文章编号:1007－2985(2012)05－0023－03

环体体积的一种计算方法*

毛俊超,李长文,高建亭
(海军潜艇学院,山东 青岛　266042)

摘　要:根据数形结合思想,运用重积分的微元法和形心坐标公式推导出环体体积的一个计算公式,并给出了该公式的具体应用.

关键词:环体;体积;微元法;形心
中图分类号:O172　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2012.05.006

1　预备知识

(1) 环体.所谓环体,是一种特殊的旋转体,是由一个平面图形绕这平面内与该平面图形无交点的一条直线旋转 1 周而成的立体.

(2) 平面图形形心.设有一平面薄片,占有 xOy 面上的闭区域 D,平面薄片是均匀的,即面密度是常数,则平面薄片的质心称为平面图形 D 的形心.

(3) 平面薄片的质心坐标[1].设有一平面薄片,占有 xOy 面上的闭区域 D,在点 (x,y) 处的面密度是 $\mu(x,y)$,则平面薄片的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 坐标分别为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma},\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

旋转体的体积是一个重要的几何量.求旋转体的体积通常使用微元法[2],但对有些特殊的旋转体使用该方法计算比较麻烦,一些作者各自分别讨论了满足某些限定条件的旋转体体积的计算方法[3-5].笔者研究一种特殊的旋转体即环体的体积计算问题,仍然运用重积分的微元法,但结合平面图形的形心坐标公式推导出环体体积的一个计算公式.

2　主要结果

定理 1　已知平面图形 D 的面积为 S,形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$,则由 D 绕 x 轴旋转所得到的环体的体积 $V_1=2S\pi\bar{y}$,绕 y 轴旋转所得到的体积 $V_2=2S\pi\bar{x}$.

证明　不防设平面图形 D 是 X 型区域:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\\ a\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

如图 1 所示,它是由曲线 $y=\varphi_1(x)$,$y=\varphi_2(x)$ 及直线 $x=a$,$y=b$ 所围成的区域.

* **收稿日期**:2012－06－25
作者简介:毛俊超(1976－),男,山东平邑人,海军潜艇学院讲师,硕士,主要从事组合优化研究.

当图形 D 绕 x 轴旋转时，由微元法知，选 x 为积分变量，$\mathrm{d}V_1=\pi(\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x))\mathrm{d}x$，则

$$V_1=\int_a^b \pi(\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x))\mathrm{d}x. \tag{1}$$

又由平面薄片的质心坐标公式，对平面图形，其面密度 $\mu(x,y)=1$ 是常数，故

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{S}=\frac{\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} y\mathrm{d}y}{S}=\frac{\int_a^b (\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x))\mathrm{d}x}{2S},$$

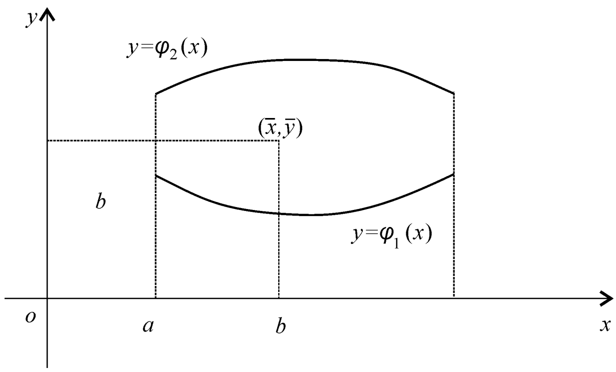

图 1 平面图形 D 的几何示意图

从而

$$\int_a^b (\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x))\mathrm{d}x=2S\bar{y}. \tag{2}$$

由(1)，(2) 式知 $V_1=\pi\int_a^b (\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x))\mathrm{d}x=2S\pi\bar{y}$.

对由 D 绕 y 轴旋转所得到的环体的体积公式同理可证.

推论 1 平面图形 D 绕 x 轴旋转角度为 θ 弧度时，$V_1=\theta S\bar{y}$.

3 应用

3.1 求旋转体的体积

利用微元法可以求出某些体积问题，但计算比较麻烦，若用定理 1 就可以较容易地求解了.

例 1 求由 $x^2+(y-5)^2=16$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解 平面图形 $x^2+(y-5)^2=16$ 的形心坐标为(0,5)，面积是 16π，故由定理 1，其绕 x 轴旋转所得到的环体的体积 $V_1=2S\pi\bar{y}=160\pi^2$.

3.2 求平面图形的形心

有些平面图形的形心不方便由平面薄片的质心坐标求出，但由该图形旋转所得到的旋转体体积可以方便求出，于是可以利用定理 1 来求形心，即 $\bar{y}=\dfrac{V_1}{2S\pi}$，$\bar{x}=\dfrac{V_2}{2S\pi}$.

例 2 求由图 2 阴影所示的平面图形的形心.

解 设形心 $(\bar{x},\bar{y})$，一方面，由图 2 绕 x 轴旋转所得的旋转体可以看作是整个大球体去掉内部小球体的部分，其体积为 $V_1=\dfrac{4}{3}(8\pi-\pi)=\dfrac{28\pi}{3}$，从而由定理 1 知 $\bar{y}=\dfrac{V_1}{2S\pi}=\dfrac{28}{9\pi}$.

一方面，根据旋转体的对称性，由图 2 绕 y 旋转所得的旋转体可以看作是由图 3 绕 y 旋转所得的旋转

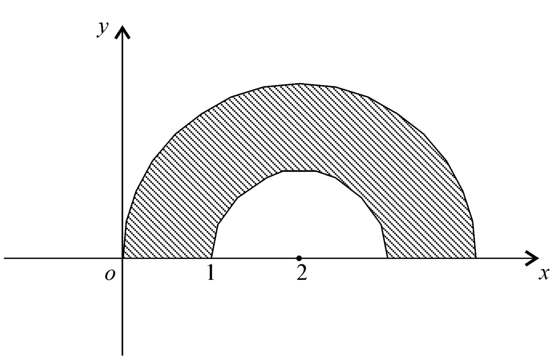

图 2 例 2 中平面图形示意图

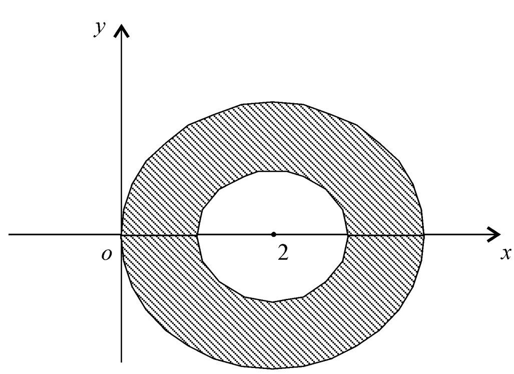

图 3 例 2 中平面图形示意图

体 V 的上半部分,V 即整个大环体去掉内部小环体的部分,由定理 1 知其体积为 $V=2\pi\cdot4\pi\cdot2-2\pi\cdot\pi\cdot2=12\pi^2$,从而 $V_2=\frac{1}{2}V=6\pi^2$,再由定理 1 知 $\bar{x}=\frac{V_2}{2S\pi}=2$(也可以直接根据图形的对称性知 $\bar{x}=2$),所以平面图形 2 的形心$(\bar{x},\bar{y})=(2,\frac{28}{9\pi})$.

可见,在一定条件下,使用定理 1 中的公式不仅可以非常方便地求出某些旋转体的体积,还可以方便地求出某些平面图形的形心.

参考文献:

[1] 同济大学应用数学系.高等数学(第五版下册)[M].北京:高等教育出版社,2002:111-113.

[2] 同济大学应用数学系.高等数学(第五版上册)[M].北京:高等教育出版社,2002:273-275.

[3] 朱雄才.关于旋转体的二个积分公式[J].云南师范大学学报:自然科学版,2004,24(4):6-7.

[4] 李德新.求旋转体体积的一个公式[J].高等数学研究,2005,8(2):29-32.

[5] 王培吉,王尚户,王嘉谋,等.基于微元法旋转体体积的计算[J].高师理科学刊,2010,30(1):22-24.

Method of Calculating the Volume of Ring Rotating Object

MAO Jun-chao, LI Chang-wen, GAO Jian-ting

(Navy Submarine Academy, Qingdao 266042, China)

Abstract: Based on the idea of combining arith and figure, this paper uses the element method and the shape graph coordinate formula to deduce a calculating formula for the volume of ring rotating object and gives the application.

Key words: ring rotating object; volume; element method; center of gravity

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 11 页)

[17] 蔡　华,魏丽侠,吕显瑞.非连通图$(P_1\vee P_n)\cup G_r$和$(P_1\vee P_n)\cup(P_3\vee K_r)$及$W_n\cup St(m)$的优美性[J].吉林大学学报:理学版,2007,45(4):539-543.

[18] 魏丽侠,张昆龙.几类并图的优美标号[J].中山大学学报:自然科学版,2008,47(3):10-13.

[19] 蔡　华.几类非连通图的优美性[D].长春:吉林大学,2007.

[20] 李国竹,尹淑英.$C_n\cup S_m$ 的优美性[J].科技创新导报,2007,31:96.

[21] 李长春,韩兆红,张国阳.关于 $St\bigcup_{i=1}^{n}m_i-C_4$ 的优美性[J].吉林师范大学学报:自然科学版,2007(4):55-56.

[22] 高　娜.关于$(\overline{k_n}\vee p_m)\cup St(p)$和$(\overline{k_n}\vee p_m)\cup k_{2,s}$的优美性[J].吉林工程技术师范学院学报,2010,26(4):72-73.

Gracefulness of the Graph $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)\cup St(m)$

WU Yue-sheng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: $(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)$-corona of cycle C_7 is written as $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)$, and $St(m)$ indicates $m+1$ vertexes and star graph with m edges. The gracefulness of the graph $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)\cup St(m)$ is discussed. The graceful labelings are given. It also proves that some graphs $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)\cup St(m)$ are special graceful graph.

Key words: disconnected graph; cycle; corona; star; graceful graph

(责任编辑　向阳洁)