x,t)\in\mathbf{R}\times(0,\infty)$时,得出解的局部结构的以下结论.若势函数有唯一非退化最小值点,则(x,t)附近的解光滑;若势函数有 2 个以上非退化最小值点或唯一退化最小值点,则(x,t)附近的解间断.

关键词:零压流体运动方程组;局部结构;退化点;非退化点

中图分类号:O175.1 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1007-2985.2012.05.005

主要研究了 1 维零压流体运动方程组的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+(\rho u^2)_x=0,\\ (\rho,u)(t=0)=(\rho_0(x),u_0(x)).\end{cases}\tag{1}$$

其中:$\rho_0(x)>0$,$\rho_0(x)$存在 k 阶连续偏导即$\rho_0(x)\in C^k$;同样 $u_0(x)\in C^k$,$3\leqslant k<\infty$ 且 $u_0(x)$有界,$x\in\mathbf{R}$,$t\in(0,\infty)$.[1] 由于即使在初始值光滑的情况下,也不存在一个解在任意 t 时方程组(1)都成立,因此笔者就想先刻画出初值领域内方程组解的情况,从而进一步构造解的结构.

1 准备知识

在文献[2]中,主要使用的是函数$F(x,t;u)=tg(u)+\Phi(x-f'(u)t)$,其中$g(u)=uf'(u)-f(u)$,$\Phi(y)=\int_0^y\phi(x)\mathrm{d}x$.类似地,文中引用文献[3]应用Lebesgue-Stieltjes积分建立方程组(1)的势函数$F(x,t;y)=\int_0^y\rho_0(\eta)(tu_0(\eta)+\eta-x)\mathrm{d}\eta$.设$h=\sup u_0(x)$,考虑$F(x,t;y)$,对于某个$(x,t)$,当$y_1<y_2\leqslant x-ht$ 或 $y_1>y_2\geqslant x+ht$ 时,

$$F(x,t;y_1)-F(x,t;y_2)=t\int_{y_2}^{y_1}\rho_0(\eta)(u_0(\eta)-\frac{x-\eta}{t})\mathrm{d}\eta>0,$$

所以对于某个(x,t),$F(x,t;y)$总有最小值,并且在$[x-ht,x+ht]$上取得最小值点.设当F取到最小值时的 y 是 F 的临界点,且一定是方程

* **收稿日期:**2012-07-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11101143);中央高校基本科研业务费专项资金资助(10ML37,12MS83)

作者简介:张 茜(1987-),女,河南新乡人,华北电力大学硕士研究生,主要从事偏微分方程研究;赵引川(1977-),男,浙江绍兴人,华北电力大学数理系副教授,主要从事偏微分方程研究.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)=0 \tag{2}$$

的解,而

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)=\rho_0(y)(tu_0(y)+y-x). \tag{3}$$

因为 $\rho_0(x)>0$,所以当$\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)=0$ 时,$y=x-tu_0(y)$. 这时,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t,y)=-\int_0^y \rho_0(\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t,y)=\int_0^y \rho_0(\eta)u_0(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{5}$$

令集合 $U=\{(x,t)\mid(x,t)\in H,F(x,t,\cdot)$ 在唯一点 y 处取到最小值且在点 y 处有 $(\partial^2 F/\partial y^2)(x,t,y)\neq 0\}$,其中 $H=\mathbf{R}\times(0,\infty)$.

引理 1 对 $(x,t)\in U$,令 $y(x,t)$ 为 $F(x,t;\cdot)$ 相应的最小值点,定义 $u(x,t)=\frac{x-y(x,t)}{t}$,$\rho(x,t)=\rho_0(y(x,t))\cdot y_x$,那么在 U 上,(ρ,u) 为方程组(1) 的解.

证明 因为 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}$,由(4),(5) 式可得 $y_t=-u_0(y(x,t))\cdot y_x$,又由 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)=\rho_0(y)(tu_0(y)+y-x)=0$,可得 $u_0(y(x,t))=\frac{x-y(x,t)}{t}$,所以 $y_t=-u(x,t)\cdot y_x$. 由上述等式可得定义的 (ρ,u) 为方程组(1) 的解.

2 解的局部结构

定理 1 U 是 H 的开子集,最小值函数 $y(x,t)$ 在 U 上光滑.

证明 假设 $(x_0,t_0)\in U$,令 y_0 是 y 的最小值.

因为假设$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,t_0,y_0)\neq 0$,所以由隐函数定理可知,存在 y_0 的一个开邻域 ϑ,当 $(x,t)\to(x_0,t_0)$ 时,(2) 式在 ϑ 内有唯一解 $y(x,t)$.

由(3) 式知 $F(x,t,\cdot)$ 的临界点包含在紧区间 $J=\{y:y\leqslant C\}$,其中 $C=|x-t\inf_m u_0(m)|$.

对所有在紧集 $J\backslash\vartheta$ 里的 y,都存在一个正值 δ,有 $F(x_0,t_0,y)\geqslant F(x_0,t_0,y_0)+\delta$ 成立.

对所有 $y\in J\backslash\vartheta$ 和 (x,t) 逼近 (x_0,t_0) 时,由连续性可知

$$F(x,t,y)\geqslant F(x,t,y(x,t))+\frac{\delta}{2},$$

因此对所有逼近 (x_0,t_0) 的点,$y(x,t)$ 是 y 的唯一最小值.

下面定义一些集合 H 的子集,在这些子集上,通过最小化步骤可以导出不连续函数:

$\Gamma_1=\{(x,t)$:存在 2 个不同的值使 $F(x,t,\cdot)$ 取到最小值,且都有$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\neq 0\}$;

$\Gamma_0^{(c)}=\{(x,t)$:存在 3 个不同的值使 $F(x,t,\cdot)$ 取到最小值,且都有$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\neq 0\}$;

$\Gamma_0^{(f)}=\{(x,t)$:存在唯一的值使 $F(x,t,\cdot)$ 取到最小值且有$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$,但$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\neq 0\}$.

当然,这些集合依赖于初值,接下来证明对大多数初值来说,没有其他可能性的存在. 然而,首先要证明 Γ_1 是所有穿过拥有跳跃间断点最小值函数的光滑曲线的并,而 $\Gamma_0^{(c)}$ 和 $\Gamma_0^{(f)}$ 包含的则是孤立点或者是在 Γ_1 开始或结束的光滑曲线.

定理 2 当 $\forall(x_0,t_0)\in\Gamma_1$,$(x_0,t_0)$ 的领域为 ϑ,则 $\Gamma_1\cap\vartheta$ 是一条过点 (x_0,t_0) 的光滑曲线 $x=\gamma(t)$,

且最小值函数 $y(x,t)$ 在 $\vartheta\backslash\Gamma_1$ 上光滑.

证明　令 y_1,y_2 是能使 $F(x_0,t_0,\cdot)$ 达到最小值的2个值,且在 (x_0,t_0) 的领域 ϑ 中,$y_1(x,t),y_2(x,t)$ 是(2)式对应的 2 个解.

由类似于定理 1 的讨论可知在逼近 (x,t) 的点上,$F(x,t,\cdot)$ 的最小值点可能在 $y_1(x,t)$ 或 $y_2(x,t)$ 取到,也可能同时在这 2 点取到,因此 ϑ 中的点不是属于 U 就是属于 Γ_1,而这取决于 F 在这 2 个临界点上的值是否相同,也就是说 $\Gamma_1\cap\vartheta$ 是方程

$$\psi(x,t)=F(x,t,y_2(x,t))-F(x,t,y_1(x,t))=0 \tag{6}$$

的解集.由(5)式知 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,t,y)=\displaystyle\int_{y_2}^{y_1}\rho_0(\eta)\mathrm{d}\eta\neq0$,所以(6)式定义的是一个 x 的关于 t 的光滑函数.

在下面的定理中会用到开始于 (x_0,t_0) 的半曲线,即意味着有这样形式的集合 $\{(x,t):x=\gamma(t),t>t_0\}$,其中 $\gamma(t_0)=x_0$,而在 (x_0,t_0) 点结束的半曲线则是当 $t<t_0$ 时的集合.

假设 ϑ 是 (x_0,t_0) 点的邻域,定义 ϑ' 为有空邻域 $\vartheta\backslash\{(x_0,t_0)\}$.

定理 3　$\forall(x_0,t_0)\in\Gamma_0^{(c)}$ 的邻域 ϑ,则 $\Gamma_1\cap\vartheta$ 是 3 条半曲线的并集,2 条终止于 (x_0,t_0),1 条开始于 (x_0,t_0),最小值函数在 $\vartheta'\backslash\Gamma_1$ 上光滑.

证明　假设 y_1,y_2,y_3 分别是使 $F(x_0,t_0,\cdot)$ 达到最小值的点,分别对应最小值函数 $y_i(x,t)$,显然在逼近 (x,t) 的点上,F 的最小值可能在一(或更多)点上取到.ϑ 中所有的点都属于 $\Gamma_0^{(c)}$,Γ_1 或 U,可得 $\Gamma_0^{(c)}\cap\vartheta=\{F_1=F_2=F_3\}$,和

$$\Gamma_1\cap\vartheta=\{F_1=F_2<F_3\}\cup\{F_1=F_3<F_2\}\cup\{F_2=F_3<F_1\}, \tag{7}$$

其中 $F_j(x,t)=F(x,t,y_j(x,t))$.$\{F_1=F_2\}$,$\{F_1=F_3\}$,$\{F_3=F_2\}$ 中的任一个集合都是过 (x_0,t_0) 点的光滑曲线,由 u_0 的凸性可知,这些曲线中没有任意 2 条在 (x_0,t_0) 点相切,因此 $\Gamma_0^{(c)}\cap\vartheta$ 只包含点 (x_0,t_0) 和 $\Gamma_1\cap\vartheta$ 是 3 条半曲线的并集.令 $y_1<y_2<y_3$,则(7)式中的第 1 条和第 3 条是终止于 (x_0,t_0) 的,而第 2 条是开始于 (x_0,t_0) 的.

定理 4　$\forall(x_0,t_0)\in\Gamma_0^{(f)}$,$(x_0,t_0)$ 的邻域为 ϑ,则 $\Gamma_1\cap\vartheta$ 为一条开始于 (x_0,t_0) 的半曲线,且最小值函数在 $\vartheta'\backslash\Gamma_1$ 上光滑.

证明　因为 (x_0,t_0,y_0),利用文献[4]中的方法,使

$$F_y(x_0,t_0,y_0)=0,F_{yy}(x_0,t_0,y_0)=0,F_{yyy}(x_0,t_0,y_0)=0,F_{yyyy}(x_0,t_0,y_0)>0,$$

所以对

$$z=x_0-u_0(y_0)t_0, \tag{8}$$

有

$$u_0(y_0)=\frac{x_0-z}{t_0},u_0'(z)=-\frac{1}{t_0},u_0''(z)=0,u_0'''(z)>0. \tag{9}$$

由保号性知存在 δ,$\forall x\in(z-\delta,z+\delta)$ 中有

$$u_0'''(x)>0. \tag{10}$$

$\forall(x_1,t_1)\in\vartheta'$,$F(x_1,t_1,\cdot)$ 的最小值点 y_1,由(8)式的对应关系知 $z_1=x_1-u_0(y_1)t_1$ 且 $z_1\in(x-\delta,x+\delta)$,否则与 F 在 (x_0,t_0) 处仅有唯一最小值相矛盾.

在邻域 ϑ' 中,假设存在点 (x_2,t_2) 使 F 取退化最小值,即有

$$F_y(x_2,t_2,y_2)=0,F_{yy}(x_2,t_2,y_2)=0,F_{yyy}(x_2,t_2,y_2)=0.$$

由(8)式的对应关系可知 $u_0''(z_2)=0$,由(9)式可知 $u_0''(z)=0$,由罗尔定理可知存在 $\xi_1\in(z_2,z+\delta)$,使得 $u_0'''(\xi_1)=0$,与(10)式相矛盾,因此邻域 ϑ' 中的点都取非退化最小.

由文献[5]可知在 (x_0,t_0) 点只有 1 条开始于 (x_0,t_0) 的激波 γ_1.假设 $\forall(x_3,t_3)\in\vartheta'\backslash\gamma_1$,至少存在 y_3,y_4 使 $F(x_3,t_3,\cdot)$ 取非退化最小值.由定理 2 可知存在激波 γ_2 过点 (x_3,t_3),设激波 γ_2 的起点为 (x_5,t_5),$F(x_5,t_5,\cdot)$ 有退化最小值点,由(8)式可知 $u_0''(z_5)=0$(其中 $z_5=x_3-u_0(y_3)t_3$),又由(9)式知 $u_0''(z)=0$,所以存在 $\xi_2\in(z_5,z+\delta)$,$u_0'''(\xi_2)=0$,与(10)式相矛盾.因此,对 $\forall(x_3,y_3)\in\vartheta'\backslash\gamma_1$,$F(x_3,t_3,\cdot)$ 有唯一非退化最小值.

由此可得 $\Gamma_1 \cap \vartheta$ 为一条开始于(x_0,t_0)的半曲线,且最小值函数在 $\vartheta'\backslash\Gamma_1$ 上光滑.

3　结论

由引理 1 的证明可以知道,方程组(1)的解可以由势函数的最小值函数表示.也就是说,通过对 $y(x,t)$ 的局部分析得出方程组(1)解的局部结构:当势函数有唯一非退化最小值点时,(x,t)邻域内的解光滑;当势函数有 2 个以上非退化最小值点或唯一退化最小值点时,(x,t)邻域内的解间断.

参考文献:

[1]　李大潜,秦铁虎.物理学与偏微分方程(上册)[M].第 2 版.北京:高等教育出版社,2005:79-147.

[2]　SCHAEFFER D G. A Regularity Theoremfor Conservation Laws [J]. Advances in Mathematics,1973,11:368-386.

[3]　WANG Zhen,HUANG Fei-min,DING Xia-qi. On the Cauchy Problem of Transportation Equations [J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica,1997,13(2):113-122.

[4]　李邦河,王靖华.单个守恒律解的大范围定性研究[J].中国科学,1979(S1):12-24.

[5]　HOPF E. The Partial Differential Equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$ [J]. Comm. Pure. Appl. Math.,1950,3:201-230.

Local Structure of the Solutions to One-Dimensional Zero-Pressure Flow Equations

ZHANG Xi,ZHAO Yin-chuan

(Department of Mathematics and Physics,North China Electric Power University,BeiJing 102206,China)

Abstract:This paper is concerned with one-dimensional zero-pressure flow equations. By introducing a potential function and discussing its minimizing point,the following conclusions on the local structure of the solution are drawn for each point $(x,t)\in\mathbf{R}\times(0,\infty)$. When potential function has a uniqe non-degenerate minimizing point,solutions are smooth in the neighborhood of (x,t);When potential function has more than two non-degenerate minimizing points or a uniqe degenerate minimizing point,solutions are discontinuous in the neighborhood of (x,t).

Key words:zero-pressure flow equations;local structure;degenerate point;non-degenerate point

(责任编辑　向阳洁)