第 34 卷　第 5 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 5
2013 年 9 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Sept. 2013

文章编号: 1007－2985(2013)05－0011－05

关于一个半离散非齐次核的逆向 Hilbert 型不等式*

谢子填[1,2],孙宇锋[1]

(1. 韶关学院,广东 韶关　512005;2. 广东肇庆学院数学与信息科学学院,广东 肇庆　526061)

摘　要: 应用权函数方法及实分析技巧,给出一个新的带有最佳常数因子的半离散非齐次核的逆向 Hilbert 型不等式,同时给出它的带有最佳常数因子的等价式.

关键词: 半离散;Hilbert 不等式;Holder 不等式;等价式

中图分类号: O178　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.3969/j.issn.1007－2985.2013.05.004

设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,a_n,b_n>0$,且 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty,0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^q<\infty$,则有如下含最佳常数因子的 Hardy-Hilbert 积分不等式[1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_nb_m}{m+n}<\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/r)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right\}^{1/q},\tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_nb_m}{m+n}\right)^p<\left(\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/r)}\right)^p\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right\}.\tag{2}$$

近年来,人们陆续对不等式(1)和(2)作了大量推广[2-15].笔者应用权函数,将给出一个带有最佳常数因子的半离散非齐次核的逆向 Hilbert 型不等式,同时给出它的等价式.

以下总假设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\alpha\in(0,\pi)$.

引理 1　定义权系数及权函数

$$W(n)=n\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1},$$

$$\widetilde{W}(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\qquad x\in(0,\infty),$$

则有

$$0<\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)(1-\theta(x))<\widetilde{W}(x)<W(n)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right),\tag{3}$$

其中

* **收稿日期:** 2013－02－09
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(S2012010010069)
作者简介: 谢子填(1948－),男,广东肇庆人,广东肇庆学院数学与信息科学学院教授,主要从事解析不等式研究.

$$\theta(x)=\frac{\arctan\dfrac{x+\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

由反正切单调性质易有,$\theta(x)\in(0,1)$.

注1 因 $\forall(a,b)\in\mathbf{R}$,由 $|\arctan a-\arctan b|=\dfrac{1}{1+\xi^2}|a-b|<|a-b|$ 可知,当 x 较小时,也有

$$|\theta(x)|<\frac{x}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)}.$$

证明 首先作变换 $t=nx$,易有

$$W(n)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\arctan\frac{t+\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{argtan}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

注意到无穷级数 $\widetilde{W}(x)$ 的每一项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}$ 关于 n 严格单调下降,于是

$$\widetilde{W}(x)<x\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y^2x^2+2yx\sin\alpha+1}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{argtan}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right):=K,$$

$$\widetilde{W}(x)>x\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y^2x^2+2yx\sin\alpha+1}=\int_x^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\arctan\frac{t+\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\Bigg|_x^\infty=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x+\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)=K(1-\theta(x))>0,$$

其中

$$\theta(x)=\frac{\arctan\dfrac{x+\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

证毕.

引理2 设 $p>1,a_n\geqslant 0,f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 非负可测,且 $0<\int_0^\infty x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty,0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1}a_n^q<\infty$,则有

$$J_1:=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}\left(\int_0^\infty\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\geqslant K^p\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x,\tag{4}$$

$$J_2:=\int_0^\infty\frac{x^{q-1}}{(1-\theta(x))^{q-1}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n\right)^q\mathrm{d}x\leqslant K^q\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}a_n^q.\tag{5}$$

证明 由带权的逆向 Hölder 不等式[16] 及(3)式,有

$$\left(\int_0^\infty\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\geqslant\int_0^\infty\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f^p(x)\mathrm{d}x\left(\int_0^\infty\frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\mathrm{d}x\right)^{p-1}=$$

$$(n^{-1}W(n))^{p-1}\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f^p(x)\mathrm{d}x=$$

$$K^{p-1}n^{1-p}\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f^p(x)\mathrm{d}x,$$

$$J_1\geqslant K^{p-1}\sum_{n=1}^\infty\left(\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)=K^{p-1}\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f^p(x)\right)\mathrm{d}x\geqslant$$

$$K^p\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

故(4)式成立.类似地，由 Hölder 不等式及(3)式，注意到 $q<0$，有

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n\right)^q\leqslant\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\right)^{q-1}\times\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n^q=$$

$$(\widetilde{W}(x))^{q-1}x^{1-q}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n^q\leqslant K^{q-1}(1-\theta(x))^{q-1}x^{1-q}\cdot$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n^q, \tag{7}$$

$$J_2=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1-\theta(x))^{q-1}}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\right)^q\mathrm{d}x\leqslant K^q\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q,$$

有(5)式成立.

定理 1　设 $0<p<1, a_n\geqslant 0, f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 非负可测，且

$$0<\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty\qquad 0<\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q<\infty,$$

则成立等价不等式：

$$I:=\sum_{n=1}^\infty a_n\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty f(x)\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\mathrm{d}x>$$

$$K\left(\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{8}$$

$$J_1=\sum_{n=1}^\infty n^{p-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f(x)\mathrm{d}x\right)^p>K^p\int_0^\infty x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$J_2=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1-\theta(x))^{q-1}}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\right)^q\mathrm{d}x<K^q\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q. \tag{10}$$

这里常数因子 K 由引理 1 定义，且 K, K^p 及 K^q 均为最佳值.

证明　由逐项积分定理，I 有 2 种表示. 由条件，(6)式取严格不等号，故有(8)式. 由 Hölder 不等式，有

$$I=\sum_{n=1}^\infty\left(n^{1-\frac{1}{p}}\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}f(x)\mathrm{d}x\right)(n^{\frac{1}{p}-1}a_n)\geqslant J_1^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}}a_n^q.$$

由(6)式，得(8)式. 反之，设(8)式成立，取 $a_n=n^{p-1}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\right)^{p-1}, n\in\mathbf{N}$，则由(8)式，有

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q=J_1=I\geqslant K\left(\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

易由条件知 $J_1>0$，若 $J_1=\infty$，则(9)式自然成立；若 $J_1<0$，则(8)式条件都具备，(11)式取严格不等号，且

$$J_1^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q\right)^{\frac{1}{p}}>K\left(\int_0^\infty(1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

故(9)式成立，且与(8)式等价.

由条件(7)取严格不等号，故有(10)式. 由逆向 Hölder 不等式，有

$$\int_0^\infty f(x)\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\mathrm{d}x=\int_0^\infty ((1-\theta(x))^{\frac{1}{p}}x^{\frac{1}{q}-1}f(x))\cdot$$
$$\left(\frac{x^{1-\frac{1}{q}}}{(1-\theta(x))^{\frac{1}{p}}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n\right)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\left(\int_0^\infty (1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}J_2^{\frac{1}{q}}.$$

由(10)式,有(8)式.

反之,设(8)式成立.取 $f(x)=\frac{x^{q-1}}{(1-\theta(x))^{q-1}}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}a_n\right)^{q-1}$,$x\in(0,\infty)$,由(8)式有

$$\int_0^\infty (1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x=J_2=I\geqslant K\left(\int_0^\infty (1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{12}$$

由(7)式及条件知 $J_2<\infty$.若 $J_2=0$,则(10)式自然成立;若 $J_2>0$,则(8)式条件具备,(12)式取严格不等式,且

$$J_2^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^\infty (1-\theta(x))x^{-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}>K\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}a_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

注意到 $q<0$,得(10)式,且与(8)式等价.可知(8),(9),(10)式等价.

若有正数 $H>K$,使替代(8)式的 K 后仍成立,取充分小的 $\forall\varepsilon>0$,再令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}x^{\frac{\varepsilon}{p}} & x\in(0,1),\\ 0 & x\in[1,\infty),\end{cases}$$

及 $a_n=n^{\frac{\varepsilon}{q}}$,$n\in\mathbf{N}$,则

$$\tilde{I}:=\sum_{n=1}^\infty \tilde{a}_n\int_0^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x>H\left(\int_0^\infty x^{-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\tilde{a}_n^q\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$H\left(\int_0^1 x^{-1+\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\sum_{n=2}^\infty n^{-1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{H}{\varepsilon}(\varepsilon+1)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

另一方面,又有

$$\varepsilon\tilde{I}=\varepsilon\int_0^1 x^{\frac{\varepsilon}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2x^2+2nx\sin\alpha+1}n^{\frac{\varepsilon}{q}}\right)\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\tilde{I}=\varepsilon\int_0^1 x^{\frac{\varepsilon}{p}}\left(\int_0^\infty \frac{y^{\frac{\varepsilon}{q}}}{y^2x^2+2yx\sin\alpha+1}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\xlongequal{y=\frac{t}{x}}$$
$$\varepsilon\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}\int_0^1 x^{-1}\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}=K+\int_0^1 \frac{(t^{\frac{\varepsilon}{q}}-1)\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}+$$
$$\int_1^\infty \frac{(t^{\frac{\varepsilon}{q}}-1)\mathrm{d}t}{t^2+2t\cos\alpha+1}:=K+\eta_1+\eta_2. \tag{14}$$

由控制收敛定理容易证明 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\eta_1=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\eta_2=0$.

由(13)和(14)式,有 $K+\eta_1+\eta_2\geqslant H(\varepsilon+1)^{\frac{1}{q}}$.令 $\varepsilon\to0^+$,有 $K\geqslant H$ 与假设 $K<H$ 矛盾.可知 K 确为(8)式最佳值.

注意到(8),(9)和(10)式等价,易知式(9)和(10)式的常数因子也必为最佳值.

参考文献:

[1] HARDY G H. Note on a Theorem of Hilbert Concerning Series of Positive Term [J]. Proc. London Math. Soc.,1925,23(2):XLV - XLVI.

[2] 杨必成.一个半离散的 Hilbert 不等式 [J].广东第二师范学院学报,2011,31(3):1 - 7.

[3] 杨必成.一个推广的非齐次核的 Hilbert 型积分不等式 [J].吉林大学学报:理学版,2010,48(5):719 - 722.

[4] XUE Zi-tian,ZENG Zheng. A Hilbert-Type Integral Inequality Whose Kernel is a Homogeneous Form of Degree-3 [J].

J. Math. Anal. Appl., 2008, 339: 324 - 331.

[5] 曾　峥，谢子填. 一个新的有最佳常数因子的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2010(3)：31 - 33.

[6] ZENG Zheng, XIE Zi-tian. A Hilbert's Inequality with a Best Constant Factor [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2009, Article ID 820176, 8 Pages, doi: 10.1155/2009/820176.

[7] ZENG Zheng, XIE Zi-tian. On a New Hilbert-Type Integral Inequality with the Integral in Whole Plane [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2010, Article ID 256796, 8 Pages, 2010. doi: 10.1155/2010/256796.

[8] XIE Zi-tian, ZENG Zheng. A New Hilbert-Type Inequality with the Integral in Whole Plane [J]. Kyungpook Mathematical Journal, 2012, 52: 291 - 298.

[9] XIE Zi-tian. A New Reverse Hilbert-Type Inequality with a Best Constant Factor [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 343: 1 154 - 1 160.

[10] 谢子填，杨必成，曾　峥. 一个新的实齐次核的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 吉林大学学报：理学版，2010，48(6)：941 - 945.

[11] 谢子填，曾　峥. 一个实齐次核的 Hilbert 型积分不等式及其等价形式 [J]. 浙江大学学报：理学版，2011，38(3)：266 - 270.

[12] 谢子填. 一个实数齐次核的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2011，32(4)：26 - 30.

[13] 谢子填，曾　峥. 一个新的 -4μ 齐次半离散 Hilbert 型不等式 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2012，33(3)：15 - 19.

[14] XIE Zi-tian, ZENG Zheng. On a Hilbert-Type Integral Inequality with the Homogeneous Kernel of Real Number-Degree and Its Operator Form [J]. Advances and Applications in Mathematical Sciens, 2011, 10(5): 481 - 490.

[15] XIE Zi-tian, ZENG Zheng. A New Hilbert-Type Inequality in Whole Plane with the Homogeneous Kernel of Degree 0 [J]. *i*-Manager's Journal on Mathematics, 2013, 2(1): 13 - 19.

[16] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 第 3 版. 济南：山东科技出版社，2004.

On a Half-Discrete Reverse Hilbert-Type Inequality with a Non-Homogeneous Kernel

XIE Zi-tian[1,2], SUN Yu-feng[1]

(1. Shaoguan University, Shaoguan 512005, Guangdong China; 2. School Mathematics and Information Sciences, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, Guangdong China)

Abstract: By using the way of weight functions, a new half-discrete reverse Hilbert-type inequality is giver, with a non-homogeneous kernel and with a best constant factor. An equivalent form with a best constant factor is presented.

Key words: half-discrete; Hilbert-type inequality; Hölder's inequality; equality form

(责任编辑　向阳洁)