第 33 卷　第 6 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 6
2012 年 11 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Nov. 2012

文章编号:1007－2985(2012)06－0019－03

p－幂零群的一个新刻画*

贾　君[1],易小兰[2]

(1. 江苏教育学院如皋分院数学系,江苏 如皋　226500;2. 浙江理工大学理学院,浙江 杭州　310018)

摘　要:称子群 H 在群 G 中弱 S－半置换的,如果 G 存在的一个次正规子群 B,使得 $G=HB$ 且 $H\cap B\leqslant H_{ssG}$,其中 H_{ssG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 S－半置换子群. 利用 Sylow 子群的极大子群的弱 S－半置换性,并结合 Sylow 子群正规化子得到有限群成为 p－幂零群的一个充分条件,推广了近来的一些结果.

关键词:S－置换;S－置换嵌入;弱 S－半置换;p－幂零

中图分类号:O152　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2012.06.005

若子群 H 与 G 的所有 Sylow 可换,则称 H 在 G 中 S－置换(或称为 S－拟正规)[1]. 多年来,群论学者一直对 Kegel 这个重要的概念进行推广. 比如国内的陈重穆教授[2] 称群 G 的子群 H 在 G 中 S－半置换,如果对 G 的任意 Sylow p 子群 P,只要满足$(p,|H|)=1$,就有 $PH=HP$. 再如国外的 Ballester-Bolinches 教授[3] 称群 G 的子群 H 在 G 中 S－置换嵌入(或称为 S－拟正规嵌入)的,如果对于整除 H 的阶的每个素因子 p,H 的 Sylow p－子群也是 G 的某个 S－置换子群的 Sylow p－子群. 笔者在之前研究的基础上,给出了弱 S－半置换子群的新概念. 称群 G 的一个子群 H 在 G 中弱 S－半置换的,如果存在 G 的一个次正规子群 B,使得 $G=HB$ 且 $H\cap B\leqslant H_{ssG}$,其中 H_{ssG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 S－半置换子群(称为 H 在 G 中的 S－半置换核). 最近人们常常利用子群的特性来研究有限群的结构,得到了有限群的许多重要结论[2-9]. 由于 p－幂零群是群论中一种十分重要的群的类型,因此笔者尝试利用 S－置换嵌入子群与弱 S－半置换子群来判断群 G 在什么情况下会成为 p－幂零群.

1　预备知识

引理 1[3]　假设 V 在 G 中 S－置换嵌入,H 是 G 的子群且 K 是 G 的正规子群,则有:

(1) 若 $V\leqslant H$,则 V 在 H 中 S－置换嵌入;

(2) VK/K 在 G/K 中 S－置换嵌入.

引理 2　设 V 在 G 中弱 S－半置换,则下列结论成立:

(1) 若 $V\leqslant L\leqslant G$,则 V 在 L 中弱 S－半置换;

(2) 若设 H 是 G 的正规子群且 $H\leqslant V\leqslant G$,则 V/H 在 G/H 中弱 S－半置换;

(3) 若 V 为 G 的 p－子群且 H 为 G 的正规 p'－子群,则 VH/H 在 G/H 中弱 S－半置换.

引理 3[10]　设 A,B 是 G 的 2 个子群,满足 $G\neq AB$ 且 $AB^x=B^xA$,对所有的 $x\in G$,那么 G 有一个真正规子群 H 使得 $A\leqslant H$ 或者 $B\leqslant H$.

引理 4[4]　设子群 V 在 G 中 S－置换,P 是 V 的一个 Sylow p－子群,其中 p 是一个素数. 若 V 在 G 中的正规核 $V_G=1$,则 P 在 G 中 S－置换.

引理 5[11]　设 V 是 G 的一个 p－子群. 若 V 在 G 中 S－置换,则 $O^p(G)$ 是 P 在 G 中的正规化子 $N_G(P)$ 的子群.

* **收稿日期**:2012－10－06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11101369)

作者简介:贾　君(1981－),男,江苏如皋人,江苏教育学院如皋分院数学系讲师,主要从事代数学研究;易小兰(1972－),女,湖南常德人,浙江理工大学理学院副教授,博士,主要从事代数学研究.

引理 6[12]　设 p 为群 G 的阶的一个素因子,P 为 G 的一个 Sylow p -子群.若 P 在 G 中的正规化子 $N_G(P)$ 为 p -幂零群且 P 交换,则 G 一定是 p -幂零群.

2　主要结果

定理 1　设 p 是有限群 G 的阶的一个素因子($p>2$),P 是 G 的一个 Sylow p -子群而且 P 在 G 中的正规化子 $N_G(P)$ 为 p -幂零群.若 P 的每个极大子群在 G 中要么弱 S -半置换,要么 S -置换嵌入,则 G 是 p -幂零群.

证明　假设定理不成立,G 为极小阶反例.

(1) G 不是一个非交换的单群.

假设 G 是单群.取 P 的一个极大子群 V.若 V 在 G 中弱 S -半置换,则存在 G 的一个次正规子群 L 使得 $G=VL$ 且 $V\cap L\leqslant(V)_{ssG}$.既然 G 是单群,则 $L=G$,从而 $V=(V)_{ssG}$ 在 G 中 S -半置换,V 与 G 的任意 Sylow q -子群置换.因为双素数阶一定是可解群,所以由引理 3 知 G 非单群,矛盾.若 V 在 G 中 S -置换嵌入,则存在 G 的一个 S -置换子群 K,使得 V 是 K 的 Sylow p -子群.既然 G 是单群,则 $K_G=1$.由引理 4 知 V 在 G 中 S -置换.由引理 5 知 $N_G(V)\geqslant O^p(G)=G$.于是 V 正规于 G,这与 G 是单群矛盾.

(2) 若 D 是包含 P 的 G 的一个子群,则 D 为 p -幂零群.

既然 $N_G(P)$ 为 p -幂零群而 $N_D(P)\leqslant N_G(P)$,则 $N_D(P)$ 也为 p -幂零群.根据引理 1 和引理 2 知 D 的 Sylow p -子群 P 的每个极大子群在 D 中要么弱 S -半置换,要么 S -置换嵌入.这样 D 满足定理的条件.由 G 的极小选择知 D 为 p -幂零群.

(3) G 有唯一的一个极小正规子群 H,使得 G/H 是 p -幂零群.

根据(1),可以设 H 为 G 的一个极小正规子群.下面考虑商群 G/H.假如 $|PH/H|\leqslant p^2$,则 PH/H 交换.根据引理 6,G/H 必然 p -幂零的,因此不妨设 $|PH/H|\geqslant p^3$.设 M_1/H 是 PH/H 的任一极大子群,则 $M_1=M_1\cap PH=(M_1\cap P)H$.令 $V=M_1\cap P$.因为 $p=|PH/H:M_1/H|=|PH:(M_1\cap P)H|=|P:M_1\cap P|=|P:V|$,所以 V 是 P 的极大子群.由定理条件,V 在 G 中要么弱 S -半置换,要么 S -置换嵌入.若 V 在 G 中弱 S -半置换,则存在 G 的一个次正规子群 L 使得 $G=VL$ 且 $V\cap L\leqslant(V)_{ssG}$.既然 $N_{G/H}(PH/H)=N_G(P)H/H$ 而 $N_G(P)$ 是 p -幂零的,则 $N_{G/H}(PH/H)$ 是 p -幂零的.显然 $G/H=(VH/H)(LH/H)$.由于 $V\cap H=M_1\cap P\cap H=P\cap H$ 而 $P\cap H$ 是 H 的 Sylow p -子群,因此($|H:V\cap H|$,$|H:L\cap H|$)$=1$,这样 $(V\cap H)(L\cap H)=H=H\cap VL$,$VH/H\cap LH/H=(VH\cap LH)/H=(V\cap L)H/H\leqslant(V)_{ssG}H/H$.由文献[5]中命题 2 知 $(V)_{ssG}H/H$ 在 G/H 中 S -半置换,因此 M_1/H 在 G/H 中弱 S -半置换.若 V 在 G 中 S -置换嵌入,则由引理 2 知 M_1/H 也在 G/H 中 S -置换嵌入.又 LH/H 是 G/H 的次正规子群,从而 G/H 满足定理的条件.由 G 的极小选择知 G/H 是 p -幂零群.若还有 G 的另一极小正规子群 N,则同样可得 G/N 是 p -幂零群.于是 $G\cong G/(H\cap N)\leqslant G/H\times G/N$ 是 p -幂零群,产生矛盾.

(4) $O_{p'}(G)=1$.

若 $O_{p'}(G)\neq 1$,由(3)知 $H\leqslant O_{p'}(G)$,从而 $G/O_{p'}(G)\cong(G/H)/(O_{p'}(G)/H)$ 是 p -幂零,于是 G 是 p -幂零的,产生矛盾.

(5) G 的 Frattini 子群 $\Phi(G)=1$.

若 $\Phi(G)\neq 1$,则根据(3)H 应该包含在 $\Phi(G)$ 中.于是 $G/\Phi(G)\cong(G/H)/(\Phi(G)/H)$ 是 p -幂零的,从而 G 是 p -幂零的,产生矛盾.

(6) $G=PQ$ 为可解群.

既然 G 不是 p -幂零群,则 P 一定存在一个非平凡特征子群 D 而且 $N_G(D)$ 不是 p -幂零的.若 $N_G(D)<G$,注意到 $P\leqslant N_G(D)$,根据(2)可得 $N_G(D)$ 是 p -幂零的,产生矛盾.因此有 $N_G(D)=G$,从而 $O_p(G)\neq 1$.再根据(3)知 $G/O_p(G)$ 是 p -幂零的,当然也 p -可解.因此有 G 是 p -可解的.从而对于 G 任意不同于 p 的素因子 q,存在 G 的一个 Sylow q -子群 Q 满足 PQ 成群.令 $F=PQ$.若 F 是 G 的真子群,则根据(2),F 是 p -幂零的.再由文献[13]中定理 9.3.1 有 $Q\leqslant C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$,产生矛盾.因此必须有 $G=PQ$ 为可解群.

(7) 导出矛盾.

由(5)知存在 G 的一个极大子群 M,使得 $G=HM$ 且 $M\cap H=1$,从而 $F(G)=F(G)\cap HM=H(F(G)\cap M)$.因为 $H\leqslant O_p(G)\leqslant F(G)\leqslant C_G(H)$,所以 $F(G)\cap M$ 是 G 的正规子群,因此 $F(G)\cap M=1$,从而 $H=O_p(G)=F(G)$.注意到 $P\cap M<P$,所以可取 P 的一个极大子群 V 使得 $P\cap M$ 包含在 V 中,从而 $P=HV$.若 $P\cap M=1$,则 $P=H$.根据定理条件 $N_G(P)=G$ 为 p -幂零的,产生矛盾.以下设 $P\cap M\neq 1$.由定理假设,V 在 G 中要么弱 S -半置换,要么 S -置换嵌入.

第 1 种情况:V 在 G 中弱 S -半置换.于是存在 G 的一个次正规子群 L 使得 $G=VL$ 且 $V\cap L\leqslant(V)_{ssG}$.由于 $|G:L|$

是 p 的方幂,L 次正规于 G,因此 $O^p(G) \leqslant L$. 注意到 H 的唯一性,必然有 H 包含在 L 中. 于是 $V \cap H = V \cap L \cap H \leqslant (V)_{ssG} \cap H \leqslant V \cap H$,从而 $H \cap V = H \cap (V)_{ssG}$. 设 Q 是 G 的任意 Sylow q -子群(其中 $q \neq p$),则 $(V)_{ssG}Q = Q(V)_{ssG}$ 成群. 因为 $H \cap (V)_{ssG} = H \cap (V)_{ssG}Q$ 而 H 正规与 G,所以 $Q \leqslant N_G(H \cap (V)_{ssG}) = N_G(H \cap V)$. 另外,$P \leqslant N_G(H \cap V)$,因此 $N_G(H \cap V) = G$. 由 H 的唯一极小正规性,必有 $H \cap V = 1$ 或 $H \cap V = H$. 首先假设 $H \cap V = 1$. 因为 $|H:V \cap H| = |HV:V| = |P:V| = p$,所以 $V \cap H$ 是 H 的极大子群,从而 H 是 p 阶循环群,于是 H 的自同构群 $\mathrm{Aut}(H)$ 为 $p-1$ 阶循环群. 若 $q < p$,由于 $M \cong G/H = N_G(H)/C_G(H) \leqslant \mathrm{Aut}(H)$,因此 M 是循环群,Q 也是循环群,从而 G 是 q -幂零群,P 正规于 G. 根据定理条件 $N_G(P) = G$ 为 p -幂零群,产生矛盾. 若 $q > p$,则 HQ 为 p -幂零群,从而 $Q \leqslant C_G(H) = H$,产生矛盾. 现在假设 $H \cap V = H$,即 $H \leqslant V$,从而 $P = HV = V$,产生矛盾.

第 2 种情况:V 在 G 中 S -置换嵌入. 于是存在 G 的一个 S -置换 K,使得 V 为 K 的 Sylow p -子群. 若 $K_G \neq 1$,由 H 的唯一极小正规性 $H \leqslant K_G \leqslant K$,从而 $H \leqslant V$. 于是 $P = HV = V$,产生矛盾. 若 $K_G = 1$,则由引理 4,V 在 G 中 S -置换. 再根据引理 5,$O^p(G) \leqslant N_G(V)$,进而 V 正规于 $PO^p(G) = G$. 由 H 的极小正规性,则 $H \leqslant V$,从而 $P = HV = V$,产生矛盾.

参考文献:

[1] KEGEL O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Math. Z,1962,78:205 - 221.

[2] 陈重穆. 关于 Srinivasan 的一个定理 [J]. 西南师范大学:自然科学版,1987,12(1):1 - 4.

[3] BALLESTER-BOLINCHES A,PEDRAZA-AGUILERA M C. Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups [J]. J. Pure. Appl. Algebra,1998,127:113 - 118.

[4] LI Yang-ming,WANG Yan-ming,WEI Hua-quan. On p-Nilpotency of Finite Groups with Some Subgroups π-Quasinormally Embedded [J]. Acta. Math. Hungar,2005,108(4):283 - 298.

[5] 张勤海,王丽芳. S -半置换子群对群结构的影响 [J]. 数学学报,2005,48(1):81 - 88.

[6] 贾　君,於　道. 关于 F-Z -可补子群的一个注记 [J]. 高师理科学刊,2011,31(4):3 - 4.

[7] 刘　秀,韦华全,刘小春. 弱 C^* -正规子群与有限群的 p -幂零性 [J]. 广西科学,2008,15(4):325 - 329.

[8] 游兴中,刘　峥,朱伟华. 恰有 7 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011,32(5):11 - 15.

[9] 吴建平. 关于 c -正规与有限群的可解性 [J]. 吉首大学学报:自然科学版,2010,31(5):11 - 13.

[10] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-New York:Springer-Verlag,1967.

[11] SCHMIDT P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups [J]. J. Algebra,1998,207:285 - 293.

[12] LI Chang-wen. The Influence of Φ-S-Supplemented Subgroups on the Structure of Finite Groups [J]. J. Algebra Appl.,2012,11(4):1250064.

[13] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York-Berlin:Springer-Verlag,1993.

New Characterization of p-Nilpotent Group

JIA Jun[1],YI Xiao-lan[2]

(1. Department of Mathmatics,Rugao Branch of Jiangsu Institute of Education,Rugao 226500,Jiangsu China;
2. School of Science,Zhejiang Sci-Tech University,Hangzhou 310018,China)

Abstract:A subgroup H of group G is said to be weakly S-semipermutabe in G if there exists a subnormal subgroup B of G such that $G = HB$ and $H \cap B \leqslant H_{ssG}$,where H_{ssG} is the maximal S-semipermutable subgroup of G contained in H. By using the weakly S-semipermutability of the maximal subgroups of the Sylow subgroup and combining the normalizer of Sylow subgroup,a sufficient condition for a finite group to be p-nilpotent is obtained and some recent results can be generalized.

Key words:S-permutable;S-permutably embedded;weakly S-semipermutable;p-nilpotent

(责任编辑　向阳洁)