第 34 卷 第 4 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 4
2013 年 7 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jul. 2013

文章编号:1007-2985(2013)04-0011-05

Orlicz 序列空间中 p-Amemiya($1\leqslant p\leqslant\infty$)范数的可达性*

段丽芬[1],王宏志[1],崔云安[2]

(1. 通化师范学院数学学院,吉林 通化 134002;2. 哈尔滨理工大学应用科学学院,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:基于一般 Orlicz 序列空间,定义了 p-Amemiya($1\leqslant p\leqslant\infty$)函数. 利用实分析与泛函分析基本理论,研究一般 Orlicz 序列空间中 p-Amemiya 函数的特征和 p-Amemiya 范数的可达问题,得到了 p-Amemiya 函数的一系列性质,并由这些结论确定了对任何 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$p$-Amemiya 范数都是可达的,指出了其可达区间.

关键词:Orlicz 序列空间;p-Amemiya 函数;p-Amemiya 范数;可达性

中图分类号:O177.3 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2013.04.003

众所周知,Orlicz 函数空间和序列空间几何理论既有区别又有联系,多年来始终呈现并行发展的局面. 崔云安等[1] 引入 p-Amemiya 范数($1\leqslant p\leqslant\infty$)的概念,并对赋 p-Amemiya 范数($1\leqslant p\leqslant\infty$)的一般 Orlicz 函数空间(与大多数文献如[2-8]讨论的由 N-函数生成的 Orlicz 空间相比要复杂得多)范数可达性及可达区间进行了详尽的研究. 笔者将对赋 p-Amemiya 范数($1\leqslant p\leqslant\infty$)的一般 Orlicz 序列空间范数可达性及可达区间进行讨论.

1 预备知识及引理

文中以 X 表示一个 Banach 空间,$B(X)$,$S(X)$ 分别表示 X 的闭单位球和单位球面.

定义 1[2] 映射 $M:\mathbf{R}\to[0,\infty]$ 称为 Orlicz 函数是指,M 是偶的、非负连续凸函数且 $M(0)=0$,$\lim\limits_{u\to\infty}M(u)=\infty$. 规定 $M(\infty)=\infty$.

定义 Orlicz 函数 $M(u)$ 的余函数 $N(v)=\sup\{u\mid v\mid-M(u):u\geqslant 0\}$. 设 $x=(x(i))_i$ 表实数序列,称 $\rho_M(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}M(x(i))$ 为 x 关于 M 的模. 据文献[1],线性集 $l_M^*=\{x=(x(i))_i:\exists\lambda>0,\rho_M(\lambda x)<\infty\}$ 关于 p-Amemiya 范数($1\leqslant p\leqslant\infty$)

$$\|x\|_{M,p}=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}[1+(\rho_M(kx))^p]^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<\infty,\\ \inf\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}\max\{1,\rho_M(kx)\} & p=\infty\end{cases}$$

成为 Banach 空间,并且这些范数是等价的. 简记 $l_{M,p}=[l_M^*,\|x\|_{M,p}]$($1\leqslant p\leqslant\infty$). 记

$$s_p:[0,\infty]\to[1,\infty],s_p(u)=\begin{cases}(1+u^p)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<\infty,\\ \max\{1,u\} & p=\infty.\end{cases}$$

定义函数 $A_p:l_{M,p}\times(0,\infty]\to(0,\infty]$,$A_p(x,k)=k^{-1}s_p(\rho_M(kx))$ 为 p-Amemiya 函数. 显然 $\|x\|_{M,p}=\inf\limits_{k>0}A_p(x,k)$.

记 $c_M=\sup\{u\geqslant 0:M(u)<\infty\}$. 当 $0\leqslant u<c_M$ 时,用 $p_+(u)$ 表示 $M(u)$ 的右导数;当 $c_M\leqslant u\leqslant\infty$ 时,定义 $p_+(u)=\infty$,则 $p_+(u)$ 在$[0,\infty)$上非减且对任何 $u\geqslant 0$,都有 $M(u)=\int_0^u p_+(t)\mathrm{d}t$[9]. 显然,当 $|u|>c_M$ 时,$M(u)=N(p_+(|u|$

* **收稿日期**:2012-12-13

基金项目:波兰国家自然科学基金资助项目(201362236);吉林省教育厅"十二五"科技项目(吉教科合字[2011]第 456 号)

作者简介:段丽芬(1967-),女,吉林梨树人,通化师范学院数学学院副教授,主要从事 Orlicz 空间几何理论研究.

$|)) = \infty, M(c_M) \leqslant N(p_+(c_M)) = \infty$. 利用 Young 不等式,有

$$|u| < c_M \Leftrightarrow p_+(|u|) < \infty \Leftrightarrow N(p_+(|u|)) = |u| p_+(|u|) - M(u) < \infty, \tag{1}$$

则当 $|u| < c_M$ 时,$M(u) < \infty, N(p_+(|u|)) < \infty$. 定义

$$\alpha_p : l_{M,p} \to [-1, \infty], \alpha_p(x) = \begin{cases} \rho_M^{p-1}(x)\rho_N(p_+(|x|)) - 1 & 1 \leqslant p < \infty, \\ -1 & p = \infty, \rho_M(x) \leqslant 1, \\ \rho_N(p_+(|x|)) & p = \infty, \rho_M(x) > 1, \end{cases}$$

则对任何 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 及 $x = (x(i))_i \in l_{M,p} \backslash \{0\}$,函数 $\alpha_p(kx)$ 关于 k 在$[0, \infty)$上非减. 再定义

$$k_p^* : l_{M,p} \to [0, \infty], k_p^*(x) = \inf\{k > 0 : \alpha_p(kx) \geqslant 0\} (\text{规定 } \inf \Phi = \infty),$$

$$k_p^{**} : l_{M,p} \to (0, \infty], k_p^{**}(x) = \sup\{k > 0 : \alpha_p(kx) \leqslant 0\},$$

则显然对任何 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 及 $x \in l_{M,p}$,都有 $k_p^*(x) \leqslant k_p^{**}(x)$.

引理 1 设 l_∞ 表示所有有界序列全体. 对任何 $x = (x(i))_i \in l_\infty$,若 x 的坐标只有有限项不为 0,则 $\theta(x) = \theta_0(x)$,其中 $\theta(x) = \inf\{k > 0 : \rho_M(k^{-1}x) < \infty\}$,$\theta_0(x) = \inf\{k > 0 : \rho_N(p_+(k^{-1}|x|)) < \infty\}$.

证明 反证法. 假设结论不成立,则 $\theta(x) > \theta_0(x)$ 或 $\theta(x) < \theta_0(x)$. 若 $\theta(x) > \theta_0(x)$,则存在 $k_0 : \theta^{-1}(x) < k_0 < \theta_0^{-1}(x)$(规定$\dfrac{1}{0} = +\infty$),根据 $\theta_0(x)$ 的定义得 $\rho_N(p_+(k_0|x|)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} N(p_+(k_0|x(i)|)) < \infty$,故对任何正整数 i,$k_0 x(i) < c_M$. 注意到 x 的坐标只有有限项不为 0,则 $\rho_M(k_0 x) = \sum\limits_{x(i) \neq 0} M(k_0 x(i)) < \infty$. 这说明 $k_0 \leqslant \theta^{-1}(x)$,产生矛盾.

同样地,若 $\theta(x) < \theta_0(x)$,则存在 $k_0 (\theta_0^{-1}(x) < k_0 < \theta^{-1}(x))$,根据 $\theta(x)$ 的定义得 $\rho_M(k_0(x)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(k_0 x(i)) < \infty$,故对任何正整数 i,$k_0 x(i) < c_M$. 注意到 x 的坐标只有有限项不为 0,利用(1) 式,有

$$\rho_N(p_+(k_0|x|)) = \sum_{i=1}^{\infty} N(p_+(k_0|x(i)|)) = \sum_{x(i) \neq 0} N(p_+(k_0|x(i)|)) < \infty.$$

这说明 $k_0 \leqslant \theta_0^{-1}(x)$,产生矛盾.

下面的引理 2(见文献[1]) 对文中主要结果的取得很重要,不加证明给出.

引理 2 对任何 $1 \leqslant p < \infty$ 及 $a > 0$,都有$\max\limits_{x \geqslant 0} \dfrac{1 + x^{p-1}a}{(1 + x^p)^{1-\frac{1}{p}}} = (1 + a^p)^{\frac{1}{p}}$.

2 主要结果及证明

定理 1 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时,对任何 $x = (x(i))_i \in l_{M,p} \backslash \{0\}$,都有:

(ⅰ) $(0, \theta^{-1}(x)) \subset \{k > 0 : A_p(x, k) < \infty\}$;

(ⅱ) p-Amemiya 函数 $A_p(x, k)$ 关于 k 在$(0, \theta^{-1}(x))$ 内连续;

(ⅲ) p-Amemiya 函数 $A_p(x, k)$ 关于 k 在$(0, k_p^*(x))$ 内递减;

(ⅳ) p-Amemiya 函数 $A_p(x, k)$ 关于 k 在$(0, k_p^{**}(x))$ 内非增;

(ⅴ) p-Amemiya 函数 $A_p(x, k)$ 关于 k 在$(k_p^{**}(x), \theta^{-1}(x))$ 内递增;

(ⅵ) p-Amemiya 函数 $A_p(x, k)$ 关于 k 在$(k_p^*(x), \theta^{-1}(x))$ 内非减.

证明 (ⅰ) 设 $k \in (0, \theta^{-1}(x))$,则 $\rho_M(kx) < \infty, s_p(\rho_M(kx)) < \infty$,从而 $A_p(x, k) < \infty$,结论得证.

(ⅱ) 对任何 $k \in (0, \theta^{-1}(x))$,取 $k_1 \in (0, k)$,$k_2 \in (k, \theta^{-1}(x))$,则对任何 $k' \in [k_1, k_2]$,都有 $|M(k'x(i))| = M(k'x(i)) \leqslant M(k_2 x(i)) (i = 1, 2, \ldots)$,且 $\rho_M(k_2 x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(k_2 x(i)) < \infty$. 由优级数判别法知,关于 k 的函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M(kx(i))$ 在$[k_1, k_2]$上一致收敛. 注意到 M 的连续性和函数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} M(kx(i))$ 在$[k_1, k_2]$上连续,当然在 $k \in [k_1, k_2]$点连续. 再利用 s_p 的连续性结论得证.

(ⅲ) 对任何 $x = (x(i))_i \in l_{M,p} \backslash \{0\}$ 及 $k_1, k_2 \in (0, k_p^*(x))$,$k_1 < k_2$,取

$$x_n = (x_n(i))_i \qquad x_n(i) = \begin{cases} x(i) & i \leqslant n, \\ 0 & i > n, \end{cases}$$

则当 $1 \leqslant p < \infty$ 时,$\rho_M^{p-1}(k_j x_n)\rho_N(p_+(k_j|x_n|)) < 1$,$j = 1, 2$. 由引理 1 知,$\rho_M(k_j x_n) < \infty$,$\rho_N(p_+(k_j|x_n|)) < \infty$,$j = 1, 2$. 因此,

$$A_p(x_n, k_2) = \frac{1 + \rho_M^{p-1}(k_2 x_n)\rho_M(k_2 x_n)}{k_2(1 + \rho_M^p(k_2 x_n))^{1-\frac{1}{p}}} = \Big[1 + \rho_M^{p-1}(k_2 x_n)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} k_2 |x_n(i)| p_+(k_2|x_n(i)|) -$$

$$\rho_N(p_+(k_2|x_n|)))\,]/[k_2(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}]=\Big[\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p+(k_2|x_n(i)|)+\frac{1}{k_2}(1-\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\rho_N(p+(k_2|x_n|)))\Big]/[(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}]=\Big[\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p+(k_2|x_n(i)|)-\frac{1}{k_2}\alpha_p(k_2x_n)\Big]/[(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}].$$

令 $\varepsilon_n=\min\{1,(k_2^{-1}-k_1^{-1})\alpha_p(k_2x_n)(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{-1+\frac{1}{p}}\}$. 因为 $k_2<k_p^*(x)$，有 $\alpha_p(k_2x_n)\leqslant\alpha_p(k_2x)<0$，所以 $\varepsilon_n>0$. 由 Young 不等式及引理 2，得

$$A_p(x_n,k_2)\leqslant\Big[\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_2|x_n(i)|)-\frac{1}{k_1}\alpha_p(k_2x_n)\Big]/[(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}]-\varepsilon_n=\Big[1+\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\Big(\sum_{i=1}^{\infty}k_1|x_n(i)|p_+(k_2|x_n(i)|)-\rho_N(p_+(k_2|x_n|))\Big)\Big]/[k_1(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}]-\varepsilon_n\leqslant\frac{1+\rho_M^{p-1}(k_2x_n)\rho_M(k_1x_n)}{k_1(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{1-\frac{1}{p}}}-\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{k_1}(1+\rho_M^p(k_1x_n))^{\frac{1}{p}}-\varepsilon_n=A_p(x_n,k_1)-\varepsilon_n.$$

令 $n\to\infty$，则 $\varepsilon_n\to\varepsilon_0=\min\{1,(k_2^{-1}-k_1^{-1})\alpha_p(k_2x)(1+\rho_M^p(k_2x))^{-1+\frac{1}{p}}\}>0$，且 $A_p(x,k_2)\leqslant A_p(x,k_1)-\varepsilon_0<A_p(x,k_1)$，结论得证.

(ⅳ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,p}\backslash\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(0,k_p^{**}(x))$，$k_1<k_2$，取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n,\end{cases}$$

则当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$\rho_M^{p-1}(k_jx_n)\rho_N(p_+(k_j|x_n|))\leqslant1$，$j=1,2$. 由引理 1 知，$\rho_M(k_jx_n)<\infty$，$\rho_N(p+(k_j|x_n|))<\infty$，$j=1,2$. 重复(ⅲ)的证明过程并注意变化 $\alpha_p(k_2x_n)\leqslant\alpha_p(k_2x)\leqslant0$，$\varepsilon_n\geqslant0$，就有 $A_p(x,k_2)\leqslant A_p(x,k_1)$，结论得证.

(ⅴ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,p}\backslash\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(k_p^{**}(x),\theta^{-1}(x))$，$k_1<k_2$，取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n,\end{cases}$$

则 $\rho_M(k_jx_n)<\infty$. 由引理 1 知，$\rho_N(p_+(k_j|x_n|))<\infty$，$j=1,2$. 因为 $k_1>k_p^{**}(x)$，有 $0<\alpha_p(k_1x)=\rho_M^{p-1}(k_1x)\rho_N(p_+(k_1|x|))-1<\infty$，所以当 n 充分大时，$0<\alpha_p(k_1x_n)=\rho_M^{p-1}(k_1x_n)\rho_N(p_+(k_1|x_n|))-1<\infty$.

令 $\varepsilon_n=\min\{1,(k_1^{-1}-k_2^{-1})\alpha_p(k_1x_n)(1+\rho_M^p(k_1x_n))^{-1+\frac{1}{p}}\}$，类似上面(ⅳ)的方法，当 n 充分大时，有

$$A_p(x_n,k_1)=\Big[\rho_M^{p-1}(k_1x_n)\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_1|x_n(i)|)-\frac{1}{k_1}\alpha_p(k_1x_n)\Big]/[(1+\rho_M^p(k_1x_n))1^{-\frac{1}{p}}]\leqslant\Big[\rho_M^{p-1}(k_1x_n)\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_1|x_n(i)|)-\frac{1}{k_2}\alpha_p(k_1x_n)\Big]/[(1+\rho_M^p(k_1x_n))^{1-\frac{1}{p}}]-\varepsilon_n\leqslant\frac{1+\rho_M^{p-1}(k_1x_n)\rho_M(k_2x_n)}{k_2(1+\rho_M^p(k_1x_n))^{1-\frac{1}{p}}}-\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{k_2}(1+\rho_M^p(k_2x_n))^{\frac{1}{p}}-\varepsilon_n=A_p(x_n,k_2)-\varepsilon_n.$$

令 $n\to\infty$，则 $\varepsilon_n\to\varepsilon_0=\min\{1,(k_1^{-1}-k_2^{-1})\alpha_p(k_1x)(1+\rho_M^p(k_1x))^{-1+\frac{1}{p}}\}>0$，且 $A_p(x,k_1)\leqslant A_p(x,k_2)-\varepsilon_0<A_p(x,k_2)$，结论得证.

(ⅵ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,p}\backslash\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(k_p^*(x),\theta^{-1}(x))$，$k_1<k_2$，取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n,\end{cases}$$

则 $\rho_M(k_jx_n)<\infty$. 由引理 1 知，$\rho_N(p_+(k_j|x_n|))<\infty$，$j=1,2$. 因为 $k_1>k_p^*(x)$，有 $0\leqslant\alpha_p(k_1x)=\rho_M^{p-1}(k_1x)\rho_N(p_+(k_1|x|))-1<\infty$，所以当 n 充分大时，$0\leqslant\alpha_p(k_1x_n)=\rho_M^{p-1}(k_1x_n)\rho_N(p_+(k_1|x_n|))-1<\infty$. 重复(ⅴ)的证明过程并注意变化 $\varepsilon_n\geqslant0$，就有 $A_p(x,k_1)\leqslant A_p(x,k_2)$，结论得证.

定理 2　当 $p=\infty$ 时，对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,\infty}\backslash\{0\}$，定理 1 的所有结论都成立.

证明　(ⅰ)和(ⅱ)的证明同定理 1.

(ⅲ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,\infty}\backslash\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(0,k_\infty^*(x))$，$k_1<k_2$，有 $\alpha_\infty(k_2x)<0$，则 $\rho_M(k_1x)\leqslant\rho_M(k_2x)\leqslant1$. 因此，$A_\infty(x,k_2)=k_2^{-1}<k_1^{-1}=A_\infty(x,k_1)$，结论得证.

(ⅳ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,\infty}\setminus\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(0,k_\infty^{**}(x)),k_1<k_2$,取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n.\end{cases}$$

若对任何正整数 n,都有 $\rho_M(k_2x_n)\leqslant 1$,则 $\rho_M(k_2x)\leqslant 1$,由(ⅲ)得证.若存在正整数 n,使得 $\rho_M(k_2x_n)>1$.由于 $\alpha_\infty(k_2x_n)\leqslant\alpha_\infty(k_2x)\leqslant 0$,因此 $\rho_N(p_+(k_2|x_n|))=0$.利用 Young 不等式及 $0\leqslant\frac{M(u)}{u}\leqslant\frac{M(v)}{v}(0\leqslant u\leqslant v)$,可得

$$k_2^{-1}\rho_M(k_2x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_2|x_n(i)|)-k_2^{-1}\rho_N(p_+(k_2|x_n|))=\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_2|x_n(i)|)=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_2|x_n(i)|)-k_1^{-1}\rho_N(p_+(k_2|x_n|))\leqslant$$
$$k_1^{-1}\rho_M(k_1x_n)\leqslant k_2^{-1}\rho_M(k_2x_n)<\infty.$$

从而,M 在某区间 $(0,a)$ 上为线性,且

$$A_\infty(x_n,k_2)=\max\{k_2^{-1},k_2^{-1}\rho_M(k_2x_n)\}\leqslant\max\{k_1^{-1},k_1^{-1}\rho_M(k_1x_n)\}=A_\infty(x_n,k_1).$$

令 $n\to\infty$,得 $A_\infty(x,k_2)=A_\infty(x,k_1)$.

(ⅴ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,\infty}\setminus\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(k_\infty^{**}(x),\theta^{-1}(x)),k_1<k_2$,取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n.\end{cases}$$

因为 $\alpha_\infty(k_1x)>0$,所以 $\rho_M(k_1x)>1,\rho_N(p_+(k_1|x|))>0$.令

$$\varepsilon_n=\min\{1,(k_1^{-1}-k_2^{-1})\rho_N(p_+(k_1|x_n|))\},$$

当 n 充分大时,利用 Young 不等式,可得

$$A_\infty(x_n,k_1)=k_1^{-1}\rho_M(k_1x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_1|x_n(i)|)-k_1^{-1}\rho_N(p_+(k_1|x_n|))=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)|p_+(k_1|x_n(i)|)-k_2^{-1}\rho_N(p_+(k_1|x_n|))-\varepsilon_n\leqslant$$
$$k_2^{-1}\rho_M(k_2x_n)-\varepsilon_n=A_\infty(x_n,k_2)-\varepsilon_n.$$

令 $n\to\infty$,则 $\varepsilon_n\to\varepsilon_0=\min\{1,(k_1^{-1}-k_2^{-1})\rho_N(p_+(k_1|x|))\}$,且 $A_\infty(x,k_1)\leqslant A_\infty(x,k_2)-\varepsilon_0<A_\infty(x,k_2)$,结论得证.

(ⅵ) 对任何 $x=(x(i))_i\in l_{M,\infty}\setminus\{0\}$ 及 $k_1,k_2\in(k_\infty^{*}(x),\theta^{-1}(x)),k_1<k_2$,取

$$x_n=(x_n(i))_i\qquad x_n(i)=\begin{cases}x(i) & i\leqslant n,\\ 0 & i>n.\end{cases}$$

因为 $\alpha_\infty(k_1x)\geqslant 0$,所以 $\rho_M(k_1x)>1,\rho_N(p_+(k_1|x|))\geqslant 0$.重复(ⅴ)的证明过程并注意变化 $\varepsilon_n\geqslant 0$,就有 $A_\infty(x,k_1)\leqslant A_\infty(x,k_2)$,结论得证.

定理3 对任何 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 及 $x=(x(i))_i\in l_{M,p}\setminus\{0\}$,都有:

(ⅰ) 若 $k_p^*(x)=k_p^{**}(x)=\infty$,则 $\|x\|_{M,p}=\lim\limits_{k\to\infty}A_p(x,k)$;

(ⅱ) 若 $k_p^*(x)<k_p^{**}(x)=\infty$,则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{M,p}$ 在 $[k_p^*(x),\infty)$ 可达;

(ⅲ) 若 $k_p^{**}(x)<\infty$,则 p-Amemiya 范数 $\|x\|_{M,p}$ 在 $[k_p^*(x),k_p^{**}(x)]$ 可达.

证明 由定理1和定理2,(ⅰ)和(ⅱ)显然.下面证明(ⅲ).事实上,由定理1和定理2知,p-Amemiya 函数 $A_p(x,k)$ 关于 k 在 $(0,\theta^{-1}(x))$ 内连续,且对任何 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$p$-Amemiya 函数 $A_p(x,k)$ 关于 k 在 $(0,k_p^{**}(x))$ 内非增,在 $(k_p^*(x),\theta^{-1}(x))$ 内非减,这蕴含着 $A_p(x,k)$ 在 $[k_p^*(x),k_p^{**}(x)]$ 恒为常数 $\inf\limits_{k\in(0,\theta^{-1}(x))}A_p(x,k)$.再由 $\theta(x)=\inf\{k>0:\rho_M(k^{-1}x)<\infty\}$ 可知,当 $k>\theta^{-1}(x)$ 时,$\rho_M(kx)=\infty$,从而 $A_p(x,k)=\infty$,故 $\inf\limits_{k\in(0,\theta^{-1}(x))}A_p(x,k)=\inf\limits_{k>0}A_p(x,k)$,即 $\|x\|_{M,p}=\inf\limits_{k>0}A_p(x,k)$ 在 $[k_p^*(x),k_p^{**}(x)]$ 可达.

参考文献:

[1] CUI Yun-an,DUAN Li-fen,HUDIZIK H,et al. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces ($1\leqslant p\leqslant\infty$):Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms [J]. Nonlinear Analysis,2008,69:1 796－1 816.

[2] CUI Yun-an,HUDIZIK H,NOWAK M,et al. Some Geometric Properties in Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm [J]. Journal of Convex Analysis,1999,6(1):91－113.

[3] 赵 亮,吴从炘.赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的暴露点 [J].黑龙江大学自然科学学报,2006,23(2):184－187.

[4] ZUO Ming-xia,CUI Yun-an,HUDIZIK H. On the Points of Local Uniform Rotundity and Weak Local Uniform Ro-

tundity in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm [J]. Nonlinear Analysis，2009，71：4 906 - 4 915.

[5] 石钟锐，刘春艳. Musielak-Orlicz 序列空间的暴露性 [J]. 应用泛函分析学报，2012，14(1)：14 - 22.

[6] CUI Yun-an，HUDIZIK H，LI Jing-jing. Some Fundamental Properties for Dual of Orlicz Spaces [J]. Nonlinear Analysis，2010，73：2 353 - 2 360.

[7] 段丽芬，许　晶，崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的一致凸性 [J]. 吉林大学学报：理学版，2011，49(5)：809 - 813.

[8] 崔云安，安红娜，姜泽宏. 弱 Orlicz 的单调系数及单调性 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2008，29(5)：10 - 13.

[9] CHEN S T. Geometry of Orlicz Spaces [M]. Warszawa：Dissertations Math.，1996.

Attainability of p-Amemiya ($1\leqslant p\leqslant\infty$) Norm in Orlicz Sequence Spaces

DUAN Li-fen[1]，WANG Hong-zhi[1]，CUI Yun-an[2]

(1. College of Mathematics，Tonghua Normal University，Tonghua 134002，Jilin China；2. College of Applied Sciences，Harbin University of Science Technology，Harbin 150080，China)

Abstract：In consideration of the Orlicz sequence spaces，p-Amemiya function is defined. By means of real and functional analysis method，feature of p-Amemiya ($1\leqslant p\leqslant\infty$) function and the characterizations over attainability of p-Amemiya norm in the Orlicz sequence spaces are discussed. A whole series of properties of p-Amemiya function are presented. Based on the conclusions，attainability of p-Amemiya norm is derived. And the intervals for p-Amemiya norm attainability are described.

Key words：Orlicz sequence space；p-Amemiya function；p-Amemiya norm；attainability

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 10 页)

Note About Geodesic Curvature Vector of Curves on a Surface

XING Jia-sheng[1]，ZHANG Guang-zhao[2]

(1. Department of Mathematics，LMIB of the Ministry of Education，Beihang University，Beijing 100191，China；2. Department of Technology Science，He'nan Economy & Trade Vocational College，Zhengzhou 450000，China)

Abstract：The authors give the geometric meaning of the geodesic curvature vector，and a direct derivation method about the calculation formula of geodesic curvature and Liouville formula is obtained.

Key words：geodesic curvature vector；geodesic curvature；geometric meaning；Liouville formula

(责任编辑　向阳洁)