

文章编号: 1000-4750(2013)01-0031-06

# 刚性尖头弹侵彻圆柱形金属厚靶分析模型

宋殿义<sup>1,2</sup>, 刘 飞<sup>1,2</sup>, 蒋志刚<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学指挥军官基础教育学院渡河指挥系, 湖南, 长沙 410072; 2. 湖南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410082)

**摘 要:** 考虑金属厚靶侧面自由边界的影响, 研究了刚性尖头弹侵彻有限平面尺寸金属厚靶问题。基于有限圆柱形空腔膨胀理论和线性硬化材料模型, 得到了空腔壁径向压力的解析式, 建立了刚性尖头弹侵彻有限直径圆柱形金属厚靶工程模型。与试验和数值模拟比较表明, 该文工程模型计算精度很好。基于所建立的工程模型, 研究了靶板半径对侵彻深度和侵彻阻力的影响, 结果表明: 当靶板与弹丸半径比值小于 20 时, 靶板半径对侵彻阻力和侵彻深度有显著影响, 不能按无限尺寸靶板计算; 当靶板与弹丸半径比值大于 20 时, 靶板半径对侵彻阻力和侵彻深度影响较小, 可近似按无限尺寸靶板计算。

**关键词:** 空腔膨胀; 线性硬化; 工程模型; 金属靶板; 刚性弹丸

中图分类号: TU511 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.06.0391

## AN ANALYTICAL MODEL FOR PENETRATION INTO CYLINDRICAL METALLIC THICK TARGET BY RIGID SHARP-NOSED PROJECTILES

SONG Dian-yi<sup>1,2</sup>, LIU Fei<sup>1,2</sup>, JIANG Zhi-gang<sup>1</sup>

(1. Department of River-Crossing, College of Basic Education for Commanding Officers, National University of Defence Technology, Changsha, Hunan 410072, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

**Abstract:** The penetration of thick metal targets with finite planar dimensions by a rigid sharp-nose was investigated in the consideration of the lateral free boundary of the target. Based on the Finite Cylindrical Cavity Expansion (FCCE) theory and the linear strain-hardening material model, analytical solutions of radial pressure on the cavity wall were obtained, and an engineering model for rigid sharp-nosed projectile penetration into cylindrical thick metal targets was presented. The penetration depths from the present model are in a good agreement with those from the published ballistic experiments and numerical simulation. Based on the model, the influence of a target radius on penetration depth and penetration resistance was studied. The results show that the penetration resistance and the penetration depth are obviously affected by the ratio of the target radius to the projectile radius when the ratio is less than 20, they can not be calculated as an unlimited-size target. When the ratio of the target radius to the projectile radius is larger than 20, the target radius has less effects on the penetration depth and penetration resistance, that can be approximately calculated as an unlimited-size target.

**Key words:** cavity expansion; linear strain-hardening; engineering model; metallic target; rigid projectile

空腔膨胀理论在金属穿甲研究中已得到广泛应用。Forrestal 及其合作者<sup>[1-7]</sup>对刚性弹侵彻铝合金靶进行了大量试验和理论研究, 建立了不可压缩和可压缩幂次硬化材料的动态空腔膨胀理论, 得到了

球形头、卵形头和锥形头刚性弹侵彻铝合金靶板侵深、极限速度和剩余速度的解析式。Chen 等<sup>[8-11]</sup>应用动态空腔膨胀理论, 建立了刚性弹侵彻厚靶板的无量纲解析式。最近, 为研究靶板背面自由边界

收稿日期: 2011-06-26; 修改日期: 2011-11-03

通讯作者: 宋殿义(1978—), 男, 吉林人, 讲师, 硕士, 从事道路桥梁教学及防护工程研究(E-mail: changshasong@tom.com).

作者简介: 刘 飞(1981—), 男, 湖北人, 助教, 硕士, 从事防护工程研究(E-mail: liufei\_nudt@126.com);

蒋志刚(1961—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 从事冲击力学、桥梁结构及防护结构研究(E-mail: jzg13508489165@yahoo.com.cn).

和侧面自由边界的影响,蒋志刚等<sup>[12-14]</sup>提出了理想弹塑性材料有限球形空腔膨胀理论和有限柱形空腔膨胀理论,建立了刚性尖头弹侵彻/贯穿有限厚度金属靶和长杆弹侵彻有限平面尺寸金属厚靶工程模型。

本文基于有限柱形空腔膨胀理论,将靶板材料扩展到线性硬化材料,得到了线性硬化材料空腔壁径向压力的解析解;首次建立了刚性尖头弹侵彻有限直径圆柱形金属厚靶工程模型,将有限柱形空腔膨胀理论的应用范围推广到刚性尖头弹;最后,以文献[4]试验为例,验证了本文工程模型的合理性,并讨论了靶板半径对侵彻深度和侵彻阻力的影响。

## 1 线性硬化材料的有限柱形空腔膨胀

### 1.1 计算模型

设线性硬化材料柱体半径为  $r_t$ , 忽略材料的压缩性<sup>[1,12]</sup>(弹性波速  $C = \infty$ , 泊松比  $\nu = 0.5$ ), 有限柱形空腔膨胀模型<sup>[14]</sup>如图 1 所示。其中,  $t$  时刻的空腔半径为  $r_c$ , 弹塑性边界半径为  $r_p$ 。假设空腔膨胀速度  $\dot{r}_c$  为常数, 一般地, 空腔半径从零( $t=0$  时刻)增大到最终值  $r_{cf}$  的膨胀过程可分为两阶段: 第一阶段为弹塑性阶段( $r_p < r_t$ ), 第二阶段为塑性阶段( $r_p \equiv r_t$ )。柱体外表面产生裂纹时, 第二阶段结束。

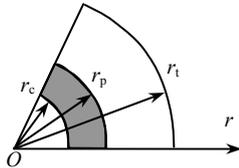


图 1 有限柱形空腔膨胀模型

Fig.1 The idealization of finite cylindrical cavity expansion

单轴应力状态下线性硬化材料的应力-应变关系<sup>[15]</sup>为:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \sigma \leq \sigma_{0y} \\ \sigma_{0y} + E_p \left( \varepsilon - \frac{\sigma_{0y}}{E} \right), & \sigma > \sigma_{0y} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\sigma_{0y}$  为初始屈服强度;  $E$  为弹性模量;  $E_p$  为切线模量。

柱形空腔膨胀为轴对称平面应变问题, 采用 Mises 屈服准则, 等效应变和等效应力分别为<sup>[14]</sup>:

$$\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_r, \quad \sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (2)$$

式中:  $\sigma_e$  和  $\varepsilon_e$  分别为 Mises 等效应力和等效应变;  $\sigma_r$  和  $\varepsilon_r$  分别为径向应力和径向应变;  $\sigma_\theta$  和  $\varepsilon_\theta$  分别

为环向应力和环向应变, 均以压为正。

由式(1)、式(2)得本构方程:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \begin{cases} \frac{2Er_c^2}{3r^2}, & \sigma_e \leq \sigma_{0y} \\ \frac{2\sigma_{0y}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{E_p}{E} \right) + \frac{2E_p r_c^2}{3r^2}, & \sigma_e > \sigma_{0y} \end{cases} \quad (3)$$

由文献[14], 柱形空腔膨胀理论的质点速度场  $v = v(r, t)$  与本构方程无关,  $r$  为柱体半径,  $t$  为时间, 即:

$$v = \frac{r_c}{r} \frac{\partial r_c}{\partial t} = \frac{r_c}{r} \dot{r}_c \quad (4)$$

设靶板材料密度为  $\rho_t$ , 由动量守恒得<sup>[14]</sup>:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho_t \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (5)$$

式(4)和式(5)在弹性区和塑性区均成立, 并与式(3)一起构成不可压缩线性硬化材料有限柱形空腔膨胀的基本方程。

### 1.2 空腔壁径向压力解算

#### 1.2.1 弹塑性阶段( $r_p < r_t$ )

不可压缩材料在弹塑性边界应力连续<sup>[13]</sup>, 由屈服条件  $\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_{0y}$  和式(3)可得:

$$\frac{r_c}{r_p} = \left[ \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

令  $r_p = r_t$ , 可得第一阶段结束时的空腔半径:

$$r_{c1} = r_t \left[ \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

在塑性区( $\sigma_e > \sigma_{0y}$ ), 将式(3)和式(4)代入式(5)

得:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{2\sigma_{0y}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{E_p}{E} \right) \frac{1}{r} - \frac{2E_p r_c^2}{3 r^3} - \rho_t \dot{r}_c^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{r_c^2}{r^3} \right) \quad (8)$$

考虑空腔壁处  $r = r_c$ 、 $\sigma_r = \sigma_{rc}$  和弹塑性边界的塑性区一侧  $r = r_p^-$ 、 $\sigma_r = \sigma_{rp}^-$ ,  $\sigma_{rc}$  为空腔壁处的径向应力,  $r_p^-$ 、 $\sigma_{rp}^-$  分别为弹塑性边界的塑性区一侧的柱体半径和径向应力, 可得:

$$\sigma_{rc} = \sigma_{rp}^- + \frac{E_p}{3} \left[ 1 - \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E} \right] - \frac{\sigma_{0y}(E - E_p)}{\sqrt{3}E} \ln \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E}$$

$$\frac{1}{2} \rho_t \dot{r}_c^2 \left( 1 + \ln \frac{\sqrt{3} \sigma_{0y}}{E} - \frac{\sqrt{3} \sigma_{0y}}{E} \right) \quad (9)$$

在弹性区 ( $\sigma_e \leq \sigma_{0y}$ ), 将式(3)和式(4)代入式(5)

可得:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{2Er_c^2}{3r^3} - \rho_t \dot{r}_c^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{r_c^2}{r^3} \right) \quad (10)$$

考虑侧面自由边界条件:  $r = r_t$ ,  $\sigma_r = 0$ , 弹塑性边界的弹性区一侧:  $r = r_p^+$ ,  $\sigma_r = \sigma_{rp}^+$ ,  $r_p^+$ 、 $\sigma_{rp}^+$  分别为弹塑性边界的弹性区一侧的柱体半径和径向应力, 可得:

$$\sigma_{rp}^+ = \frac{E}{3} \left( \frac{r_c^2}{r_p^2} - \frac{r_c^2}{r_t^2} \right) + \frac{\rho_t \dot{r}_c^2}{2} \left( 2 \ln \frac{r_t}{r_p} + \frac{r_c^2}{r_t^2} - \frac{r_c^2}{r_p^2} \right) \quad (11)$$

考虑弹塑性边界的连续条件  $\sigma_{rp}^- = \sigma_{rp}^+$ , 并将式(11)代入式(9)可得弹塑性阶段空腔壁径向压力:

$$\begin{aligned} \sigma_{rc1} = & \frac{\sigma_{0y}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{E - E_p}{E} \ln \frac{\sqrt{3} \sigma_{0y}}{E} \right) + \\ & \frac{E_p}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{3} \sigma_{0y}}{E} \right) - \frac{E r_c^2}{3 r_t^2} + \\ & \frac{1}{2} \rho_t \dot{r}_c^2 \left( 2 \ln \frac{r_t}{r_c} + \frac{r_c^2}{r_t^2} - 1 \right), \quad r_c \leq r_{c1} \quad (12) \end{aligned}$$

### 1.2.2 塑性阶段 ( $r_p \equiv r_t$ )

塑性区应力场仍满足式(8), 由边界条件  $r = r_t$ ,  $\sigma_r = 0$ , 可得塑性阶段空腔壁径向压力:

$$\begin{aligned} \sigma_{rc2} = & \frac{E_p}{3} - \frac{E_p r_c^2}{3 r_t^2} + \frac{2 \sigma_{0y} (E - E_p)}{\sqrt{3} E} \ln \frac{r_t}{r_c} + \\ & \frac{\rho_t \dot{r}_c^2}{2} \left( 2 \ln \frac{r_t}{r_c} + \frac{r_c^2}{r_t^2} - 1 \right), \quad r_{c1} < r_c \leq r_{c2} \quad (13) \end{aligned}$$

式中,  $r_{c2}$  为第二阶段结束时的空腔半径, 由文献[14]得:

$$r_{c2} = (1.316 \sqrt{\varepsilon_f}) r_t \quad (14)$$

式中,  $\varepsilon_f$  为靶材的单向拉伸断裂应变。

## 2 圆柱形金属厚靶侵深模型

### 2.1 侵彻过程的比拟

如图 2 所示, 设刚性尖头弹头部为旋转体, 弹头母线方程  $y = y(z)$  (坐标原点为弹尖), 弹丸半径为  $a$ , 弹头长度为  $l$ 。用一系列柱体半径为  $r_t$ 、空腔半径为  $r_c = y(z)$  的有限柱形空腔膨胀模型模拟弹丸的侵彻过程。  $t$  时刻, 弹丸速度为  $V_z$ , 瞬时侵深为  $P$ , 对应于弹头坐标  $z$  处有限直径柱体的空腔半

径  $r_c = y(z)$ ;  $t + dt$  时刻, 瞬时侵深为  $P + dP$ , 相应地, 空腔半径变化为  $r_c + dr_c = y(z + dP)$ 。因此,  $t$  时刻的空腔膨胀速度为  $\dot{r}_c = y' V_z$ 。即:

$$r_c = y(z), \quad \dot{r}_c = \frac{dr_c}{dt} = y'(z) V_z \quad (15)$$

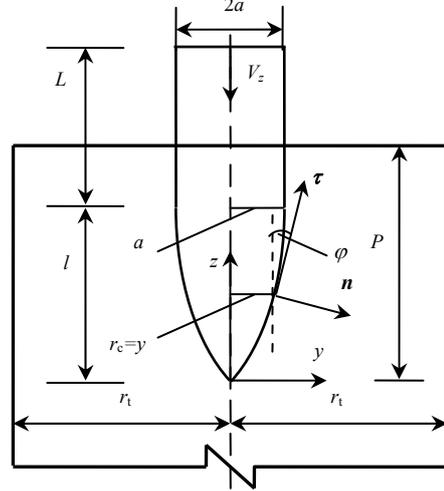


图 2 刚性尖头弹侵彻有限直径圆柱形金属厚靶  
Fig.2 The penetration of rigid sharp-nose projectile into cylindrical thick metal target with finite radius

### 2.2 侵彻深度公式

对于深侵彻问题, 可忽略侵彻初期 ( $P < l$ ) 弹丸阻力的变化<sup>[8]</sup>, 近似按  $P \geq l$  计算侵彻阻力。设弹头表面的径向压力为  $\sigma_r(z)$ , 由于弹靶接触面具有较高的接触应力<sup>[6]</sup>, 并且数值模拟研究发现, 在侵彻过程中弹靶临界面能形成一层较薄的金属薄膜<sup>[16]</sup>, 导致侵彻过程中摩擦力非常小, 因此, 忽略摩擦力。则弹丸轴向阻力为:

$$F_z = \int_0^l \left[ \sigma_r(z) \frac{2\pi y dz}{\cos \varphi} \right] \sin \varphi = 2\pi \int_0^l y y' \sigma_r(z) dz \quad (16)$$

式中,  $\sigma_r(z)$  按有限柱形空腔膨胀理论计算: 当  $y \leq r_{c1}$  时, 取  $\sigma_r(z) = \sigma_{rc1}$ , 按式(12)计算; 当  $r_{c1} < y \leq r_{c2}$  时, 取  $\sigma_r(z) = \sigma_{rc2}$ , 按式(13)计算。

设  $z_1$  和  $z_2$  对应的有限柱体分别刚刚达到弹塑性阶段末和塑性阶段末, 即:

$$\begin{cases} y(z_1) = r_{c1} = r_t \left( \frac{\sqrt{3} \sigma_{0y}}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \\ y(z_2) = r_{c2} = r_t (1.316 \sqrt{\varepsilon_f}) \end{cases} \quad (17)$$

当  $z_1 \geq l$  时,  $y_{\max} = a \leq r_{c1}$ , 塑性区不会或刚刚到达靶板侧面, 有限柱形空腔膨胀只有弹塑性阶段; 当  $z_1 < l$  时,  $y_{\max} = a > r_{c1}$ , 塑性区已到达靶板侧面, 需按有限柱形空腔膨胀的弹塑性阶段和塑性

阶段分区计算弹丸轴向阻力。由式(12)、式(13)、式(15)和式(16)得:

$$F_z = \pi a^2 (\sigma_s + N_d \rho_t V_z^2) = F_s + F_d \quad (18)$$

$$\sigma_s = A_{ep} N_{ep} + A_p N_p + B_{ep} M_{ep} + B_p M_p + A_p^* N_p^* \quad (19)$$

式中:  $F_s = \pi a^2 \sigma_s$  和  $F_d = \pi a^2 N_d \rho_t V_z^2$  分别为静强度阻力和流动阻力;  $F_s^*$  为  $r_t/a \rightarrow \infty$  时的靶板静强度阻力;  $\sigma_s$  为准静态径向应力;  $N_{ep}$ 、 $N_p$ 、 $M_{ep}$ 、 $M_p$ 、 $N_p^*$  为与弹头形状、靶板半径和材料性能相关的静强度项系数;  $A_{ep}$ 、 $A_p$ 、 $B_{ep}$ 、 $B_p$  和  $A_p^*$  为与靶板半径和材料性能相关的静强度项系数; 下标 ep、下标 p 分别代表有限柱形空腔膨胀处于弹塑性阶段和塑性阶段;  $N_d$  为与弹头形状和靶板半径有关的流动阻力项系数, 各系数表达式参见附录。

设弹丸质量为  $m_p$ , 由牛顿第二定律可得弹丸运动方程:

$$m_p V_z \frac{dV_z}{dP} = -\pi a^2 (\sigma_s + N_d \rho_t V_z^2) \quad (20)$$

令  $\xi = V_z^2$ , 代入式(20), 得:

$$\frac{d\xi}{dP} + \frac{2\pi N_d \rho_t a^2}{m_p} \xi = -\frac{2\pi a^2 \sigma_s}{m_p} \quad (21)$$

求解式(21), 并考虑初始条件:  $P = 0, V_z = V_{z0}$ ,

$\xi = V_{z0}^2$ , 可得:

$$P = \frac{m_p}{2\pi a^2 \rho_t N_d} \ln \left( \frac{V_{z0}^2 + \frac{\sigma_s}{\rho_t N_d}}{V_z^2 + \frac{\sigma_s}{\rho_t N_d}} \right) \quad (22)$$

侵彻结束时,  $V_z = 0$ ,  $P = P_{\max}$ , 由式(22)可得侵彻深度计算公式:

$$\frac{P_{\max}}{a} = \frac{m_p}{2\pi a^3 \rho_t N_d} \ln \left( \frac{N_d \rho_t V_{z0}^2 + \sigma_s}{\sigma_s} + 1 \right) \quad (23)$$

式(23)形式上与 Forrestal 公式<sup>[7]</sup>一致, 但其中  $N_d$  和  $\sigma_s$  均考虑了靶板半径的影响。

### 3 算例及讨论

以文献[4]试验为例, 验证上述工程模型, 并讨论靶板半径对侵彻深度和侵彻阻力的影响。计算中未考虑试验中不满足刚性弹假设的高速撞击数据。试验靶板直径 254mm, 材料为 6061-T6511 铝合金, 泊松比 1/3, 弹性模量 68.9GPa, 密度 2710kg/m<sup>3</sup>; 弹丸直径 7.11mm, 质量 20.4g, 材料为 VAR 4340 钢, 弹头 CRH=3(CRH 为卵形弹弹头圆弧半径与弹丸直径比), 圆柱部分长度 59.3mm。

6061-T6511 铝合金的三种材料模型准静态应力-应变曲线见图 3。其中: 幂次硬化模型为文献[4]试验拟合结果; Johnson-Cook(J-C)模型拟合与幂次硬化模型吻合很好, 用于本文数值模拟, 相关参数见表 1; 线性硬化模型在塑性变形较大阶段的拟合精度较高, 相应参数为: 屈服应力 365MPa, 切线模量 46MPa。

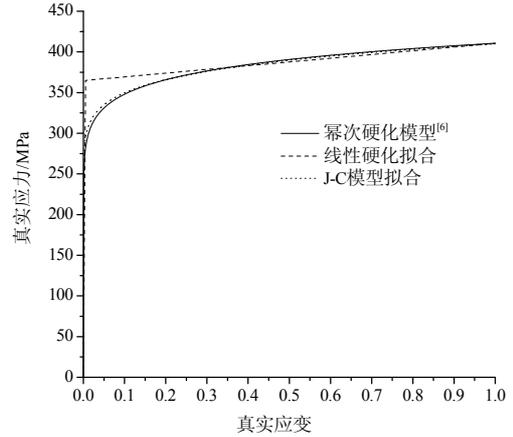


图 3 6061-T6511 铝合金的准静态应力-应变曲线

Fig.3 The quasi-static stress-strain curve of 6061-T6511 aluminum

表 1 J-C 模型参数

Table 1 The material constant of J-C model

$A/\text{MPa}$	$B/\text{MPa}$	$n$	$C$	$m$	$\epsilon_0/s^{-1}$
192	218	0.14	0.0182	1	1

#### 3.1 工程模型的验证

图 4 给出了本文工程模型、数值模拟与 Forrestal 公式<sup>[7]</sup>与试验结果<sup>[4]</sup>的比较。其中, 数值模拟选用 LS\_DYNA 软件进行三维实体分析, 几何模型与试验相同, 有限元模型单元网格为 1mm×1mm×1mm; 弹丸采用刚性材料模型, 靶板采用 J-C 材料模型, 参数如表 1 所示; 弹丸与靶板之间采用面-面接触。

由图 4 可见: 数值模拟与试验结果吻合很好; 当入射速度小于 1150m/s 时, 本文工程模型与实验值相比误差小于 10%, 精度高于 Forrestal 公式。

图 5 给出了侵彻深度与侵彻速度的关系曲线, 可见本文工程模型与数值模拟吻合较好。由于工程模型未考虑靶板迎弹面自由边界的影响, 侵彻初期的阻力略偏大, 导致弹丸速度下降略大于数值模拟, 但最终的侵深吻合较好。

综上可知, 当入射速度小于 1150m/s 时, 本文工程模型能较好地预测刚性尖头弹侵彻铝合金厚靶的侵彻深度。

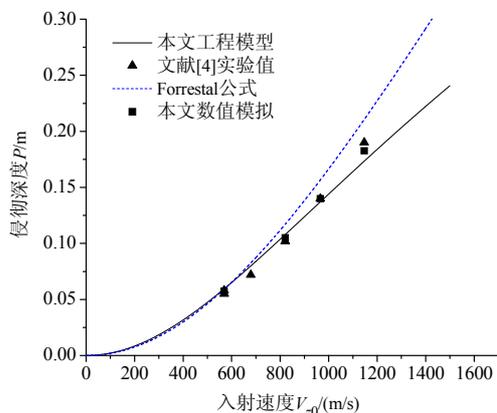


图 4 侵彻深度结果比较

Fig.4 The comparison of penetration depth

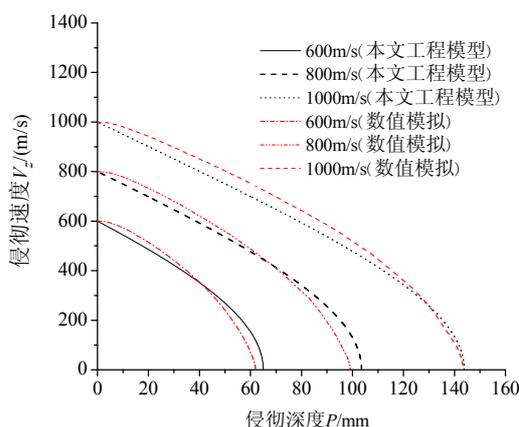


图 5 侵彻深度与侵彻速度的关系( $r_t=127\text{mm}$ )

Fig.5 The relation of penetration depth and penetration velocity

### 3.2 靶板半径的影响

设弹丸、边界条件和靶板材料均与文献[4]试验相同,变化靶板半径和弹丸入射速度,按本文工程模型计算。图 6 给出了不同侵彻速度下弹丸轴向流动阻力与弹丸速度的关系,图 7 给出了靶板半径对弹丸轴向静强度阻力的影响。图 8 给出了侵彻速度和靶板半径对侵彻深度的影响。

由图 6~图 8 可见:

1) 流动阻力随  $r_t/a$  的增大而增大,且入射速度越大,流动阻力的增幅越大。

2) 当  $r_t/a < 20$  时,静强度阻力随  $r_t/a$  的增加明显增大;当  $r_t/a \geq 20$  时,随  $r_t/a$  的增加,静强度阻力增幅很小。

3) 当  $r_t/a < 20$  时,随着  $r_t/a$  的增加,侵彻深度显著减小;当  $r_t/a \geq 20$  时,随着  $r_t/a$  的增加,侵彻深度缓慢减小。当  $r_t/a = 20$  时的侵彻深度与  $r_t/a = 56$  时的侵彻深度比较,相差小于 10%,当  $r_t/a > 20$  时,可近似按无限靶计算。

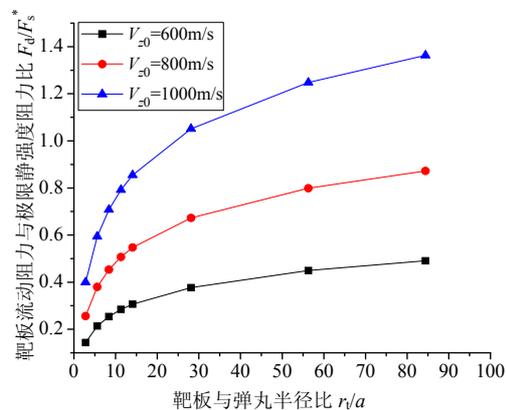


图 6 侵彻速度和靶板半径对弹丸轴向流动阻力的影响

Fig.6 The influence of striking velocities and target radius on axial dynamic penetration resistance

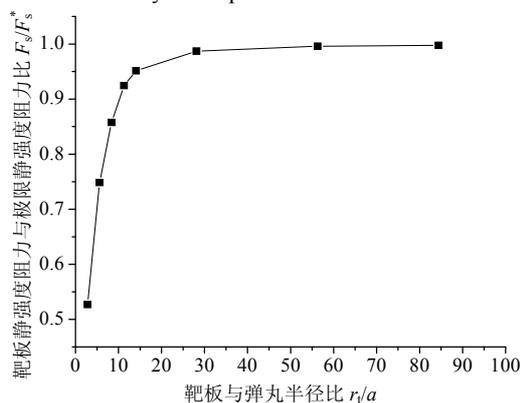


图 7 靶板半径对弹丸轴向静强度阻力的影响

Fig.7 The influence of target radius on axial static penetration resistance

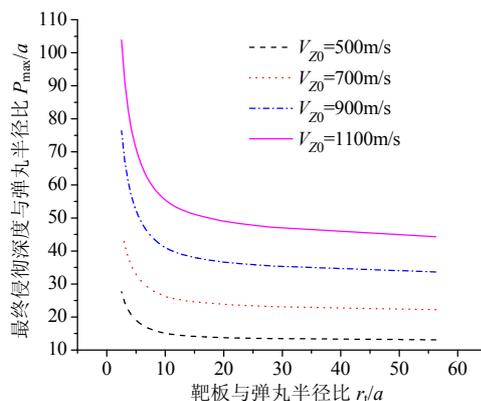


图 8 侵彻速度和靶板半径对侵彻深度的影响

Fig.8 The influence of striking velocities and target radius on the penetration depth

## 4 结论

本文考虑金属厚靶侧面自由边界的影响,基于线性硬化材料模型,得到了金属材料有限柱形空腔膨胀空腔壁径向压力的解析式,建立了刚性尖头弹侵彻有限平面尺寸金属厚靶工程模型。计算结果表明:本文工程模型与试验和数值模拟结果吻合较

好; 当  $r_t/a < 20$  时, 随着  $r_t/a$  的减小, 侵彻深度急剧增大, 不能按无限靶计算。

### 参考文献:

- [1] Forrestal M J, Tzou D Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets [J]. International Journal of Solids Structures, 1997, 34: 4127—4146.
- [2] Warren T L, Forrestal M J. Effects of strain hardening and strain-rate sensitivity on the penetration of aluminum targets with spherical-nosed rods [J]. International Journal of Solids Structures, 1998, 35(28/29): 3737—3753.
- [3] Forrestal M J, Hanchak S J. Perforation experiments on HY-100 steel plates with 4340 R<sub>c</sub> 38 and maraging T-250 steel rod projectiles [J]. International Journal of Impact Engineering, 1999, 22: 923—933.
- [4] Piekutowski A J, Forrestal M J, Poormon K L, et al. Penetration of 6065-T6511 aluminum targets by ogive-nose steel projectiles with striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s [J]. International Journal of Impact Engineering, 1999, 23: 723—734.
- [5] Forrestal M J, Piekutowski A J. Penetration experiments with 6065-T6511 aluminum targets and spherical-nose steel projectiles at striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s [J]. International Journal of Impact Engineering, 2000, 24: 57—67.
- [6] Forrestal M J, Warren T L. Penetration equations for olive-nose rods into aluminum targets [J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35: 727—730.
- [7] Forrestal M J, Warren T L. Perforation equations for conical and olive nose rigid projectiles into aluminum target plate [J]. International Journal of Impact Engineering, 2009, 36: 220—225.
- [8] Chen X W, Li Q M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics [J]. International Journal of Impact Engineering, 2002, 27: 619—637.

- [9] Li Q M, Chen X W. Dimensionless formulae for penetration depth of concrete target impacted by a non-deformable projectile [J]. International Journal of Impact Engineering, 2003, 28: 93—116.
- [10] Chen X W, Li X L, Huang F L, et al. Damping function in the penetration/perforation struck by rigid projectiles [J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35: 1314—1325.
- [11] Li J H, Chen X W. Comparison among depths of penetration of different targets subjected to rigid projectile impact [J]. Trans Tianjin Univ, 2008, 14: 422—425.
- [12] 蒋志刚, 曾首义, 周建平. 刚性尖头弹侵彻有限厚度金属靶板分析模型[J]. 兵工学报, 2007, 28(8): 923—929.  
Jiang Zhigang, Zeng Shouyi, Zhou Jianping. An analytical model for penetration into finite thickness metallic target struck by rigid sharp-nosed projectiles [J]. Acta Armamentarii, 2007, 28(8): 923—929. (in Chinese)
- [13] 蒋志刚, 曾首义, 周建平. 中等厚度金属靶板的三阶段贯穿模型[J]. 兵工学报, 2007, 28(9): 1046—1052.  
Jiang Zhigang, Zeng Shouyi, Zhou Jianping. A three-stage penetration model for moderately thick metallic plates [J]. Acta Armamentarii, 2007, 28(9): 1046—1052. (in Chinese)
- [14] 蒋志刚, 宋殿义, 曾首义. 有限柱形空腔膨胀理论及其应用[J]. 振动与冲击, 2011, 30(4): 139—143.  
Jiang Zhigang, Song Dianyi, Zeng Shouyi. A finite cylindrical cavity expansion theory and its application [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(4): 139—143. (in Chinese)
- [15] Chen E P. Numerical simulation of penetration of aluminum targets by spherical-nose steel rods [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1995, 22: 159—164.
- [16] Camacho G T, Ortiz M. Adaptive Lagrangian modeling of ballistic penetration of metallic targets [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1997, 142: 269—301.

### 附录:

式(18)和式(19)相关系数的表达式如下:

$$A_{ep} = \frac{\sigma_{0y}}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{E - E_p}{E} \ln \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E} \right) + \frac{E_p}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}\sigma_{0y}}{E} \right),$$

$$N_{ep} = \frac{2}{a^2} \int_0^{\min(z_1, l)} yy' dz = \begin{cases} 1, & z_1 \geq l \\ \frac{r_{cl}^2}{a^2}, & z_1 < l \end{cases},$$

$$A_p = \frac{E_p}{3}, \quad N_p = \frac{2}{r_p^2} \int_{\min(z_1, l)}^l yy' dz = \begin{cases} 0, & z_1 \geq l \\ \frac{a^2 - r_{cl}^2}{a^2}, & z_1 < l \end{cases},$$

$$B_{ep} = -\frac{E}{3r_t^2}, \quad M_{ep} = \frac{2}{a^2} \int_0^{\min(z_1, l)} y^3 y' dz = \begin{cases} \frac{1}{2} a^2, & z_1 \geq l \\ \frac{r_{cl}^4}{2a^2}, & z_1 < l \end{cases},$$

$$B_p = -\frac{E_p}{3r_t^2}, \quad M_p = \frac{2}{a^2} \int_{\min(z_1, l)}^l y^3 y' dz = \begin{cases} 0, & z_1 \geq l \\ \frac{a^4 - r_{cl}^4}{2a^2}, & z_1 < l \end{cases},$$

$$A_p^* = \frac{2\sigma_{0y}(E - E_p)}{\sqrt{3}E},$$

$$N_p^* = \frac{2}{r_p^2} \int_{\min(z_1, l)}^l \ln \frac{r_t}{y} yy' dz = \begin{cases} 0, & z_1 \geq l \\ \ln \frac{r_t}{a} - \frac{r_{cl}^2}{a^2} \ln \frac{r_t}{r_{cl}} + \frac{1}{2} - \frac{r_{cl}^2}{2a^2}, & z_1 < l \end{cases},$$

$$N_d = \frac{1}{a^2} \int_0^l (y')^3 y \left( 2 \ln \frac{r_t}{y} + \frac{y^2}{r_t^2} - 1 \right) dz.$$

其中,  $N_d$  可采用 Simpson 公式进行数值积分,  $z=0$  为被积函数的奇异点, 采取区间截去法可得到收敛解。