第 33 卷　第 4 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 4
2012 年 7 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jul. 2012

文章编号:1007－2985(2012)04－0001－05

具定号系数多滞量 AFDE 的振动性*

秦宏立,双瑞涛

(延安大学数学与计算机学院,陕西 延安　716000)

摘　要:讨论了一类具有定号系数多滞量的超前型泛函微分方程解的振动性,得到方程 $x'(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x(t+\tau_i)(t\geqslant t_0)$ 振动的"sharp"条件,并通过实例验证了所给结果的有效性.

关键词:定号系数;超前型;泛函微分方程;振动性

中图分类号:O175.15　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.3969/j.issn.1007－2985.2012.04.001

1　问题的提出

考虑具有定号系数的多滞量超前型泛函微分方程

$$x'(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x(t+\tau_i)\qquad t\geqslant t_0,\tag{1}$$

其中 $p_i(t)\in C([t_0,+\infty),[0,+\infty))$,$\tau_i>0$ 为常数,$i=1,2,\cdots,n$. 文中仅讨论方程的可以连续延拓于 $\mathbf{R}_{t_0}^{+}:=[t_0,+\infty)$ 上的解 $x(t)$. 如通常定义[1],若一个解 $x(t)$ 的零点集无界且非最终零解,则称这个解是振动的;否则,称这个解是非振动的. 若方程的所有解都是振动的,则称此方程是振动的.

关于方程(1),G. Ladas 与 I. P. Stavroulakis 在文献[2] 中证明了,如果

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_i/2}p_i(s)\mathrm{d}s>0\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{2}$$

那么下列每一个条件

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}\qquad 对某个\ i=1,2,\cdots,n,\tag{3}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau}\sum_{i=1}^{n}p_i(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}\qquad 此处\ \tau=\min\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\},\tag{4}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_j}p_i(s)\mathrm{d}s)\right)^{1/n}>\frac{1}{\mathrm{e}},\tag{5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_j}p_i(s)\mathrm{d}s)+\frac{2}{n}\sum_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^{n}((\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_j}p_i(s)\mathrm{d}s)(\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\mathrm{d}s))^{1/2}>\frac{1}{\mathrm{e}},\tag{6}$$

蕴涵方程(1) 的每个解振动.

当 $p_i(t)\equiv p_i\in(0,\infty)(i=1,2,\cdots,n)$ 时,条件(3) 至(6) 分别缩减为如下的条件(7) 至(10):

* **收稿日期:**2012－04－23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771129);陕西省教育厅自然科学基金资助项目(10BZ30)

作者简介:秦宏立(1954－),男,陕西富县人,延安大学数学与计算机学院教授,主要从事微分方程稳定性与振动性理论研究.

$$p_i\tau_i > \frac{1}{e} \qquad 对某个\ i=1,2,\cdots,n, \tag{7}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\tau \mathrm{d}s > \frac{1}{e} \qquad 此处\ \tau=\min\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\}, \tag{8}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_j\right) > \frac{1}{e}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(p_i\tau_i)^{1/2}\right)^2 > \frac{1}{e}. \tag{10}$$

笔者运用与文献[2]不同的方法,得到方程(1)振动的“sharp”条件,从而改进了条件(3)和(4).

2 主要结果及证明

为叙述方便起见,对于某个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,首先定义函数序列 $\{p_i^{(m)}(t)\}$ 和 $\{q_i^{(m)}(t)\}$ 如下:

$$\begin{aligned}
&p_i^{(1)}(t)=\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_0,\\
&p_i^{(2)}(t)=\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)p_i^{(1)}(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_0,\\
&\quad\vdots\\
&p_i^{(m)}(t)=\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)p_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s \qquad m\geqslant 2,t\geqslant t_0,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&q_i^{(1)}(t)=\int_{t-\tau_i}^{t} p_i(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_0+\tau_i,\\
&q_i^{(2)}(t)=\int_{t-\tau_i}^{t} p_i(s)q_i^{(1)}(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_0+2\tau_i,\\
&\quad\vdots\\
&q_i^{(m)}(t)=\int_{t-\tau}^{t} p(s)q_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s \qquad n\geqslant 2,t\geqslant t_0+m\tau_i,
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $p_i(t)\in C([t_0,+\infty),[0,+\infty)),i=1,2,\cdots,n$.

定理 1 如果对某个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,存在某 $t_1>t_0+\tau$ 及一正整数 k 使得

$$p_i^{(m)}(t)\geqslant\frac{1}{e^m},q_i^{(m)}\geqslant\frac{1}{e^m} \qquad t\geqslant t_1+m\tau_i, \tag{13}$$

且

$$\int_{t_1+m\tau_i}^{\infty} p_i(t)\left(\exp\left(e^{m-1}p_i^{(m)}(t)-\frac{1}{e}\right)-1\right)\mathrm{d}t=\infty, \tag{14}$$

这里 $p_i^{(m)}(t)$ 和 $q_i^{(m)}(t)$ 分别由(11),(12)式所定义,那么方程(1)的每个解振动.

证明 采用反证法.假设方程(1)有一非振动的最终正解 $x(t)$(这不失一般性),则存在 $t_2\geqslant t_1$ 使得当 $k=1,2,\cdots,n$ 时 $x(t+\tau_k)\geqslant x(t),x'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_2$.设 $\omega_k(t)=\dfrac{x(t+\tau_k)}{x(t)},t\geqslant t_2$,从而 $\omega_k(t)\geqslant 1$, $t\geqslant t_2$.若以 $x(t)(t\geqslant t_2)$ 同除方程(1)的两端,便有

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=\sum_{k=1}^{n}p_k(t)\omega_k(t) \qquad t\geqslant t_2. \tag{15}$$

从 t 到 $t+\tau$ 对(15)式两端积分,得

$$\omega_i(t)=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i}p_k(s)\omega_k(s)\mathrm{d}s\right) \qquad t\geqslant t_2, \tag{16}$$

于是

$$\omega_i(t)\geqslant\exp\left(\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i(s)\mathrm{d}s\right)\geqslant e\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_2. \tag{17}$$

若设

$$\begin{cases}\omega_i^{(1)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i(s)\mathrm{d}s,\\ \omega_i^{(2)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i^{(1)}(s)\mathrm{d}s,\\ \vdots\\ \omega_i^{(m)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_2,\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}v_i(t)=\omega_i(t)-1,\\ v_i^{(1)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)v_i(s)\mathrm{d}s,\\ v_i^{(2)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)v_i^{(1)}(s)\mathrm{d}s,\\ \vdots\\ v_i^{(m)}(t)=\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)v_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_2.\end{cases}$$

根据上述(16)，(17)，(18) 式，易知 $\omega_i(t)\geqslant \mathrm{e}^{m-1}\omega_i^{(m-1)}(t)$，$t\geqslant t_2$，且

$$\omega_i(t)\geqslant \exp(\mathrm{e}^{m-1}\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)\omega_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s) \qquad t\geqslant t_2. \tag{19}$$

由 $p_i^{(k)}(t)$，$\omega_i^{(k)}(t)$ 和 $v_i^{(k)}(t)$ 的定义及 $\omega_k(t)\geqslant 1$，$t\geqslant t_2$，有

$$v_i(t)\geqslant 0,v_i^{(k)}\geqslant 0,\omega_i^{(k)}=v_i^{(k)}(t)+p_i^{(k)}(t) \qquad k=1,2,\cdots,m,t\geqslant t_2. \tag{20}$$

从而，据(11)，(19) 及(20) 式便知

$$\omega_i(t)\geqslant \exp(\mathrm{e}^{m-1}\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)(p_i^{(m-1)}(s)+v_i^{(m-1)}(s))\mathrm{d}s)=\exp(\mathrm{e}^{m-1}\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)v_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\mathrm{e}})\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(s)-\frac{1}{\mathrm{e}}) \qquad t\geqslant t_2,$$

因此

$$\omega_i(t)\geqslant (\mathrm{e}^m\int_t^{t+\tau_i}p_i(s)v_i^{(m-1)}(s)\mathrm{d}s+1)\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(s)-\frac{1}{\mathrm{e}})=(\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t)+1)\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(s)-\frac{1}{\mathrm{e}}) \qquad t\geqslant t_2.$$

此与(13)，(20) 式一起使得

$$p_i(t)(\omega_i(t)-(\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t)+1))\geqslant p_i(t)(\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t)+1)(\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(t)-\frac{1}{\mathrm{e}})-1)\geqslant p_i(t)(\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(t)-\frac{1}{\mathrm{e}})-1) \qquad t\geqslant t_2,$$

即

$$p_i(t)(v_i(t)-\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t))\geqslant p_i(t)(\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(t)-\frac{1}{\mathrm{e}})-1) \qquad t\geqslant t_2. \tag{21}$$

将(21) 式两端从 t_2 到 $T>t_2+m\tau_i$ 积分有

$$\int_{t_2}^T p_i(t)(v_i(t)-\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t))\mathrm{d}t\geqslant \int_{t_2}^T p_i(t)(\exp(\mathrm{e}^{m-1}p_i^{(m)}(t)-\frac{1}{\mathrm{e}})-1)\mathrm{d}t. \tag{22}$$

于是，由(14)，(22) 式可知

$$\lim_{T\to\infty}\int_{t_2}^T p_i(t)(v_i(t)-\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t))\mathrm{d}t=\infty. \tag{23}$$

再通过交换积分次序并采用类似于文献[3] 中定理证明的方法，得到 $\int_{t_2}^T \mathrm{e}^m p_i(t)v_i^{(m)}(t)\mathrm{d}t\geqslant \int_{t_2+m\tau_i}^T p_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t$. 所以

$$\int_{t_2}^{T} p_i(t)(v_i(t)-\mathrm{e}^m v_i^{(m)}(t))\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_2}^{T} p_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t - \int_{t_2+m\tau_i}^{T} p_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t = \int_{t_2}^{t_2+m\tau_i} p_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

这与(23)式矛盾.证毕.

推论 1 如果对于某个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,存在一正整数 m 使得

$$\liminf_{t\to\infty} p_i^{(m)}(t) > \frac{1}{\mathrm{e}^m},\liminf_{t\to\infty} q_i^{(m)}(t) > \frac{1}{\mathrm{e}^m}, \tag{24}$$

此处 $p_i^{(m)}(t)$ 和 $q_i^{(m)}(t)$ 分别由(11),(12)式所定义,那么方程(1)的每个解振动.

证明 由条件(24)成立,则蕴含条件(13)和(14)成立,所以据定理1知此命题的结论成立.

推论 2 如果对于某个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,存在 $t_1 > t_0 + \tau_i$ 及正整数 k 使得(13)式成立且

$$\int_{t_1+k\tau_i}^{\infty} p_i(t)(\mathrm{e}^{k-1}p_i^{(k)}(t) - \frac{1}{\mathrm{e}})\mathrm{d}t = \infty, \tag{25}$$

此处 $p_i^{(m)}(t)$ 由(11)式所定义,那么方程(1)的每个解振动.

证明 当 $x \geqslant 0$ 时,$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$,则条件(25)式蕴含(14)式,所以定理1隐含此命题的结论成立.

3 应用举例

作为上述振动性结果的应用,考虑具有定号系数多滞量的超前型泛函微分方程

$$x'(t) = \frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\cos t)x(t+\pi) + \frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\sin t)x(t+\frac{\pi}{2}) \qquad t \geqslant 0 \tag{26}$$

的振动性.

由于在方程(26)中

$$p_1(t) = \frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\cos t), p_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\sin t), \tau_1 = \pi, \tau_2 = \frac{\pi}{2}, \tau = \min\{\tau_1,\tau_2\} = \frac{\pi}{2},$$

并且

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_1} p_1(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\cos t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{e}}(\pi-2) < \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{27}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_2} p_2(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi/2}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\sin t)\mathrm{d}t = \frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{28}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau}\sum_{i=1}^{2} p_i(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi/2}\frac{2+\cos t+\sin t}{2\mathrm{e}}\mathrm{d}t = \frac{\pi-2}{2\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{29}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_2} p_1(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi/2}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\cos t)\mathrm{d}t = \frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{30}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_1} p_2(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\sin t)\mathrm{d}t = \frac{\pi-2}{2\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_2/2} p_2(t)\mathrm{d}t = \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\pi/4}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\sin t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{e}}(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2-\sqrt{2}}) > 0, \tag{31}$$

于是,由(30)和(31)式显示(2)式成立.但由(27)与(28)式表明(3)式不成立,(29)式说明(4)式无效;又由

$$\left((\frac{\pi-2}{2\mathrm{e}} + \frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}})(\frac{\pi-2}{2\mathrm{e}} + \frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}})\right)^{1/2} = \frac{3\pi/2-(2+\sqrt{2})}{2\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}}$$

及

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-2}{2\mathrm{e}} + \frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}}\right) + \frac{2}{2}\left(\frac{\pi/2-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}}\cdot\frac{\pi-2}{2\mathrm{e}}\right)^{1/2} = \frac{1}{4\mathrm{e}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}} + \sqrt{\pi+2}\right)^2 < \frac{1}{\mathrm{e}},$$

表明不等式(5)和(6)非真;因此,用文献[2]的方法不能判断所给方程(26)式的振动性.但是,

$$p_1^{(1)}(t) = \int_t^{t+\tau_1} p_i(s)\mathrm{d}s = \int_t^{t+\pi}\frac{1}{2\mathrm{e}}(1+\cos s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\mathrm{e}}(\pi - 2\sin t),$$

$$p_1^{(2)}(t)=\int_t^{t+\tau_1}p_1(s)p_1^{(1)}(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+\pi}\frac{(1+\cos s)(\pi-2\sin s)}{4\mathrm{e}^2}\mathrm{d}s=\frac{\pi^2-2\pi\sin t-4\cos t}{4\mathrm{e}^2},$$

$$p_1^{(3)}(t)=\int_t^{t+\tau_1}p_1(s)p_1^{(2)}(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+\pi}\frac{(1+\cos s)(\pi^2-2\pi\sin t-4\cos t)}{8\mathrm{e}^3}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\pi^3-2\pi-(2\pi^2-8)\sin t-4\pi\cos t}{8\mathrm{e}^3},$$

$$p_1^{(4)}(t)=\int_t^{t+\tau_1}p_1(s)p_1^{(3)}(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+\pi}\frac{(1+\cos s)}{16\mathrm{e}^4}(\pi^3-2\pi-(2\pi^2-8)\sin t-4\pi\cos t)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{16\mathrm{e}^4}(\pi^4-4\pi^2-2(\pi^3-6\pi)\sin t-4(\pi^2-4)\cos t),$$

$$\liminf_{t\to\infty}p_1^{(4)}(t)=\frac{1}{16\mathrm{e}^4}(\pi^4-4\pi^2-2\sqrt{(\pi^3-6\pi)^2+4(\pi^2-4)^2})>\frac{22}{16\mathrm{e}^4},$$

且

$$q_1^{(1)}(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}p_1(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\pi}^{t}\frac{1+\cos s}{2\mathrm{e}}\mathrm{d}s=\frac{\pi+2\sin t}{2\mathrm{e}},$$

$$q_1^{(2)}(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}p_1(s)q_1^{(1)}(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\pi}^{t}\frac{(1+\cos s)(\pi+2\sin s)}{4\mathrm{e}^2}\mathrm{d}s=\frac{\pi^2+2\pi\sin t-4\cos t}{4\mathrm{e}^2},$$

$$q_1^{(3)}(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}p_1(s)q_1^{(2)}(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\pi}^{t}\frac{(1+\cos s)(\pi^2+2\pi\sin t-4\cos t)}{8\mathrm{e}^3}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{8\mathrm{e}^3}(\pi^3-2\pi+(2\pi^2-8)\sin t-4\pi\cos t),$$

$$q_1^{(4)}(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}p_1(s)q_1^{(3)}(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\pi}^{t}\frac{(1+\cos s)}{16\mathrm{e}^4}(\pi^3-2\pi+(2\pi^2-8)\sin t-4\pi\cos t)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{16\mathrm{e}^4}(\pi^4-4\pi^2+2(\pi^3-6\pi)\sin t-4(\pi^2-4)\cos t),$$

$$\liminf_{t\to\infty}q_1^{(4)}(t)=\frac{1}{16\mathrm{e}^4}(\pi^4-4\pi^2-2\sqrt{(\pi^3-6\pi)^2+4(\pi^2-4)^2})>\frac{22}{16\mathrm{e}^4},$$

故由推论 1 知，方程(26) 式是振动的.

参考文献：

[1] 郑祖庥. 泛函微分方程理论［M］. 合肥：安徽教育出版社，1994.

[2] LADAS G，STAVROULAKIS I P. Oscillations Caused by Several Retarded and Advanced Arguments［J］. J. Diff. Equa.，1982(44)：134－152.

[3] 秦宏立. 一类 AFDE 的振动性及其应用［J］. 西南民族大学学报：自然科学版，2010，36(6)：885－889.

Oscillation of AFDE with Cotion and Many Delays

QIN Hong-li，SHUANG Rui-tao

(College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shannxi China)

Abstract：This paper disucsses oscillations of pre-kind function differentinal equation with cotion，and obtains sharp conditions of equation $x'(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x(t+\tau_i)(t\geqslant t_0)$. The effectiveness is proved by examples.

Key words：cotions；pre-kind；function differential equation；oscillation

（责任编辑　向阳洁）