文章编号:1007-2985(2012)04-0011-05

法曲率最值的直接求法*

邢家省

(北京航空航天大学数学与系统科学学院,数学、信息与行为教育部重点实验室,北京 100191)

摘 要:考虑曲面上法曲率最值和最值方向的直接求法问题,给出了直接的导出方法,并得到了它是特征值、特征向量的性质.

关键词:法曲率的最值;最值方向;特征值;特征向量

中图分类号:O186.11 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2012.04.003

对曲面上法曲率最值的研究,一般是通过曲面上的垂直和共扼的方向——主方向,再运用欧拉公式证明主方向上的法曲率分别是最大值和最小值,进而引入高斯曲率和平均曲率及其计算公式[1-2].这种方法不直接,引入与转换过程较长.笔者发现,可以有更直接的方法得到法曲率最值并取到最值方向,且得到它是对应的特征值和特征向量的性质.

1 法曲率的最大值、最小值的直接求法

曲面 Σ:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一点 P 沿一方向(d)$=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 上的法曲率 k_n[1] 为

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L(\mathrm{d}u)^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}.\tag{1}$$

现考虑法曲率 k_n 的最大值、最小值的求法问题.设 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$,则有

$$k_n=\frac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}.\tag{2}$$

这样一来,所求问题(1) 转化为求二次分式的极值问题.

将(2) 式化为一元二次方程 $L\lambda^2+2M\lambda+N-k_n(E\lambda^2+2F\lambda+G)=0$,即 $(L-k_nE)\lambda^2+2(M-k_nF)\lambda+N-k_nG=0$.此二次方程有根,当且仅当

$$(M-k_nF)^2-(L-k_nE)(N-k_nG)\geqslant 0,$$
$$-(EG-F^2)k_n^2+(LG-2MF+NE)k_n-(LN-M^2)\geqslant 0.$$

设 $k_1,k_2(k_1\leqslant k_2)$ 是方程

$$-(EG-F^2)k_n^2+(LG-2MF+NE)k_n-(LN-M^2)=0\tag{3}$$

的 2 个根,则有 $k_1\leqslant k_n\leqslant k_2$,于是 k_n 的最大值、最小值分别为 k_2,k_1,且由方程(3) 所解出.

由韦达定理,可得

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},k_1+k_2=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}.$$

* **收稿日期**:2012-05-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171013)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,北京航空航天大学数学与系统科学学院副教授,博士,主要从事偏微分几何、微分几何研究.

将 $k_n=k_1,k_2$ 代入 $k_n=\dfrac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}$,解出 2 个根 λ_2,λ_1,就得到使 k_n 达到最大值、最小值的方向.

方程(3) 的判别式为

$$\Delta=(LG-2MF+NE)^2-4(EG-F^2)(LN-M^2)=\left[(NE-LG)-\frac{2F}{E}(ME-LF)\right]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(ME-LF)^2\geqslant 0,$$

故当且仅当 $NE-LG=ME-LF=0$ 时,判别式为 0,即

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}. \tag{4}$$

满足(4) 式的点称为脐点,否则称为非脐点.

所以,在一个非脐点,判别式 $\Delta>0$,方程(3) 总有 2 个不相等的实根,曲面在这一点总有 2 个不相等的法曲率,且分别是法曲率的最大值和最小值. 在脐点,若令 $L=\lambda E,M=\lambda F,N=\lambda G$,则任意方向的法曲率 $k_n=\lambda$ 常数,而方程(3) 变为$(k_n-\lambda)^2=0$,但这个关系无非表示任意方向的法曲率相等.

2　高斯(Gauss) 曲率、平均曲率

设 k_2,k_1 分别为曲面上一点处法曲率的最大值、最小值,则将它们的乘积 k_1k_2 称为曲面在这一点的高斯(Gauss) 曲率,通常以 K 表示,$K=k_1k_2$,它描述了曲面在一点处总的弯曲程度,又称为总曲率或全曲率;它们的平均数$\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)$ 称为曲面在这一点的平均曲率,通常以 H 表示,$H=\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)$,它描述了曲面在一点处的平均弯曲程度,又称为中曲率.

由方程(3) 及韦达定理,得

$$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)},k_n^2-2Hk_n+K=0.$$

例 1　求正螺面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,bv)$ 的主曲率、总曲率和全曲率.

解　直接计算得到螺面的第一基本形式和第二基本形式分别为 $\mathrm{I}=(\mathrm{d}u)^2+(u^2+b^2)(\mathrm{d}v)^2$,$\mathrm{II}=\dfrac{-2b}{\sqrt{u^2+b^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,由此便知正螺面上所有点都是非脐点,于是其上每点处都有 2 个不相等的法曲率. 将基本量代入法曲率的计算公式,得到 $k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2}$,因为 $|2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v|\leqslant|M|\dfrac{1}{\sqrt{EG}}[E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2]$,所以 $-|M|\dfrac{1}{\sqrt{EG}}\leqslant k_n\leqslant|M|\dfrac{1}{\sqrt{EG}}$,从而正螺面上法曲率的最大值、最小值、总曲率和平均曲率分别为

$$k_2=\frac{|b|}{(u^2+b^2)},k_1=-\frac{|b|}{(u^2+b^2)},K=k_1k_2=\frac{-M^2}{EG}=-\frac{b^2}{(u^2+b^2)^2},H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0.$$

设曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的第一基本形式和第二基本形式分别为 $\mathrm{I}=E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2$,$\mathrm{II}=L(\mathrm{d}u)^2+N(\mathrm{d}v)^2$,从而

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L(\mathrm{d}u)^2+N(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2}=\frac{L}{E}\frac{E(\mathrm{d}u)^2}{E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2}+\frac{N}{G}\frac{G(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2},$$

则有 $\min\{\dfrac{L}{E},\dfrac{N}{G}\}\leqslant k_n\leqslant\max\{\dfrac{L}{E},\dfrac{N}{G}\}$,于是 $k_1=\min\{\dfrac{L}{E},\dfrac{N}{G}\}$,$k_2=\max\{\dfrac{L}{E},\dfrac{N}{G}\}$. 将基本量代入,得到 $K=k_1k_2=\dfrac{LN}{EG}$,$H=\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)=\dfrac{LG+NE}{2EG}$.

3　法曲率取到最值的方向及其正交和共轭性质

将 $k_n=\dfrac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}$ 代入方程(3),得到

$$f(\lambda)=-(EG-F^2)(L\lambda^2+2M\lambda+N)^2+(LG-2MF+NE)(L\lambda^2+2M\lambda+N)\cdot(E\lambda^2+2F\lambda+G)-(LN-M^2)(E\lambda^2+2F\lambda+G)^2=0. \tag{5}$$

经过计算,方程(5)可化为 $g(\lambda)=[(ME-LF)\lambda^2+(NE-LG)\lambda+NF-MG]^2=0$. 事实上,利用待定系数法,经计算可知 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$, $f''(0)=g''(0)$, $f'''(0)=g''(0)$, $f^{(4)}(0)=g^{(4)}(0)$,于是有 $f(\lambda)=g(\lambda)$. 故得使法曲率取到最值的方向为

$$(ME-LF)\lambda^2+(NE-LG)\lambda+NF-MG=0. \tag{6}$$

(6)式还能写成如下形式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

将 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ 代入(7)式,则有

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{d}v)^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & (\mathrm{d}u)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0,$$

$$(ME-LF)(\mathrm{d}u)^2+(NE-LG)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(NF-MG)(\mathrm{d}v)^2=0. \tag{8}$$

这给出曲面上的 2 族曲线,曲线上的方向使法曲率达到最值.

再给出另一种推演方法如下:在法曲率取到极值的方向 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ 处,有

$$\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\lambda}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{(L\lambda^2+2M\lambda+N)'(E\lambda^2+2F\lambda+G)-(L\lambda^2+2M\lambda+N)(E\lambda^2+2F\lambda+G)'}{(E\lambda^2+2F\lambda+G)^2},$$

$$(L\lambda^2+2M\lambda+N)'(E\lambda^2+2F\lambda+G)-(L\lambda^2+2M\lambda+N)(E\lambda^2+2F\lambda+G)'=0,$$

$$(L\lambda+M)(E\lambda^2+2F\lambda+G)-(L\lambda^2+2M\lambda+N)(E\lambda+F)=0,$$

$$k_n=\frac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}=\frac{L\lambda+M}{E\lambda+F}.$$

化简后,得到 $(ME-LF)\lambda^2+(NE-LG)\lambda+NF-MG=0$.

方程(6)的判别式为

$$\Delta=(NE-LG)^2-4(ME-LF)(NF-MG)=\left[(NE-LG)-\frac{2F}{E}(ME-LF)\right]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(ME-LF)^2\geqslant 0,$$

所以当且仅当 $NE-LG=ME-LF=0$ 时,判别式为 0,即 $\dfrac{L}{E}=\dfrac{M}{F}=\dfrac{N}{G}$.

所以,在一个非脐点,判别式 $\Delta>0$,方程(6)总有 2 个不相等的实根,曲面在这一点总有 2 个不相同的方向,法曲率在这 2 个方向分别达到最大值和最小值. 在脐点处,方程(6)变成恒等式,即任意方向上的法曲率相等.

定理 1 曲面在非脐点处,使法曲率分别达到最大值和最小值的方向互相垂直.

要证明这个定理,只要应用以下引理于方程(8):

引理 1 曲面上一点由方程 $P(\mathrm{d}u)^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R(\mathrm{d}v)^2=0$ 所确定的 2 个切方向互相垂直的充要条件是 $ER-2FQ+GP=0$,这里 E,F,G 是曲面的第 1 类基本量.

证明 2 个方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ ($\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$) 和 $\delta u:\delta v$ ($\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$) 正交的充要条件是 $E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0$. 换一种写法,即

$$E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\delta u}{\delta v}+F\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+G=0. \tag{9}$$

将已知的二次方程写成 $P(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v})^2+2Q\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+R=0$,则它的2个根记为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$,$\frac{\delta u}{\delta v}$,均应满足方程(9).由根与系数的关系知,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\delta u}{\delta v}=\frac{R}{P},\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{2Q}{P}. \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式,即得引理1.

对方程(8),有

$$ER-2FQ+GP=E(NF-MG)-F(NE-LG)+G(ME-LF)=0,$$

所以曲面在非脐点处,使法曲率分别达到最大值和最小值方向互相垂直.

曲面上2个方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 和 $\delta u:\delta v$ 称为共轭方向,如果

$$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=L\,\mathrm{d}u\delta u+M(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N\mathrm{d}v\delta v=0.$$

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v,\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$,有 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=-(L\,\mathrm{d}u\delta u+M(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N\mathrm{d}v\delta v)$.

曲面上2个方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v(\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)$ 和 $\delta u:\delta v(\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)$ 称为曲面上的共轭方向,如果有 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$,或者 $L\,\mathrm{d}u\delta u+M(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N\mathrm{d}v\delta v=0$.

换一种写法,即 $L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\delta u}{\delta v}+M(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v})+G=0$.

前面已证曲面上的使法曲率取到最值的方向正交,现证这2方向共轭.

事实上,将方程(8)的2根$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$,$\frac{\delta u}{\delta v}$写出,再由根与系数的关系知,

$$L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\delta u}{\delta v}+M(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v})+G=\frac{1}{ME-LF}[L(NF-MG)-M(NE-LG)+N(ME-LF)]=0,$$

所以曲面上2个最值方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v(\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)$ 和 $\delta u:\delta v(\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)$ 是曲面上的共轭方向.

这样一来,曲面上使法曲率分别达到最大值和最小值的2个方向必互相垂直,且互为共轭方向,即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$.

4 法曲率最值的特征值及特征向量性质

现考虑法曲率 k_n 的最值和最值方向的特征值、特征向量性质.

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$,则有

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L(\mathrm{d}u)^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2}=\frac{(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}}{(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}}.$$

因此,最大值、最小值问题转化为讨论 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 在条件 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=1$ 下的最大值、最小值问题.

因为 $S=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2:\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=1\}$ 是有界闭集,$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 在 S 上连续,所以 $f(\boldsymbol{X})$ 在 S 上存在最大值 k_M 和最小值 k_m.

存在 $\boldsymbol{X}_M,\boldsymbol{X}_m\in S$,使得 $f(\boldsymbol{X}_M)=k_M,f(\boldsymbol{X}_m)=k_m$.记 $\|\boldsymbol{X}\|=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}}$.对任意的实数 t 及 $h\in\mathbf{R}^2$ 都有 $f\left(\frac{\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h}\|}\right)\leqslant k_M$,展开计算,得

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h}\|^2}(\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h})\leqslant k_M,$$

$$(\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h})\leqslant k_M\|\boldsymbol{X}_M+t\boldsymbol{h}\|^2,$$

$$\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_M+2t\boldsymbol{X}_M{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}+t^2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\leqslant k_M(\boldsymbol{X}_M{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_M+2t\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+t^2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}),$$

$$2t\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}+t^2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\leqslant k_M(2t\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+t^2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}).$$

对 $t>0$ 时,有 $2\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}+t\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}\leqslant k_M(2\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}+t\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah})$,令 $t\to 0^+$,得 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}\leqslant k_M\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}$;对 $t<0$ 时,有 $2\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}+t\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}\geqslant k_M(2\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}+t\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah})$,令 $t\to 0^-$,得 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}\geqslant k_M\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}$. 故有 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bh}=k_M\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}$(任意 $\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^2$),从而 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=k_M\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{BX}_M=k_M\boldsymbol{AX}_M$,$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX}_M=k_M\boldsymbol{X}_M$.

同理可证 $\boldsymbol{BX}_m=k_m\boldsymbol{AX}_m$,$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX}_m=k_m\boldsymbol{X}_m$.

方程组$(\boldsymbol{B}-k_M\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_M=0$,$(\boldsymbol{B}-k_m\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_m=0$,有非零解当且仅当 $|\boldsymbol{B}-k_M\boldsymbol{A}|=0$, $|\boldsymbol{B}-k_m\boldsymbol{A}|=0$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{A}|=\left|\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix}=(L-\lambda E)(N-\lambda G)-(M-\lambda F)^2=$$
$$(EG-F^2)\lambda^2-(LG-2MF+NE)\lambda+(LN-M^2),$$

k_M,k_m 满足$(EG-F^2)\lambda^2-(LG-2MF+NE)\lambda+(LN-M^2)=0$,即是该方程的根.

由韦达定理,得 $k_Mk_m=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$,$k_M+k_m=\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$. $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{A}|=0$ 等价于 $|\lambda E-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=0$,$k_M$,$k_m$ 是特征方程 $|\lambda E-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=0$ 的 2 个根,所以有 $k_Mk_m=\det(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=\dfrac{\det\boldsymbol{B}}{\det\boldsymbol{A}}$,$k_M+k_m=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$. 于是 $K=\dfrac{\det\boldsymbol{B}}{\det\boldsymbol{A}}$,$H=\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$. 容易验证这与前面的一致,便于记忆使用和推导使用[3-4].

当 $k_M\neq k_m$ 时,有 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}_m=k_M\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_m$,$\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}_m=k_m\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_m$,由此可得 $\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_m=0$,$\boldsymbol{X}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}_m=0$,即 2 方向 $\boldsymbol{X}_M$,$\boldsymbol{X}_m$ 垂直且共扼.

设 $\boldsymbol{X}_M=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}_m=\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}$,则有$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=0$,$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=0$. 于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$,$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$,即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\delta\boldsymbol{r}$ 是曲面上垂直、共扼的切方向.

由$(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v,F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=0$,$(L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v,M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=0$,利用齐次方程组存在非零解的充要条件,得到

$$\begin{vmatrix}E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v & F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v\\ L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v\end{vmatrix}=0,$$
$$(ME-LF)(\mathrm{d}u)^2+(NE-LG)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(NF-MG)(\mathrm{d}v)^2=0. \tag{11}$$

容易验证,(11) 式还能写成如下形式:

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{d}v)^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & (\mathrm{d}u)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0.$$

参考文献:

[1]　梅向明,黄敬之. 微分几何 [M]. 第 4 版. 北京:高等教育出版社出版,2008:87-105.

[2]　马　力. 简明微分几何 [M]. 北京:清华大学出版社,2004:27-38.

[3]　宋占奎. 曲面的第三基本形式研讨 [J]. 吉林化工学院学报,2006,23(4):79-82.

[4]　傅朝金,何汉林. 曲面的三个基本形式的系数矩阵之间关系的证明及其应用 [J]. 海军工程大学学报,2002,24(3):5-7.

Direct Method of Findigthe Extreme Value of Normal Curvature

XING Jia-sheng

(College of Mathematics and System Science,LMIB of the Ministry of Education,Beihang University,Beijing 100191,China)

Abstract:The direct method of finding the extreme value of normal curvature and the extreme value direction are considered. A direct derivation method is proposed,and its properties as matrix characteristic value and characteristic vector are obtained.

Key words:extreme value of normal curvature;direction of the extreme value;characteristic value;characteristic vector

(责任编辑　向阳洁)