文章编号:1007－2985(2013)01－0016－05

对偶风险模型中的随机观察*

刘风云,陈　旭
(湖南师范大学数学与计算机科学学院,湖南 长沙　410081)

摘　要:研究了随机观察在对偶风险模型中的应用.当罚金函数仅依赖于破产赤字$\omega(x_1,x_2)=\omega(x_2)$时,导出Gerber-shiu期望折现罚金函数$m_\delta(u)$所满足的微积分方程,并给出了当收益额的密度函数服从指数分布和$\omega(x)=\mathrm{e}^{-r_2x}$时,得到$m_\delta(u)$的显示解.

关键词:对偶模型;随机观察;折罚函数;微积分方程
中图分类号:O211.5　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2013.01.005

1　模型建立和介绍

公司在t时刻的盈余$U(t)$为

$$U(t)=u-ct+S(t)=u-ct+\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\qquad t\geqslant 0.$$

其中:u为公司的初始本金,且$U(0)=u$;c为单位时间内的支出率且为大于0的常数;收益额$\{X_i,i\geqslant 1\}$构成一个独立同分布的非负随机变量序列,具有共同的分布函数$F(x)$和密度函数$f(x)$;$S(t)$表示在时刻t之前的总收益额;随机过程$\{N(t):t\geqslant 0\}$为计数过程,表示在时刻0与t之间所发生跳跃的总次数,记第$(i-1)$次与第i次跳之间所历经的时间为θ_i,$i=1,2,\cdots$,它们是独立同分布的非负随机变量序列,设其分布是服从参数为λ的指数分布.

假设$\{Z_k\}$为随机观察的时刻,且$Z_0=0$,令$M_k=Z_k-Z_{k-1}$为第$(k-1)$次与第k次观察所历经的时间,$\{M_k\}$为一独立同分布的非负随机变量序列,且假设它们服从参数为γ的指数分布,并假设$\{N(t):t\geqslant 0\}$和$\{X_i,i\geqslant 1\}$以及$\{M_k\}$是相互独立的.

定义1　破产时刻$\tau=Z_{k^*}$,$k^*=\inf\{k\geqslant 1:U(Z_k)\leqslant 0\}$,即只有当观察时刻的盈余小于或等于0时,才将其视为真正的破产.如在模型图(图1)中的时刻Z_5时有$U(Z_5)<0$,即在此时可认为公司破产;而

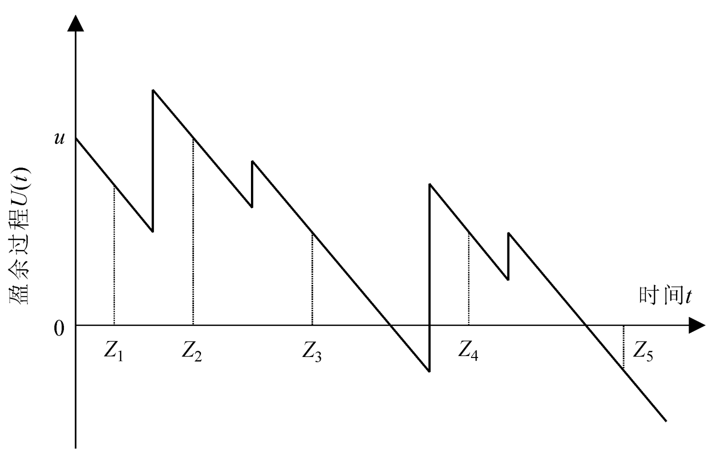

图1　模型图

* **收稿日期**:2012－10－10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171101;10871064)
作者简介:刘风云(1987－),女,湖南永州人,硕士,主要从事金融数学研究;陈　旭(1978－),女,湖北人,湖南师范大学数学与计算机科学学院讲师,主要从事金融数学研究.

在 Z_3 与 Z_4 之间，虽然出现过盈余小于 0 的时刻，但因没有被观测到，故可认为公司继续经营生存着. 令 $U(k)$ 为第 k 次观察时公司的盈余，则

$$U(k)=U(k-1)-c(Z_k-Z_{k-1})+(\sum_{i=1}^{N(Z_k)}X_i-\sum_{i=1}^{N(Z_{k-1})}X_i)=$$
$$U(k-1)-cM_k+(S(Z_k)-S(Z_{k-1})).$$

2　Gerber-shiu 折罚函数

定义 2　Gerber-shiu 期望折现罚金函数为

$$m_\delta(u)=E[\mathrm{e}^{-\delta\tau}\omega[U(k^*-1),|U(k^*)|]I_{\tau<\infty}\mid U(0)=u],$$

其中 δ 为折现因子且 $\delta>0$，$U(k^*-1)$ 为破产前一次观测到的盈余，$U(k^*)$ 为破产赤字，ω 是罚金函数，表示 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$. 假设 $\omega[U(k^*-1),|U(k^*)|]=\omega(|U(k^*)|)$，即罚金函数仅依赖于破产赤字.

讨论在很短的时间区间 $[0,h]$，根据首次观察时刻 Z_1 和首次由跳跃引起的收入量 x 的大小分情况考虑，有如下 3 种情形：

第 1 种，在 $[0,h]$ 区间里既没有发生观察，也没有发生跳；

第 2 种，在时间 $[0,h]$ 里发生了 1 次观察，但没有发生跳；

第 3 种，在 $[0,h]$ 区间里得到了 1 次收入，即发生了 1 次跳但没有发生观察.

按照以上情况，用全概率公式，可得如下方程：

$$m_\delta(u)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)h}m_\delta(u-ch)+\int_0^h\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)t}\int_0^\infty m_\delta(u-ct+x)f(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^h\gamma\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)t}[m_\delta(u-ct)I_{\{u-ct>0\}}+\omega(-u+ct)I_{\{u-ct\leqslant 0\}}]\mathrm{d}t.$$

对 h 求导，可得

$$0=-(\lambda+\delta+\gamma)\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)h}m_\delta(u-ch)-c\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)h}m'_\delta(u-ch)+$$
$$\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)h}\int_0^\infty m_\delta(u-ch+x)f(x)\mathrm{d}x+\gamma\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta+\gamma)h}\cdot$$
$$[m_\delta(u-ch)I_{\{u-ch>0\}}+\omega(-u+ch)I_{\{u-ch\leqslant 0\}}].$$

令 $h\to 0$ 并整理，可得

$$0=cm'_\delta(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_\delta(u)-\gamma m_\delta(u)I_{\{u>0\}}-\gamma\omega(-u)I_{\{u\leqslant 0\}}-\lambda\int_0^\infty m_\delta(u+x)f(x)\mathrm{d}x.$$

所以，当 $x>0$ 时有

$$0=cm'_\delta(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_\delta(u)-\gamma m_\delta(u)-\lambda\int_0^\infty m_\delta(u+x)f(x)\mathrm{d}x;\tag{1}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$m_\delta(u)$ 满足的方程为

$$0=cm'_\delta(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_\delta(u)-\gamma\omega(-u)-\lambda\int_0^\infty m_\delta(u+x)f(x)\mathrm{d}x.\tag{2}$$

由于 $m_\delta(u)$ 在 $x=0$ 处左可导且右可导，且在 $x=0$ 处是连续的，因此当 $x\to 0$ 时，(1)(2) 式相减有

$$cm'_\delta(0+)-cm'_\delta(0-)=\gamma m_\delta(0)-\gamma\omega(0).$$

为了不易混淆，设

$$m_\delta(u)=\begin{cases}m_{\delta,1}(u) & u\leqslant 0,\\ m_{\delta,2}(u) & u>0.\end{cases}$$

定理 1　折罚函数 $m_\delta(u)$ 满足如下的微积分方程：

$$cm'_{\delta,2}(u)+(\lambda+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda\int_0^\infty m_{\delta,2}(u+x)f(x)\mathrm{d}x=0\qquad u>0,\tag{3}$$

$$cm'_{\delta,1}(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_{\delta,1}(u)-\gamma\omega(-u)-\lambda\int_0^\infty m_{\delta,1}(u+x)f(x)\mathrm{d}x=0\qquad u\leqslant 0.\tag{4}$$

3 数值计算折罚函数的显示解

当 $f(x)=v\mathrm{e}^{-vx}$ 时,代入(3)式有

$$cm_{\delta,2}'(u)+(\lambda+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda\int_0^{\infty}m_{\delta,2}(u+x)v\mathrm{e}^{-vx}\mathrm{d}x=0\qquad u>0.$$

进行变量替换,令 $z=u+x$,可得

$$cm_{\delta,2}'(u)+(\lambda+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda\int_u^{\infty}m_{\delta,2}(z)v\mathrm{e}^{-v(z-u)}\mathrm{d}z=0\qquad u>0,$$

也即

$$cm_{\delta,2}'(u)+(\lambda+\delta)m_{\delta,2}(u)-\lambda v\mathrm{e}^{vu}\int_u^{\infty}m_{\delta,2}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z=0. \tag{5}$$

对(5)式中的 u 求导,得

$$cm_{\delta,2}''(u)+(\lambda+\delta)m_{\delta,2}'(u)-\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_u^{\infty}m_{\delta,2}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z+\lambda vm_{\delta,2}(u)=0. \tag{6}$$

在(5)式左右两侧同时乘以 v,有

$$cvm_{\delta,2}'(u)+(\lambda+\delta)vm_{\delta,2}(u)-\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_u^{\infty}m_{\delta,2}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z=0. \tag{7}$$

联立(6)和(7)式可得

$$cm_{\delta,2}''(u)+(\lambda+\delta-cv)m_{\delta,2}'(u)-\delta vm_{\delta,2}(u)=0,$$

它的特征方程为

$$cR^2+(\lambda+\delta-cv)R-\delta v=0. \tag{8}$$

因为(8)式判别式 $\Delta>0$,所以方程有2个不同的根,设其分别为 $\rho_1\geqslant0,\rho_2<0$,故 $m_{\delta,2}(u)$ 的表达式为 $m_{\delta,2}(u)=A_1\mathrm{e}^{\rho_1u}+A_2\mathrm{e}^{\rho_2u}$,其中 A_1 和 A_2 为常数.

又因为当 $u\to\infty$ 时,公司永远不会破产,即破产时刻 $\tau\to\infty$,故有 $\lim\limits_{u\to\infty}m_{\delta,2}(u)=0$,所以当 $u\to\infty$ 时有 $A_1=0$,因此在 $u>0$ 时的折罚函数为

$$m_{\delta,2}(u)=A_2\mathrm{e}^{\rho_2u}. \tag{9}$$

令 $\omega(x)=\mathrm{e}^{-r_2x}$,将 $f(x)=v\mathrm{e}^{-vx}$ 代入(4)式有

$$cm_{\delta,1}'(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_{\delta,1}(u)-\gamma\mathrm{e}^{r_2u}-\lambda\int_0^{-u}m_{\delta,1}(u+x)v\mathrm{e}^{-vx}\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_{-u}^{\infty}m_{\delta,2}(u+x)v\mathrm{e}^{-vx}\mathrm{d}x=0.$$

进行变量替换,令 $z=u+x$ 并整理,得

$$cm_{\delta,1}'(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_{\delta,1}(u)-\gamma\mathrm{e}^{r_2u}-\lambda v\mathrm{e}^{vu}\int_u^{0}m_{\delta,1}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z-$$
$$\lambda v\mathrm{e}^{vu}\int_0^{\infty}m_{\delta,2}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z=0. \tag{10}$$

(10)式两侧同时对 u 求导,得

$$cm_{\delta,1}''(u)+(\lambda+\delta+\gamma)m_{\delta,1}'(u)-\gamma r_2\mathrm{e}^{r_2u}-\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_u^{0}m_{\delta,1}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z+$$
$$\lambda vm_{\delta,1}(u)-\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_0^{\infty}m_{\delta,2}(z)v\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z=0. \tag{11}$$

在(10)式两边同时乘以 v,有

$$cvm_{\delta,1}'(u)+(\lambda+\delta+\gamma)vm_{\delta,1}(u)-\gamma v\mathrm{e}^{r_2u}-\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_u^{0}m_{\delta,1}(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z-$$
$$\lambda v^2\mathrm{e}^{vu}\int_0^{\infty}m_{\delta,2}(z)v\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z=0. \tag{12}$$

由(11),(12)式相减可得

$$cm_{\delta,1}''(u)+(\lambda+\delta+\gamma-cv)m_{\delta,1}'(u)-(\delta+\gamma)vm_{\delta,1}(u)-\gamma r_2\mathrm{e}^{r_2u}+\gamma v\mathrm{e}^{r_2u}=0,$$

故 $m_{\delta,1}(u)$ 有表达形式 $m_{\delta,1}(u)=C_0\mathrm{e}^{r_0u}+C_1\mathrm{e}^{r_1u}+C_2\mathrm{e}^{r_2u}$，其中 $C_i(i=1,2,3)$ 是常数，r_0 和 r_1 是如下方程的 2 根：

$$cR^2+(\lambda+\delta+\gamma-cv)R-(\delta+\gamma)v=0. \tag{13}$$

又因为(13) 式的判别式 $\Delta>0$ 且 $r_0r_1=\dfrac{-(\gamma+\delta)v}{c}\neq 0$，所以可设 $r_0>0,r_1<0$.

又当 $r_2=0$ 时，

$$\lim_{u\to-\infty}m_{\delta,1}(u)=E[\mathrm{e}^{-\delta\tau}]=\int_0^\infty\gamma\mathrm{e}^{-(\gamma+\delta)t}\mathrm{d}t=\frac{\gamma}{\gamma+\delta},$$

而当 $r_2>0$ 时，$\lim\limits_{u\to-\infty}\omega(-u)=\lim\limits_{u\to-\infty}\mathrm{e}^{r_2u}=0$，故此时 $\lim\limits_{u\to-\infty}m_{\delta,1}(u)=0$. 因此当 $u\to-\infty$ 时，$m_{\delta,1}(u)$ 有界，从而有 $C_1=0$，得到

$$m_{\delta,1}(u)=C_0\mathrm{e}^{r_0u}+C_2\mathrm{e}^{r_2u}. \tag{14}$$

将(9) 和(14) 代入(10) 式，并计算化简整理，有

$$c(C_0r_0\mathrm{e}^{r_0u}+C_2r_2\mathrm{e}^{r_2u})+(\lambda+\gamma+\delta)(C_0\mathrm{e}^{r_0u}+C_2\mathrm{e}^{r_2u})-\gamma\mathrm{e}^{r_2u}+$$
$$\frac{\lambda C_0v\mathrm{e}^{r_0u}}{r_0-v}-\frac{\lambda C_0v\mathrm{e}^{vu}}{r_0-v}+\frac{\lambda C_2v\mathrm{e}^{r_2u}}{r_2-v}-\frac{\lambda C_2v\mathrm{e}^{vu}}{r_2-v}+\frac{\lambda A_2v\mathrm{e}^{vu}}{\rho_2-v}=0.$$

由于

$$cr_0+(\lambda+\gamma+\delta)+\frac{\lambda v}{r_0-v}=\frac{cr_0{}^2+(\lambda+\gamma+\delta-cv)r_0-(\gamma+\delta)v}{r_0-v}=0,$$

用待定系数法，根据 e^{r_2u} 和 e^{vu} 前的系数为 0，有

$$cC_2r_2+(\lambda+\gamma+\delta)C_2-\gamma+\frac{\lambda vC_2}{r_2-v}=0,$$

$$\frac{A_2}{\rho_2-v}-\frac{C_2}{r_2-v}-\frac{C_0}{r_0-v}=0,$$

又 $m(0+)=m(0-)$ 即有 $A_2=C_0+C_2$，因此整理可得

$$C_2=\frac{\gamma}{cr_2+\gamma+\lambda+\delta+\dfrac{\lambda v}{r_2-v}}=\frac{\gamma(r_2-v)}{c(r_2-r_0)(r_2-r_1)},$$

$$C_0=\frac{\gamma(r_0-v)(\rho_2-r_2)}{c(r_2-r_1)(r_0-\rho_2)(r_2-r_0)},$$

$$A_2=\frac{(r_2-r_0)(\rho_2-v)}{(r_2-v)(\rho_2-r_0)}C_2=\frac{\rho_2-r_1}{r_2-r_1}.$$

当 $f(x)=v\mathrm{e}^{-vx}$ 时，可得到折罚函数的显示表达式为

$$m_{\delta,1}(u)=\frac{\gamma(r_0-v)(\rho_2-r_2)}{c(r_2-r_1)(r_0-\rho_2)(r_2-r_0)}\mathrm{e}^{r_0u}+\frac{\gamma(r_2-v)}{c(r_2-r_0)(r_2-r_1)}\mathrm{e}^{r_2u}\qquad u\leqslant 0,$$

$$m_{\delta,2}(u)=\frac{(\rho_2-r_1)}{(r_2-r_1)}\mathrm{e}^{\rho_2u}\qquad u>0.$$

注 1 当 $r_2=0$ 时，

$$m_\delta(u)=E[\mathrm{e}^{-\delta\tau}I_{\{\tau<\infty\}}\mid U(0)=u]=(1-\frac{\rho_2}{r_1})\mathrm{e}^{\rho_2u}I_{\{u>0\}}+\frac{\gamma}{cr_0r_1}[\frac{\rho_2(r_0-v)}{(r_0-\rho_2)}\mathrm{e}^{r_0u}-v]I_{\{u\leqslant 0\}}.$$

当 $\gamma\to+\infty$ 时，因为 $r_0+r_1=v-\dfrac{\lambda+\gamma+\delta}{c}$，$r_0>0,r_1<0$，所以此时 $r_1\to-\infty,r_0\to v,\dfrac{r_1}{\gamma}\to\dfrac{-1}{c}$，故此时的折罚函数为

$$m_\delta(u)=E[\mathrm{e}^{-\delta\tau}I_{\{\tau<\infty\}}\mid U(0)=u]=\mathrm{e}^{\rho_2u}I_{\{u>0\}}+I_{\{u\leqslant 0\}}. \tag{15}$$

事实上，当 $\gamma\to+\infty$ 时，随机观察就逼近于连续观察，此模型就变为经典风险模型的对偶模型.

取(15) 式中的 $\delta=0$，而 ρ_2 为 $cR^2+(\lambda-cv)R=cR[R-(v-\dfrac{\lambda}{c})]=0$ 的非负根，则 $\rho_2=v-\dfrac{\lambda}{c}$，此

时便可很容易获得破产概率为

$$\psi(u)=\mathrm{e}^{(v-\frac{\lambda}{c})}I_{\{u>0\}}+I_{\{u\leqslant 0\}}.$$

参考文献:

[1] HANSJORG ALBRECHER,ERIC C K CHEUNG. Randomized Observation Periods for the Compound Poisson Risk Model:The Discounted Penalty Function [J]. Scandinavian Actuarial Journal,2011(0):1－29.

[2] BENJAMIN AVANZI,HANS U GERBER,ELIAS S W SHIU. Optimal Dividends in the Dual Model [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2007,41:111－123.

[3] BENJAMIN AVANZI,HANS U GERBER. Optimal Dividend in the Dual Model with Diffusion [J]. ASTIN Bulletin, 2008,38:653－667.

[4] ANDREW C Y NG. On a Dual Model with a Dividend Threshold [J]. Insurance:Mathematics and Economics,2009,44: 315－324.

[5] ALBRECHER H,BADESCU A,LANDRIAULT D. On the Dual Risk Model with Tax Payments [J]. Insurance:Mathematics and Economics,2008,42:1 086－1 094.

[6] HAN U GERBER. On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier [J]. Scandinavian Actuarial Journal,1981(2):105－115.

[7] PENG Zhi-guan. On a Dual Model with Random Income[J]. Chongqing Technol Business Univ. ,2011,28(2):150－153.

[8] KARATZAS I,SHREVE S E. Brownian Motion and Stochastic Calulus [M]. 2nd Ed. Beijing:World Book Inc. ,2008.

Dual Risk Model with Random Observation

LIU Feng-yun,CHEN Xu

(College of Mathematics and Computer Science,Hunan Normal University,Changsha 410081,China)

Abstract:A dual risk model for the surplus process where the process can only be observed at random observation times is considered. Tthe Gerbershiu expected discounted penalty function $m_\delta(u)$ which satisfies the integro-differential equations is derived. Moreover,when the individual gains size distribution is exponential $f(x)=v\mathrm{e}^{-vx}$ and penalty function $\omega(x)=\mathrm{e}^{-r_2 x}$,the explicit expressions for $m_\delta(u)$ are obtained.

Key words:dual model;random observation;the expected discounted penalty function;integro-differential equation

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 10 页)

Properties of Extreme Value and Extreme Value Tangent Vector of Normal Curvature on Surface

XING Jia-sheng,WANG Yong-jun

(Department of Mathematics,LMIB of the Ministry of Education,Beihang University,Beijing 100191,China)

Abstract:The direct method of finding the extreme value of normal curvature and the extreme value vector are considered. A direct derivation method is proposed,and its properties as matrix characteristic value and characteristic vector are obtained.

Key words:extreme value of normal curvature;extreme value tangent vector;characteristic value;characteristic vector;conjugate and orthogonal tangent vector;Euler's formula of normal curvature

(责任编辑　向阳洁)