文章编号:1007-2985(2012)04-0006-05

时标上 2 阶动态方程非线性边值问题*

钟文勇
(吉首大学数学与统计学院,湖南 吉首 416000)

摘 要:研究了时标上一类 2 阶动态方程的非线性边值问题,利用 2 个算子和的不动点定理,得到非线性边值问题至少存在 1 个解的充分条件.

关键词:时标;动态方程;非线性边值问题;不动点
中图分类号:O175.8 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1007-2985.2012.04.002

时标及时标上的微积分理论主要目的在于"统一与推广",即统一和推广现有的微积和差分以及常微分方程和差分方程的理论[1].目前,这一理论正得到迅速发展.因为,一方面,它统一和推广了经典的微分和差分理论,另一方面,时标上动态方程的研究也在真实现象和过程的数学模型中具有重要应用[2],例如时标上的种群动力学、流行病模型、金融消费过程的数学模型等[3-4].总之,时标和时标上的动态方程理论有广阔的应用前景.近年来,时标上动态方程的边值问题的研究一直是该类系统研究的重要问题之一,并得到一些结果,但是,关于时标上动态方程的非线性边值问题的结果很少[5],有待进一步研究.

笔者主要研究如下时标上 2 阶非线性边值问题:

$$\begin{cases}-x^{\Delta\Delta}(t)=f(t,x(t)) \qquad t\in[a,b]_{\mathbb{T}},\\ x^{\Delta}(\sigma(b))=c_1+g_1(x^{\Delta}),\\ x(a)=c_2+g_2(x).\end{cases} \tag{1}$$

其中:$f(t,x)$ 是定义在$\mathbb{T}\times\mathbf{R}$ 上的实值函数,$\mathbb{T}$ 为时标,$\mathbf{R}$ 表示全体实数集;g_1,g_2 为定义在给定的函数空泛函.

1 预备知识

一个时标$\mathbb{T}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个任意闭子集,它具有由 $\mathbf{R}$ 诱导的拓扑即顺序关系.本节的主要内容参考文献[2].

定义 1 设 $t\in\mathbb{T}$,定义前跃算子 $\sigma:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{T}$ 和后跃算子 $\rho:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{T}$ 分别为

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\},\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}.$$

规定 $\inf\varnothing=\sup\mathbb{T}$,$\sup\varnothing=\inf\mathbb{T}$.

设 $t\in\mathbb{T}$,若 $\sigma(t)=t$,则 t 称为右稠密点;若 $\sigma(t)>t$,则 t 称为右扩散点;若 $\rho(t)=t$,则 t 称为左稠密点;若 $\rho(t)>t$,则 t 称为左扩散点.为了度量时标上相邻点的位置关系,定义尺度函数 $\mu:\mathbb{T}\mapsto\mathbf{R}$ 为 $\mu(t)=\sigma(t)-t$.

* **收稿日期:**2012-04-25
基金项目:湖南教育厅科学研究项目(10C1125)
作者简介:钟文勇(1963-),男,湖南吉首人,吉首大学数学与统计学院副教授,博士,主要从事微分方程研究.

设 $a,b\in\mathbb{T}$，定义$\mathbb{T}$中的闭区间为$[a,b]_{\mathbb{T}}=\{t\in\mathbb{T}:a\leqslant t\leqslant b\}$. $\mathbb{T}$中的其他类型的区间可类似定义.

定义 2　若 x 在 T 上的右稠密点 t 连续，在左稠密点 t，极限 $\lim\limits_{s\to t-}x(s)$ 存在且有限，则称 x 在 T 上右稠连续，并记为 $x\in C_{rd}$.

现介绍时标上的Δ-导数、Δ微积分的定义. 由$\mathbb{T}$可定义集合$\mathbb{T}^k$：若 $\sup\mathbb{T}<\infty$，则$\mathbb{T}^k=\mathbb{T}\backslash(\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}]$；若 $\sup\mathbb{T}=\infty$，则$\mathbb{T}^k=\mathbb{T}$.

定义 3　假设 $f:\mathbb{T}\mapsto\mathbf{R}$，对于给定的 $t\in\mathbb{T}^k$，若存在 $\gamma(t)\in\mathbf{R}$，对任意给定的 $\epsilon>0$，存在 t 的邻域 U_T 使得对任意 $s\in U_T$，不等式

$$|(f(\sigma(t))-f(s))-\gamma(t)(\sigma(t)-s)|\leqslant\epsilon|\sigma(t)-s|,$$

成立，则称 $\gamma(t)$ 为函数 f 在 t 点的 Δ-导数，并记 $f^{\Delta}(t)=\gamma(t)$.

记 $\sigma^0(b)=b,\sigma^1(b)=\sigma(b),\sigma^2(b)=\sigma(\sigma(b)),I_i=[a,\sigma^i(b)]_T(i=0,1,2)$. $C(I)$ 表示定义在区间 I 上全体实值连续函数构成的空间，$\|\cdot\|_I$ 表示 $C(I)$ 的上确界范数，即 $\|x\|_I=\sup\limits_{t\in I}|x(t)|$. 再记

$$C^{\Delta}(I_2)=\{x:x\in C(I_2),x^{\Delta}\in C(I_1)\},$$

则 $C^{\Delta}(I_2)$ 在范数 $\|x\|=\max\{\|x^{\Delta}\|_{I_1},\|x\|_{I_2}\}$ 下成为 Banach 空间.

设 $g_1:C(I_1)\mapsto\mathbb{T},g_2:C^{\Delta}(I_2)\mapsto\mathbf{R}$ 是给定的泛函.

定义 4　若 $x\in C^{\Delta}(I_2),x^{\Delta\Delta}(t)\in C_{rd}(I_0)$，并且(1) 式成立，则称 $x(t)$ 为边值问题(1) 的解.

引理 1[6]　设 B 是 Banach 空间，U 是 B 的凸闭子集 V 中的开集，假设 $0\in U$，$\mathscr{T}(\overline{U})$ 有界，$\mathscr{T}=\mathscr{T}_1+\mathscr{T}_2:\overline{U}\mapsto V$，其中 $\mathscr{T}_1:\overline{U}\mapsto B$ 是全连续算子，$\mathscr{T}_2:\overline{U}\mapsto B$ 是非线性压缩算子(即存在连续单调非减函数 $\phi:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$，$\phi(z)<z(z>0)$，使得对任意 $x,y\in\overline{U}$，均有 $\|\mathscr{T}_2(x)-\mathscr{T}_2(y)\|\leqslant\phi(\|x-y\|)$)，则必然有：(ⅰ)$\mathscr{T}$在 $\overline{U}$ 中有一不动点；(ⅱ) 或存在 $u\in\partial U$ 满足 $u=\lambda\mathscr{T}(u)$，$\lambda\in(0,1)$. 这里，$\overline{U}$ 和 ∂U 分别表示 U 的闭包和边界.

2　主要结果

首先，研究边值问题(1) 对应的线性问题解的存在性，为此，引入假设：

(H_1) $g_1:C(I_1)\mapsto\mathbf{R},g_2:C^{\Delta}(I_2)\mapsto\mathbf{R}$，且 $g_i(0)=0$. 存在非负常数 l_1,l_2 满足 $l_1\leqslant1,l_2\leqslant1,l_1\cdot\max\{1,(\sigma^2(b)-a)\}+l_2=l<1$，并使得对任意 $x,y\in C(I_1)\cap C^{\Delta}(I_2)$，均有 $|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant l_i\|x-y\|_{I_i}(i=1,2)$ 成立.

引理 2　假设 $h:\mathbb{T}\mapsto\mathbf{R}$ 是连续的，若条件(H_1) 成立，则边值问题

$$\begin{cases}-x^{\Delta\Delta}(t)=h(t) & t\in[a,b]_T,\\ x^{\Delta}(\sigma(b))=c_1+g_1(x^{\Delta}),\\ x(a)=c_2+g_2(x)\end{cases}\tag{2}$$

存在唯一解，且解可表示为

$$x(t)=c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a)+\int_a^{\sigma(b)}G(t,s)h(s)\Delta s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}t-a & s\geqslant t,\\ \sigma(s)-a & \sigma(s)\leqslant t.\end{cases}\tag{3}$$

证明　在 $-x^{\Delta\Delta}(t)=h(t)(t\in[a,b]_T)$ 两边积分，得 $-x^{\Delta}(t)+x^{\Delta}(a)=\int_a^t h(s)\Delta s$，于是有

$$x(t)=x(a)+x^{\Delta}(a)(t-a)-\int_a^t\int_a^s h(u)\Delta u\Delta s,$$

即

$$x(t)=x(a)+x^{\Delta}(a)(t-a)-t\int_a^t h(s)\Delta s+\int_a^t\sigma(s)h(s)\Delta s.$$

由(2) 式中的边界条件可确定 $x(a),x^{\Delta}(a)$，得到

$$x(t)=c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a)+(t-a)\int_t^{\sigma(b)}h(s)\Delta s+$$
$$(t-a)\int_a^t h(s)\Delta s-t\int_a^t h(s)\Delta s+\int_a^t \sigma(s)h(s)\Delta s=c_2+$$
$$g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a)+\int_a^t G(t,s)h(s)\Delta s,$$

其中 $G(t,s)$ 由(3)式确定.

再证明唯一性.若 $x=x(t)$,$y=y(t)$ 均为(2)式的解,则

$$x(t)-y(t)=\alpha+\beta(t-a),\tag{4}$$
$$x(a)-y(a)=g_2(x)-g_2(y),\tag{5}$$
$$x^{\Delta}(\sigma(b))-y^{\Delta}(\sigma(b))=g_1(x^{\Delta})-g_1(y^{\Delta}).\tag{6}$$

由(4)至(6)式及假设(H_1)可知,

$$|\beta|=|x^{\Delta}(\sigma(b))-y^{\Delta}(\sigma(b))|=|g_1(x^{\Delta})-g_1(y^{\Delta})|\leqslant l_1\|x^{\Delta}-y^{\Delta}\|_{I_1}\leqslant l_1\beta,$$

因此 $\beta=0$.进一步有估计

$$|\alpha|=|x(a)-y(a)|=|g_2(x)-g_2(y)|\leqslant l_2\|x-y\|_{I_2}\leqslant l_2\alpha,$$

这导出 $\alpha=0$.从而 $x(t)=y(t)$,$t\in I_2$.证毕.

现作假设:

(H_2) $f:I_2\times\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ 连续.

类似于引理2的证明,可得到如下结果:

引理3 若假设(H_1),(H_2)成立,则边值问题(1)等价于积分方程

$$x(t)=c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a)+\int_a^{\sigma(b)}G(t,s)f(s,x(s))\Delta s.$$

现在,对 $x\in C^{\Delta}(I_2)$,定义算子 $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T}x(t)=c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a)+\int_a^{\sigma(b)}G(t,s)f(s,x(s))\Delta s.\tag{7}$$

由引理2,3可知算子 $\mathscr{T}$ 的定义是明确的,且边值问题(1)等价于算子 $\mathscr{T}$ 的不动点问题.不难验证 $\mathscr{T}:C^{\Delta}(I_2)\mapsto C^{\Delta}(I_2)$.再定义算子

$$\mathscr{T}_i:C^{\Delta}(I_2)\mapsto C^{\Delta}(I_2),$$
$$\mathscr{T}_1x(t)=\int_a^{\sigma(b)}G(t,s)f(s,x(s))\Delta s,\tag{8}$$
$$\mathscr{T}_2x(t)=c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^{\Delta}))(t-a),\tag{9}$$

则 $\mathscr{T}=\mathscr{T}_1+\mathscr{T}_2$.

为应用引理1研究边值问题(1),现给出 $\mathscr{T}_1$,$\mathscr{T}_2$ 的几个重要性质.

设 r 是正实数,$\Omega_r=\{x\in C^{\Delta}(I_2):\|x\|<r\}$.

引理4 若条件(H_1),(H_2)满足,则 $\mathscr{T}_1:\bar{\Omega}_r\mapsto C^{\Delta}(I_2)$ 是全连续算子.

证明 首先证明 $\mathscr{T}_1$ 连续.

设 $\{x_n\}\subset\Omega_r$ 且 $x_n\to x(n\to\infty)$,则 $x_n(t)$ 和 $x_n^{\Delta}(t)$ 分别在 I_2 和 I_1 上一致收敛到 $x(t)$ 和 $x^{\Delta}(t)$.由(H_1)可知 f 在 $I_2\times[-r,r]$ 一致连续,故对任意 $\epsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,对一切 $t\in I_2$ 均有 $|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))|<\epsilon$,于是,有估计

$$|\mathscr{T}_1x_n(t)-\mathscr{T}_1x(t)|\leqslant\sup_{(t,s)\in I_2\times I_1}G(t,s)\int_a^{\sigma(b)}|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|\Delta s\leqslant$$
$$(\sigma(b)-a)(\sigma^2(b)-a)\epsilon.\tag{10}$$

此外,直接计算可得

$$\mathscr{T}_1^{\Delta}x(t)=\int_a^{\sigma(b)}\sigma(s)f(s,x(s))\Delta s-\int_a^t f(s,x(s))\Delta s.$$

由估计(10)及假设(H_1)可得

$$|\mathscr{T}_1^{\Delta}x_n(t)-\mathscr{T}_1^{\Delta}x(t)|\leqslant\int_a^{\sigma(b)}|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|\Delta s\leqslant(\sigma(b)-a)\epsilon,$$

因此 $\|\mathscr{T}_1x_n-\mathscr{T}_1x\|\to0(n\to\infty)$,从而 $\mathscr{T}_1$ 是连续的.

现记 $M_r=\sup\{|f(s,u)|:(s,u)\in I_1\times[-r,r]\}$,则对任意 $x\in\bar{\Omega}_r$,由 $\mathscr{T}_1$ 及 $G(t,s)$ 的定义可得

$$|\mathscr{T}_1(x(t))|\leqslant\sup_{(t,s)\in I_2\times I_1}G(t,s)\int_a^{\sigma(b)}|f(s,x(s))|\Delta s\leqslant M_r(\sigma(b)-a)(\sigma^2(b)-a),$$

$$|\mathscr{T}_1^{\Delta}(x(t))|\leqslant\int_a^{\sigma(b)}|\sigma(s)f(s,x(s))|\Delta s+\int_a^t|f(s,x(s))|\Delta s\leqslant M_r(\sigma(b)-a)(\sigma^2(b)+1),$$

从而 $\mathscr{T}_1(\bar{\Omega}_r)$ 一致有界.

最后,证明 $\mathscr{T}_1(\bar{\Omega}_r)$ 等度连续.

对任意 $x\in\bar{\Omega}_r,t',t''\in I_2$,不妨设 $t'\leqslant t''$,则

$$|\mathscr{T}_1(x(t''))-\mathscr{T}_1(x(t'))|\leqslant M_r\int_a^{\sigma(b)}|G(t'',s)-G(t',s)|\Delta s.$$

由 $G(t,s)$ 的定义得

$$\begin{aligned}\int_a^{\sigma(b)}|G(t'',s)-G(t',s)|\Delta s&=\int_a^{t'}|G(t'',s)-G(t',s)|\Delta s+\int_{t''}^{\sigma(b)}|G(t'',s)-G(t',s)|\Delta s+\\&\int_{t'}^{t''}|G(t'',s)-G(t',s)|\Delta s\leqslant\int_{t''}^{\sigma(b)}|t''-t'|\Delta s+\\&\int_{t'}^{t''}|\sigma(s)-t'|\Delta s\leqslant2(\sigma(b)-a)(t''-t'),\end{aligned}$$

故 $\mathscr{T}_1$ 等度连续.

综合上述证明可知 $\mathscr{T}_1$ 是全连续的.

为陈述和证明主要定理,进一步引入以下基本假设:

(H_3) 存在非负函数 $p\in L^1(I_2)$ 和单调非减函数 $\psi:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$,并且 p 在 I_2 的具有正 Δ-测度的子集上大于 0,使得对任意$(t,u)\in I_2\times\mathbf{R}$,成立 $|f(t,u)|\leqslant p(t)\psi(|u|)$. 这里,$L^1(I_2)$ 表示在 I_2 上 LebesgueΔ-可积实函数的集合.

(H_4) $\sup\limits_{r\in(0,\infty)}\dfrac{r}{c+q\psi(r)}>\dfrac{1}{1-l}$,其中 l 由假设(H_1)确定,

$$q=\max\{(\sigma^2(b)-a),(\sigma^2(b)+1)\}\cdot\int_a^{\sigma(b)}p(s)\Delta s,$$

$$c=|c_2|+|c_1|\max\{(\sigma^2(b)-a),1\}.$$

定理 1 若(H_1)至(H_4)成立,则边值问题(1)至少存在 1 个解.

证明 设算子 $\mathscr{T},\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$ 分别由(7)至(9)式定义. 由引理 2,3 可知算子 $\mathscr{T}$ 的不动点就是边值问题(1)的解.

以下证明算子 $\mathscr{T},\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$ 满足引理 2 相应条件,从而存在不动点.

由(H_4)知,存在 $r>0$ 使得

$$\frac{r}{c+q\psi(r)}>\frac{1}{1-l}.\tag{11}$$

令 $\Omega_r=\{x\in C(I_2):\|x\|<r\}$. 由引理 4 可知 $\mathscr{T}_1:\bar{\Omega}_r\mapsto C^{\Delta}(I_2)$ 全连续.

再证明 $\mathscr{T}_2:\bar{\Omega}_r\mapsto C^{\Delta}(I_2)$ 是压缩算子. 对任意 $x,y\in\bar{\Omega}_r$,由(9)式及假设(H_1),有估计

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}_2x(t)-\mathscr{T}_2y(t)|&=|g_2(x)-g_2(y)+(g_1(x^{\Delta})-g_1(y^{\Delta}))(t-a)|\leqslant\\&l_2\|x-y\|_{I_2}+(\sigma^2(b)-a)l_1\|x^{\Delta}-y^{\Delta}\|_{I_1}\leqslant l\|x-y\|,\end{aligned}$$

以及

$$|\mathscr{T}_2^{\Delta}x(t)-\mathscr{T}_2^{\Delta}y(t)|=|g_1(x^{\Delta})-g_1(y^{\Delta})|\leqslant l\|x-y\|.$$

因 $0\leqslant l<1$,故 $\mathscr{T}_2\bar{\Omega}_r\mapsto C^{\Delta}(I_2)$ 是压缩算子.

最后,证明引理 1 的结论(ⅱ)不成立. 假若(ⅱ)成立,则存在 $\lambda\in(0,1)$,$x\in\partial\Omega$ 使得 $x=\lambda\mathscr{T}x$,于是

可得到

$$x(t)=\lambda\{c_2+g_2(x)+(c_1+g_1(x^\Delta))(t-a)+\int_a^{\sigma(b)}G(t,s)f(s,x(s))\Delta s\}. \tag{12}$$

由(12)式及(H_1),(H_3)可推出

$$\begin{aligned}|x(t)|\leqslant&|c_2|+(\sigma^2(b)-a)|c_1|+|g_2(x)|+(\sigma^2(b)-a)|g_1(x^\Delta)|+\\&(\sigma^2(b)-a)\int_a^{\sigma(b)}p(s)\psi(|x(s)|)\Delta s\leqslant l\|x\|+\\&q\psi(\|x\|)+|c_2|+(\sigma^2(b)-a)|c_1|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x^\Delta(t)|\leqslant|\mathscr{T}_1{}^\Delta x(t)|+|\mathscr{T}_2{}^\Delta x(t)|\leqslant\int_a^{\sigma(b)}|\sigma(s)f(s,x(s))|\Delta s+\int_a^t|f(s,x(s))|\Delta s+\\|c_1|+|g_1(x^\Delta)|\leqslant l\|x\|+q\psi(\|x\|)+|c_1|.\end{aligned}$$

从而 $\|x\|\leqslant l\|x\|+q\psi(\|x\|)+|c|$,其中,

$$q=\max\{(\sigma^2(b)-a),(\sigma^2(b)+1)\}\cdot\int_a^{\sigma(b)}p(s)\Delta s,$$

$$c=|c_2|+|c_1|\max\{(\sigma^2(b)-a),1\}.$$

因为 $x\in\partial\Omega_r$,$\|x\|=r$,所以$\dfrac{r}{c+q\psi(r)}\leqslant\dfrac{1}{1-l}$,这与(11)式矛盾,因此(ⅱ)不成立.

综上所述,由引理1知算子 F 在$\bar{\Omega}_r$ 至少有1个不动点,即边值问题(1)至少存在1个解.证毕.

参考文献:

[1] HILGER S. Analysis on Measure Chain-A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus [J]. Journal of Results Math.,1990,18:18-56.

[2] BOHNER M,PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales [M]. Boston:Birkhauser,2001.

[3] SHENG Q,FADAG M. An Exploration of Combined Dynamic Derivatives on Time Scales and Their Applications [J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2006,7(3):395-413.

[4] ATICI F M,BILES D C,LEBEDINSKY A. An Application of Time Scales to Economics [J]. Math. Compu. Modelling,2006,43(7-8):718-726.

[5] 钟文勇.时标上二阶脉冲动态方程的非局部边值问题 [J].复旦学报:自然科学版,2009(2):245-252.

[6] O'REGAN D. Fixed-Point Theory for the Sum of Two Operators [J]. Appl. Math. Lett.,1995,9(1):1-8.

Nonlinear Boundary Value Problem for Second Order Dynamic Equations on Time Scales

ZHONG Wen-yong

(School of Mathematics and Statistics,Jishou University,Jishou 416000,Hunan China)

Abstract:This paper deals with the nonlinear boundary value problem for the second order dynamic equations on time scales. Using fixed-point theorem for the sum of two operators,some sufficient conditions are obtained to guarantee the existence of at least one solution of the boundary value problem.

Key words:time scales;dynamic equation;nonlinear boundary value problem;fixed point

(责任编辑 向阳洁)