

文章编号: 1000-4750(2013)05-0008-05

结构动力微分方程的一种高精度摄动解

李秀梅¹, 吴 锋², 张克实¹

(1. 广西大学土木建筑工程学院, 南宁 530004; 2. 大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘 要: 将结构的位移及速度响应作为状态变量, 把结构动力方程转化为状态方程, 采用摄动方法求解状态方程, 推出一种级数形式的摄动解, 同时给出了该文算法的迭代格式和计算步骤。该算法无需对转换矩阵 H 求逆, 也无须作指数矩阵 e^H 运算, 仅做矩阵向量相乘及向量求和运算, 计算稳定而且效率高, 收敛速度快, 解的级项数及精度可由允许误差参数直接控制, 很容易达到任意精度要求, 该方法兼具线性加速法的高效率和精细积分法的高精度, 可应用于结构大型稀疏线性动力方程组的求解。最后通过典型算例进一步验证了该文算法的精度和效率。

关键词: 动力微分方程; 动力响应; 状态方程; 摄动法; 精细积分法

中图分类号: O175 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0770

A HIGH-PRECISION PERTURBATION SOLUTION FOR STRUCTURAL DYNAMIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

LI Xiu-mei¹, WU Feng², ZHANG Ke-shi¹

(1. School of Civil and Architecture Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: The structural dynamics equations were converted to the state equations in which the displacement and velocity response were taken as the state variables. In order to solve the state equations, the perturbation method was used, and a new series form of analytical solutions was presented. At the same time, the corresponding iterated computation formats and steps for the dynamics equations were established. The algorithm needs only repetitious matrix-vector multiplication and vector summation without inversion of H matrix and calculation of exponential matrix e^H . Thusly, the computation stability and efficiency are very high. The items of the series solution and the accuracy of the algorithm can be directly controlled by the tolerance parameter ε , and theoretically, the algorithm can easily achieve arbitrary-order accuracy, and be suitable for parallel computing and compression storage. Generally, the algorithm combines the high-efficiency of the linear acceleration methods and the high-precision of precise integration methods. This method can be used for calculating the large sparse linear dynamic equations of engineering structures. At last, a model numerical example was given to demonstrate the validity and efficiency of the method.

Key words: dynamic differential equation, dynamic response, state equation, perturbation method, precise integration method

线性加速法如 Newmark 法、Wilson- θ 法等, 因其较高的计算效率在实际工程的动力微分方程求解中广为采用, 但这些方法精度相对较低, 对时

间步长 Δt 很敏感, 而且计算精度不容易控制。钟万勰院士基于状态方程提出的精细积分法^[1], 因其巧妙的算法设计而使计算达到前所未有的精度, 为结

收稿日期: 2011-11-15; 修改日期: 2012-07-29

基金项目: 广西理工科学实验中心重点项目(LGZX201101); 国家自然科学基金项目(51069001); 广西教育厅项目(201012MS009)

通讯作者: 张克实(1954—), 男, 桂林人, 教授, 博士, 从事塑性力学研究(E-mail: zhangks@gxu.edu.cn).

作者简介: 李秀梅(1968—), 女, 辽宁人, 教授, 博士, 主要从事高层建筑结构计算方法研究(E-mail: lixiumei_gx@126.com);

吴 锋(1985—), 男, 江苏人, 博士生, 从事计算力学研究(E-mail: 90470588@qq.com).

构动力微分方程的求解开辟了一条崭新的途径,从此结构动力微分方程的解法出现飞跃性发展。然而精细积分法需要指数矩阵 e^H 的计算,相应的计算量很大,使得精细积分法难以应用于实际大型工程计算。张洪武^[2]和谭述君^[3]研究过矩阵指数计算中的参数选择问题,孙雁^[4]研究过奇异系统矩阵的精细积分问题,谭述君^[5]研究了杜哈梅项的精细积分问题,创造性地把计算矩阵指数的加法定理和增量存储用于杜哈梅积分项的计算,完全解决了矩阵求逆问题,李金桥等^[6]研究给出了非线性动力方程的级数解,王海波等^[7]提出精细积分多步法,沈小璞等^[8]提出了状态空间迭代法,作者曾采用 Lyapunov 人工小参数法导出一种新的级数形式的解析解^[9],既避免了状态矩阵求逆,也避免了指数矩阵运算,使计算效率得以提高。针对非齐次项的积分处理方法也有不少研究,把高斯积分法引入非齐次项积分^[10],可以使精细积分到达任意求解精度,但计算的效率不高,仍然难以在工程中应用。王元丰等^[11]提出了把精细积分法与振型叠加法、Newmark- β 法相耦合的方法,虽然牺牲了精细积分法的一些精度,却在一定程度上提高了算法的适应性。只有兼具线性加速度法的效率和精细积分法的精度才是动力微分方程的理想解,才能在工程中推广应用,本文采用摄动方法求解状态方程^[12-13],导出一个新的摄动解,虽然也是级数形式,但与文献[9,14]的级数解完全不同,计算格式更加简单,精度可以直接控制。该算法无需指数矩阵 e^H 运算,仅采用矩阵向量相乘和向量求和运算,不但具有线性加速度法的计算效率而且理论上可以达到任意高的精度要求,在理论研究及工程应用方面都有参考价值。

1 基本公式推导

结构动力微分方程:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \quad (1)$$

其中: M 、 C 、 K 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵及刚度矩阵; $F(t)$ 为结构的动力荷载向量。如果把结构的位移 X 和速度 \dot{X} 响应作为状态变量,则式(1)可转化为如下的状态方程:

$$\dot{U} = HU + f(t) \quad (2)$$

其中:

$$U = \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}F(t) \end{Bmatrix}, \quad U_0 = \begin{Bmatrix} X_0 \\ \dot{X}_0 \end{Bmatrix}$$

因为在实际计算动力时程响应问题时,时间步长 Δt 总是小量,因此从摄动理论的观点来看, Δt 可以作为一种摄动量。假设已经知道 t_0 时刻结构的响应 $U(t_0)$, 现在要计算 t 时刻的响应 $U(t)$, $\Delta t = t - t_0$ 是个小量,则 $U(t)$ 可由 $U(t_0)$ 摄动得到^[12], 假设:

$$U(t) = C_0 + C_1\Delta t + C_2\Delta t^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\Delta t^i \quad (3)$$

式中, C_i 为待定常向量,对式(3)按时间微分, $\dot{U}(t)$ 可以表示为:

$$\dot{U}(t) = C_1 + 2C_2\Delta t + 3C_3\Delta t^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)C_{i+1}\Delta t^i \quad (4)$$

把式(2)中的荷载项 $f(t)$ 按泰勒公式展开有:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \Delta t^i \quad (5)$$

把式(3)~式(5)代入式(2)中得:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)C_{i+1}\Delta t^i = H \sum_{i=0}^{\infty} C_i\Delta t^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \Delta t^i \quad (6)$$

对式(6),取 Δt 的同次幂系数相等,于是可得:

$$(i+1)C_{i+1} = HC_i + \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \quad (7)$$

整理式(7)可得:

$$C_i = \frac{HC_{i-1}}{i} + \frac{f^{(i-1)}(t_0)}{i!}, \quad i=1,2,\dots \quad (8)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $U(t) \rightarrow U(t_0)$, 由式(3)可得 $C_0 = U(t_0)$ 。式(8)是一个强大的递推关系,可以计算出一系列系数向量 C_i , 整个计算只涉及到一个矩阵向量乘积及向量求和。把系数向量 C_i 代入(3)式即可以求得状态变量 $U(t)$ 。

2 算法设计

式(3)就是由摄动方法导出的级数形式的摄动解。用式(8)即可算出式(3)中所需的系数向量 C_i , 然后向量求和即可得到离散时刻的状态变量。式(3)是一个关于 Δt 的多项式,可选定一个截断项数 N 用秦九韶算法计算,具体做法可参照文献[14]。考虑到 Δt^i 的计算量不大,可直接采用式(3)计算,这样还可以自动控制误差,下面讲述该方法的执行过程。

首先把式(3)改写为:

$$U(t) = b_0 + b_1 + b_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad (9)$$

式中, $b_i = C_i \Delta t^i$, 如果令 $H_1 = H \Delta t$, 则当 $i=1, 2, \dots$ 时:

$$b_i = C_i \Delta t^i = \left(\frac{1}{i} H C_{i-1} + \frac{f^{(i-1)}(t_0)}{i!} \right) \Delta t^i = \frac{1}{i} H_1 b_{i-1} + \frac{\Delta t^i}{i!} f^{(i-1)}(t_0) \quad (10)$$

其中, $b_0 = C_0 = U(t_0)$ 。

根据 b_0 和式(10)的递推关系, 可以计算出所有的向量 b_i , 而且可以事先直接设定一个允许误差 ε , 假定计算到 b_N 时, b_N 的范数 $\|b_N\| < \varepsilon$ 时, N 项之后的 b_i 可以舍去, N 的取值可以不必固定, 不同时间步长可以有不同的 N , 根据事先设定的误差 ε 控制。式(10)中第二项是荷载的导数项, 一般来说不必取到 N 项这么多, 即当 i 等于某个正整数(比如说 R)时, $\Delta t^R f^{(R-1)}(t_0)/R!$ 已经很小或为零了, 之后计算 b_i 时可以省略第二项计算。 R 的取值取决于动力载荷的特性, 如荷载采用线性插值, 则只有两项 $f^{(0)}$ 、 $f^{(1)}$ 可能非零, $i \geq 3$ 时 b_i 中第二项 $\Delta t^i f^{(i-1)}(t_0)/i!$ 都为零。对于一般的动力载荷, 当 R 取至 5 时本文算法的计算精度就已经很好, 当 R 取至 7 时误差几乎可以忽略不计了。根据上述分析, 本文算法的计算步骤如下:

1) 导入动力荷载数据, 将计算时间离散为 n 等分, 确定时间步长 Δt 、荷载收敛项数 R 及允许误差 ε 。

2) 根据初始时刻 ($t=0$) 的位移 X_0 和速度 \dot{X}_0 , 确定状态变量的初始值 U_0 。

3) 对时间循环, 假设已经算出 $U(t_j)$, 在 t_j 到 $t_j + \Delta t$ 的时间段内计算 $U(t_j + \Delta t)$, $j=1, 2, \dots, n$:

① 令 $b_0 = U(t_j)$ 。

② 从 $i=1, 2, \dots$ 开始对 i 循环:

a) 按式(10)计算 b_i 。

b) 确定 $\|b_i\| < \varepsilon$ 是否满足, 如果不满足, 回到 (a), 进入下一个 i 循环, 计算下一个级数项 b_{i+1} 。如果满足, 进入下一步 c)。

c) 假设当 i 循环到 N 时算得的 b_N 满足 $\|b_N\| < \varepsilon$, 把上述算得的 $b_0 \dots b_N$ 相加, 相加的结果就是 $t_j + \Delta t$ 时刻的状态变量值 $U(t_j + \Delta t)$ 。

在上述的计算步骤中, 每个时间步长内有 N 次矩阵向量相乘及 N 次向量求和计算, 计算稳定, 而

且有很高的效率。误差主要来自式(9)级数项 N 的取值, 可根据事先设定的允许误差 ε , 在每个时间步长的计算过程中, 通过 $\|b_N\| < \varepsilon$ 直接控制 N 的取值。本文提出的高精度摄动解, 概念明了, 格式简单, 也容易编制程序。对于式(10)中 b_i 表达式中第二项的荷载项的取值当然也可以通过参数 R 的精度来控制, $R \leq N$ 。整个计算过程中只需做矩阵向量相乘及向量求和运算, 在建筑结构中因转换矩阵是稀疏对称矩阵, 本文方法特别适合于压缩存储和并行计算, 可应用于大型工程结构的动力计算。

3 算例分析

本文给出的摄动解精度可以根据误差系数 ε 直接控制, 理论上能够达到任意的求解精度, 计算中可以根据需要设定每个时间步长内的允许误差 ε , 下面通过算例验证本文方法的精度和效率。为了比较采用文献[10]相同的算例, 计算图 1 所示 20 层平面钢框架在 EI Centro 地震波作用下的时程响应。采用楼板刚性假定及层剪切模型, 第 1 层质量 563t, 第 2 层~第 19 层均为 552t, 顶层质量为 584t。柱采用 ASTM A500 箱型截面, 弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。阻尼矩阵由瑞雷阻尼模型计算 $C = 0.0592M + 0.0024K$ 。

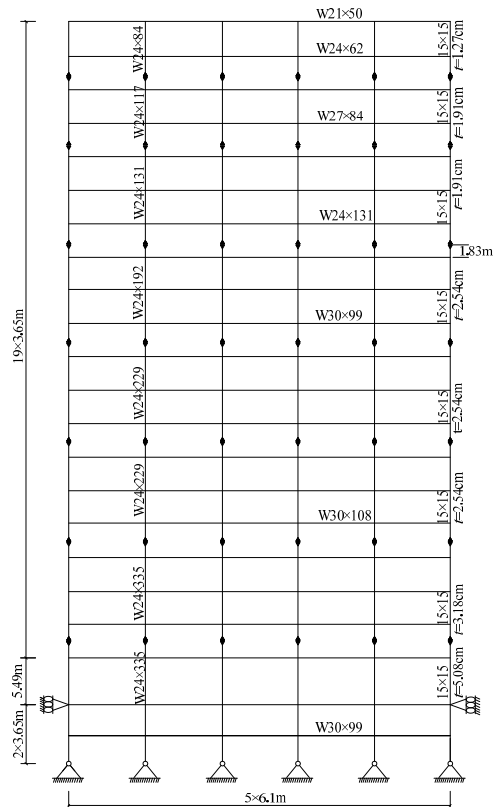


图 1 20 层平面钢框架
Fig.1 20-story plane steel frame

本文摄动解的计算结果与文献[10]高斯精细积分法、文献[1]精细积分法、文献[14]李雅普诺夫法及 Newmark 法的计算结果列于表 1 中。本文方法采用了不同的允许误差 ε ，其他方法的允许误差不能直接控制。Newmark 法对时间步长 Δt 敏感，计算中采用了多种时间步长，其他精细方法的时间步

长可以增大，考虑地震波采样时间间隔，取 $\Delta t = 0.02s$ 。地震波按线性插值，荷载的收敛项数只需取到 $R=2$ 。持荷时间为 30s，所有计算均采用 MATLAB 语言编程，在同一台联想开天 4600 (RAM512M)微机上完成计算。框架顶层的侧移及速度响应时程曲线如图 2、图 3 所示。

表 1 El Centro 波作用下框架顶层的最大位移
Table 1 Maximum displacement of the frame top floor

计算方法	时间步长/s	允许误差 ε (%)	顶层最大侧移/m	出现时间/s	相对误差(%)	计算时间/s
本文方法	0.02	1×10^{-1}	0.304073337969335	3.8	1.40×10^{-5}	3.56
	0.02	1×10^{-3}	0.304073315923586	3.8	6.70×10^{-6}	3.57
	0.02	1×10^{-5}	0.304073296279379	3.8	1.90×10^{-7}	3.59
	0.02	1×10^{-7}	0.304073295698635	3.8	-3.30×10^{-13}	3.60
	0.02	1×10^{-9}	0.304073295698636	3.8	0.00	3.61
	0.02	1×10^{-11}	0.304073295698636	3.8	0.00	3.65
李雅普诺夫法	0.02	—	0.304073295698636	3.8	0.00	5.16
高斯精细积分法	0.02	—	0.304073295702662	3.8	1.30×10^{-9}	38.89
精细积分法	0.02	—	0.304073295698670	3.8	1.10×10^{-11}	9.27
Newmark 法	0.02	—	0.303607415879653	3.8	-1.50×10^{-1}	3.12
	0.01	—	0.304044459217772	3.8	-9.50×10^{-3}	6.39
	0.005	—	0.304045919750832	3.8	-9.00×10^{-3}	12.82
	0.001	—	0.304071779625765	3.8	-5.00×10^{-4}	70.02

以上几种方法计算的最大位移出现时间都是 3.8s。从表 1 和图 2、图 3 可以看出，本文方法的计算精度和计算效率都很高，随着允许误差 ε 的减小，本文方法的计算结果迅速收敛，当 $\varepsilon = 10^{-9}$ 时，本文方法的计算结果收敛到 15 位有效数字，计算效率高于文献[14]的李雅普若夫法及其他方法。而当 $\varepsilon = 10^{-7}$ 时本文方法的计算结果已高于文献[1]精细积分法和文献[10]高斯精细积分法的精度，但计算时间相对减少了 90.7%、60.9%。当 $\varepsilon = 10^{-1}$ 时，本文方法的计算精度及效率都远好于 Newmark 法各种时间步长的计算结果。而且随着计算精度由 $\varepsilon = 10^{-1}$ 提高到 10^{-11} 的，计算时间只是略有增加，因而本文方法能达到精细积分法的计算精度和线性加速法的计算效率。文献[1]的精细积分法要对转换矩阵 H 求逆，求逆之后矩阵变得稠密，文献[10]

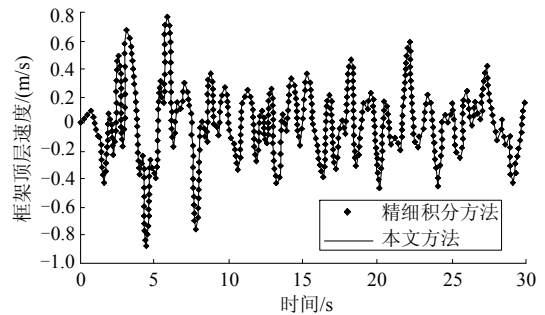


图 3 框架顶层速度响应时程曲线
Fig.3 Time history curves of top speed

的高斯精细积分法每个时间段都要做几次指数矩阵 e^H 运算，计算效率降低，因而计算的时间很长。Newmark 法要采用缩减时间步长来提高计算精度，但要以更多的计算时间为代价的，也就牺牲了 Newmark 法的高效性。

本文摄动解是级数形式的，级数项的取值决定于收敛误差参数 ε ，由式 $\|b_N\| < \varepsilon$ 确定 N ，根据式(10)， $b_i = C_i \Delta t^i$ 随着时间步长按级数项指数规律变化，时间步长 Δt 取值越小， N 的值也会越小，收敛的速度会大大提高，因而减小时间步长也不会明显降低计算效率，而且该算法属于稳定算法，时间步长无需取得很小。计算精度主要由误差参数 ε 控制，从该例题可以看出，随着误差精度 ε 的提高，计算时间提高并不明显，对于该算法的误差在文献[15]有详细的分析论证。综合考虑算法的计算精

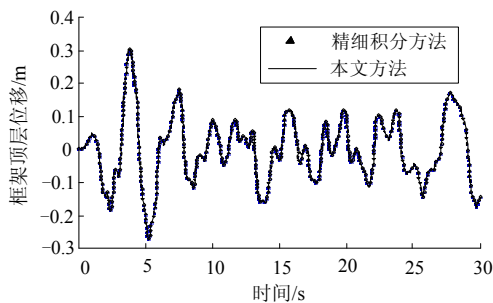


图 2 框架顶层位移响应时程曲线
Fig.2 Time history curves of top displacement

度和效率, 本文摄动解具有很大的优越性。而且随着求解规模的增加, 本文算法的优势就愈加明显。

4 结论

本文把结构的位移及速度响应作为状态变量, 把时间步长 Δt 作为摄动量, 采用摄动方法求解状态方程, 推导出一个新的级数形式的摄动解, 级数项数取值决定于根据计算精度需要设定的允许误差值 ε , 并设计了相应的计算格式和步骤。该算法的计算精度由允许误差 ε 直接控制, 理论上可以达到任意的精度要求。本文算法在整个离散时间内无需对转换矩阵 H 求逆, 也不必作指数矩阵 e^H 运算, 每个时间步长内仅需做若干次矩阵向量相乘和向量求和运算, 保证了计算的稳定性和高效率, 适合于并行计算。本文提出的摄动解不但具有精细积分法的计算精度, 而且具有线性加速度法的计算效率, 适于大型线性时不变系统动力微分方程组的求解, 在结构工程领域有很好的应用前景。但该算法目前仅应用于建筑结构的线性动力微分方程求解, 对于非线性动力微分方程及奇异性等问题, 该方法的适用性还需进一步研究。

参考文献:

- [1] 钟万勰. 结构动力方程的精细积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131—136.
Zhong Wanxie. Precise integration method for structural dynamics equations [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131—136. (in Chinese)
- [2] Zhang H W, Chen B S, Gu Y X. An adaptive algorithm of precise integration for transient analysis. ACTA Mechannica Sinica, 2001, 14(3): 215—224.
- [3] 谭述君, 吴志刚, 钟万勰. 矩阵指数精细积分方法中参数的自适应选择[J]. 力学学报, 2009, 41(6): 961—966.
Tan Shujun, Wu Zhigang, Zhong Wanxie. Adaptive selection of parameters for precise computation of matrix exponential based on PADE approximation [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2009, 41(6): 961—966. (in Chinese)
- [4] 孙雁. 奇异系统矩阵的精细积分[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(8): 1217—1225.
Sun Yan. Precise integration method for singular matrix [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2008, 42(8): 1217—1225. (in Chinese)
- [5] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. 力学学报, 2007, 39(3): 374—381.
Tan Shujun, Zhong Wanxie. Precise integration method for duhamel terms arising form non-homogeneous dynamic systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(3): 374—381. (in Chinese)
- [6] 李金桥, 于建华. 非线性动力方程避免状态矩阵求逆的级数解[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2004, 36(4): 26—30.
Li Jinqiao, Yu Jianhua. Series solution of nonlinear dynamics equations avoiding calculating the inversion of the state matrix [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2004, 36(4): 26—30. (in Chinese)
- [7] 王海波, 余志武, 陈伯望. 非线性动力分析避免状态矩阵求逆的精细积分多步法[J]. 振动与冲击, 2008, 27(4): 105—107, 116,173.
Wang Haibo, Yu Zhiwu, Chen Bowang. Precise integration multi-step method for nonlinear dynamic equations to avoid calculating inverse of state matrix [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(4): 105—107, 116, 173. (in Chinese)
- [8] 沈小璞, 陈荣毅, 沈鹏程. 基于状态空间理论的结构动力响应解法[J]. 工程力学, 1996(增刊): 492—496.
Sheng Xiaopu, Chen Rongyi, Sheng Pengcheng. State space iteration method for analysis of dynamic time history response of structures [J]. Engineering Mechanics, 1996(Suppl): 492—496. (in Chinese)
- [9] 李秀梅, 吴锋, 黄哲华. 结构动力方程一种新的级数形式的解析解[J]. 振动与冲击, 2010, 29(6): 219—222, 246.
Li Xiumei, Wu Feng, Huang Zhehua. New series form of analytical solution for the structural dynamic equations [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(6): 219—222, 246. (in Chinese)
- [10] 李秀梅, 秦荣, 王建军. 结构地震响应分析的高斯精细时程积分法[J]. 四川建筑科学研究, 2009, 35(2): 182—184.
Li Xiumei, Qin Rong, Wang Jianjun. Gauss precise time-integration method for structural dynamic responses [J]. Sichuan Building Science, 2009, 35(2): 182—184. (in Chinese)
- [11] 王元丰, 储德文. 精细时程积分法在地震响应分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2004, 37(1): 20—23.
Wang Yuanfeng, Chu Dewen. Application of precise time integration method for structural earthquake response [J]. China Engineering Journal, 2004, 37(1): 20—23. (in Chinese)
- [12] 廖世俊. 超越摄动: 同伦分析方法基本思想及其应用[J]. 力学进展, 2008, 38(1): 1—34.
Liao Shijun. Beyond perturbation: The basic concepts of the homotopy analysis method its applications [J]. Advances in Mechanics, 2008, 38(1): 1—34. (in Chinese)
- [13] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 32—85.
Zhong Wanxie. Symplectic mathematical method for applied mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 32—85. (in Chinese)
- [14] 李秀梅, 吴锋, 苏金陵. 结构动力响应分析的李雅普诺夫法[J]. 工程力学, 2010, 27(11): 16—21.
Li Xiumei, Wu Feng, Su Jinling. Lyapunov method for the analysis of structural dynamic response [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(11): 16—21. (in Chinese)
- [15] 吴锋. 平面半刚性连接钢框架的动力分析方法研究[D]. 南宁: 广西大学, 2010.
Wu Feng. Studying the dynamic analytical method of plane steel frames with semi-rigid connections [D]. Nanning: Guangxi University, 2010. (in Chinese)