文章编号:1007－2985(2012)05－0031－03

马氏利率的离散时间风险模型的破产概率*

朱启香
(河南理工大学数学与信息科学学院,河南 焦作　454003)

摘　要:研究一类保费和理赔额均为随机变量、利率为马氏链的离散时间风险模型的破产概率,推出了有限时间和最终时间破产概率的递归方程,并用归纳法得到最终时间破产概率的上界估计.

关键词:离散时间风险模型;马氏链;破产概率;利率

中图分类号:O211.67　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.3969/j.issn.1007－2985.2012.05.008

经典风险理论中有许多学者研究过破产概率的计算,且在不同情形模型下给出了各自的表达式,但大多都是在一种理想状态下进行,且只研究一种经典的风险模型下的破产概率.基于实际需要,笔者在文献[1]的基础上对其论文模型定义进行了变换.

1　模型介绍

考虑如下离散时间风险模型:

$$U_n=u\prod_{k=1}^{n}(1+I_k)+\sum_{k=1}^{n}\left[(X_k(1+I_k)-Y_k)\prod_{t=k+1}^{n}(1+I_t)\right]\qquad n=1,2,3,\cdots,\tag{1}$$

当 $a>b$ 时,规定 $\prod_{t=a}^{b}x_t=1$,$\sum_{t=a}^{b}x_t=0$.其中:$u\geqslant 0$ 是一个常数,表示保险公司的初始资本;$\{X_k,k=1,2,3,\cdots\}$ 是分布函数为 $F(x)=P(X_1\leqslant x)$ 的非负不可分割的独立同分布的随机变量序列;$\{Y_k,k=1,2,3,\cdots\}$ 是分布函数为 $G(y)=P(Y_1\leqslant y)$ 的不可分割的独立同分布的随机变量序列;$\{I_k,k=1,2,3,\cdots\}$ 是独立于 $\{X_k,k=1,2,3,\cdots\}$ 与 $\{Y_k,k=1,2,3,\cdots\}$ 的随机变量序列.在上述保险风险模型中,X_k,Y_k 分别表示 k 期间(即从 $k-1$ 到 k)内的保费收入和索赔金额,而 I_k 表示 k 期间内的利率,这样(1)式中的 U_k 表示初始资本为 u 的保险公司在 k 期结束时的盈余资本.

接下来在以下的假设下学习模型(1)的破产概率:假设利率 $\{I_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 服从状态空间为 $I=\{i_0,i_1,\cdots,i_N\}$ 的齐次马氏链,且它的跃迁概率为 $P\{I_{n+1}=i_t\mid I_n=i_s\}=P_{st}(s,t=0,1,\cdots,N)$,满足 $\sum_{t=0}^{N}P_{st}=1$,这里 $s=0,1,\cdots,N$.

连续时间风险模型的破产概率的利息影响已经被许多学者研究过,除此之外,许多连续时间风险模型的破产概率可降低到嵌入式离散时间风险模型;另一方面,离散时间风险模型本身无论是在理论上还是在应用上都是一种有趣的随机模型,并且一些连续时间风险模型可以被近似为离散时间风险模型,参见文献[2－3].

风险模型中的破产概率是很难得到的,并且由于利率的存在,除了破产概率的递归公式,破产概率的明确结果也很少得到,另外在风险理论中常用的分析方法就是破产概率的不等式推导,至于风险模型中破产概率的推导公式,笔者得到了当利率是 i.i.d 随机变量时,破产概率在有限和无限时间的渐近公式.进而

* **收稿日期:**2012－07－09
作者简介:朱启香(1982－),女,河南新乡人,硕士,主要从事风险理论研究.

文献[4]得到了一般离散时间风险模型下破产概率的上界不等式.

在(MC)的假设下,初始盈余为 u,给定 $q_0=i_s$,定义有限和无限时间风险模型下的破产概率分别为 $\Psi_n(u,i_s)=P\{\bigcup_{k=1}^{n}(U_k<0)\mid I_0=i_s\}$ 和 $\Psi(u,i_s)=P\{\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k<0)\mid I_0=i_s\}$,这里的 U_k 就是(1)式中的 U_k,从而得到 $\Psi_1(u,i_s)\leqslant\Psi_2(u,i_s)\leqslant\Psi_3(u,i_s)\leqslant\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(u,i_s)=\Psi(u,i_s)$.

2 破产概率的递归与积分方程

下文中用 $\bar{B}(x)=1-B(x)$ 表示分布函数的尾函数 $B(x)$.首先给出 $\Psi_n(u,i_s)$ 的一个递归方程和 $\Psi(u,i_s)$ 的一个积分方程.

定理1 对 $n=1,2,\cdots,\forall u\geqslant 0$,等式

$$\Psi_{n+1}(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\{\bar{G}((u+x)(1+i_t))+\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\Psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\mathrm{d}G(y)\}\mathrm{d}F(x)\quad(2)$$

成立,

$$\Psi_1(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\bar{G}((u+x)(1+i_t))\mathrm{d}F(x),\quad(3)$$

且

$$\Psi(u,i_s)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\{\bar{G}((u+x)(1+i_t))+\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\Psi((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\mathrm{d}G(y)\}\mathrm{d}F(x).\quad(4)$$

证明 给定 $X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t$,由(1)式得到 $U_1=h-y_1$,其中 $h=(u+x)(1+i_t)$.这样,当 $y>h$ 时,有 $P\{U_1<0\mid X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t,I_0=i_s\}=1$,这意味着对于 $y-z>h$,

$$P\{\bigcup_{k=1}^{n+1}(u_k<0)\mid X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t,I_0=i_s\}=1;$$

且当 $0\leqslant y\leqslant h$ 时,有 $P\{U_1<0\mid X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t,I_0=i_s\}=0$,这意味着对于 $0\leqslant y\leqslant h$,

$$P\{\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t,I_0=i_s\}=P\{\bigcup_{k=2}^{n+1}[(h-y)\prod_{i=2}^{k}(1+I_i)+\sum_{i=2}^{k}(X_i(1+I_i)-Y_i)\prod_{i=2}^{k}(1+I_t)]<0\mid I_1=i_t\}=\Psi_n(h-y,i_t)=\Psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t).$$

同样,让(2)式中的 $n\to\infty$,就得到了 $\Psi(u,i_s)$ 的积分方程(4).

因此,用 X_1,Y_1,I_1 表示,得到

$$\Psi_{n+1}(u,i_s)=P\{\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s\}=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}P\{\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid X_1=x,Y_1=y,I_1=i_t,I_0=i_s\}\mathrm{d}G(y)\mathrm{d}F(x)=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\{\bar{G}((u+x)(1+i_t))+\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\Psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\mathrm{d}G(y)\}\mathrm{d}F(x).$$

进而,(3)式可变为

$$\Psi_1(u,i_s)=P\{Y_1>(u+X_1)(1+I_1)\mid I_0=i_s\}=\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\bar{G}((u+x)(1+i_t))\mathrm{d}F(x).$$

这就完成了定理1的证明.这个定理的证明方法类似于文献[5],在那里他们用信贷风险讨论了离散时间风险模型.

3 破产概率的上限

这里,利用递归方程(2),(3)式得到 $\Psi(u,i_s)$ 的一个上限.

引理1 假设 $E[Y_1-X_1(1+I_1)\mid I_0=i_s]<0$,那么对于 $s=0,1\cdots,N$,存在常数 $k>0$,满足 $E(\exp\{R(Y_1-X_1(1+I_1))\}I_0=i_s)=1$.

定理2 在引理1的条件下,对于 $u\geqslant 0$,

$$\Psi(u,i_s) \leqslant \alpha E(\exp\{RY_1\})E(\exp\{-R(u+X_1)(1+I_1)\} \mid I_0=i_s) \leqslant \alpha e^{-Ru}, \tag{5}$$

其中 $\alpha^{-1}=\inf_{t\geqslant 0}\int_t^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)/(\exp\{Rt\}\bar{G}(t))(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$.

证明 对 $\forall x \geqslant 0$,有

$$\bar{G}(x)=\left(\frac{\int_x^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)}{\exp\{Rx\}\bar{G}(x)}\right)^{-1}\exp\{-Rx\}\int_x^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)\leqslant\alpha\exp\{-Rx\}\int_x^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)\leqslant$$
$$\alpha\exp\{-Rx\}E(\exp\{RY_1\}),$$

从而由(3)式,$\Psi_1(u,i_s)\leqslant\alpha E(\exp\{RY_1\})E(\exp\{-R(u+X_1)(1+I_1)\}\mid I_0=i_s)$.

假设 $u\geqslant 0$,根据归纳假设,得到

$$\Psi_n(u,i_s)\leqslant\alpha E(\exp\{RY_1\})E(\exp\{-R(u+X_1)(1+I_1)\}\mid I_0=i_s). \tag{6}$$

因为 $1+I_1\geqslant 1$,所以

$$\Psi_n((u+x)(1+i_t)-y,i_t)\leqslant\alpha E(\exp\{RY_1\})E(\exp\{-R[(u+x)(1+i_t)-y+X_1](1+I_1)\}\mid I_0=i_s)=\alpha E(\exp\{-R[(u+x)(1+i_t)-y](1+I_1)\}\mid I_0=i_s)\leqslant\alpha\exp\{-R[(u+x)(1+i_t)-y]\},$$

$$\Psi_{n+1}(u,i_s)\leqslant\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\{\alpha\exp\{-R(u+x)(1+i_t)\}\int_{(u+x)(1+i_t)}^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)+\int_0^{(u+x)(1+i_t)}\alpha\exp\{-R[(u+x)(1+i_t)-y]\}\mathrm{d}G(y)\}\mathrm{d}F(x)=$$
$$\sum_{t=0}^{N}P_{st}\int_0^{\infty}\{\alpha\exp\{-R(u+x)(1+i_t)\}\int_0^{\infty}\exp\{Ry\}\mathrm{d}G(y)\}\mathrm{d}F(x)\leqslant$$
$$\alpha E(\exp\{RY_1\})E(\exp\{-R(u+X_1)(1+I_1)\}\mid I_0=i_s)\leqslant\alpha e^{-Ru}.$$

故对于 $n=1,2,\cdots$,(6)式得证.

进而,让(6)式中的 $n\to\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(u,i_s)=\Psi(u,i_s)$ 且 $1+I_1\leqslant 1$,即可证得(5)式也是成立的.

参考文献:

[1] LI Na-zhi,LIU Qing-ing. Ruin Probabilities for Discrete Time Risk Models with Markov Interest Rates[J]. Mathematical Theory and Applications,2001,29(4):6-9.

[2] GRANELL J. Aspects of Risk Theory [M]. New York:Springer-Verlag,1991.

[3] ASMUSSEN S. Ruin Probabilities [M]. Singapore:World Scientific,2000.

[4] JUN Cai. Ruin Probabilities with a Markov Chain Interest Model [J]. Insurance:Mathematics and Ecnomics,2004,35(3):513-525.

[5] DAVID C M DICKSON. Insurance Risk and Ruin [M]. United Kingdom:Cambridge University Press,2005.

[6] YANG H,ZHANG L. Martingale Method for Ruin Probability in an Autoregressive Model with Constant Interest Rate [J]. Prob. Eng. Inf. Sci.,2003,17:183-198.

Ruin Probabilities for Discrete Time Risk Models with Markov Interest Rates

ZHU Qi-xiang

(College of Mathematics and Information Science,Henan Polytechnic University,Jiaozuo 454003,Henan China)

Abstract:A discrete time model with random premium income,random claim amount and Markov interest rates is studied. Recursive and integral equations for its finite and ultimate time ruin probabilities are derived,and a upper bound for the ultimate time ruin probability is obtained by inductive approaches.

Key words:discrete time risk model;Markov chain;ruin probabilities;interest rates

(责任编辑 向阳洁)