一类分数阶差分方程边值问题递增正解的存在性

葛 琦，侯成敏
(延边大学 理学院数学系，吉林 延吉 133002)

摘要：在度量空间中利用不动点定理，研究一类带有分数阶边界条件的分数阶差分方程递增正解的存在性. 借助 Green 函数的性质，分别建立了该方程存在唯一递增非负解的充分条件及存在唯一严格递增正解的充分条件.

关键词：分数阶边界条件；Green 函数；严格递增
中图分类号：O175.7 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2013)01-0047-06

Existence of Positive and Nondecreasing Solution of Boundary Value Problems for a Class of Fractional Difference Equations

GE Qi，HOU Cheng-min
(*Department of Mathematics*，*College of Science*，*Yanbian University*，*Yanji* 133002，*Jilin Province*，*China*)

Abstract：Using fixed point theorem in metric space，the authors studied the existence of positive and nondecreasing solution for a class of the fractional difference equations with fractional boundary conditions. With the aid of some characteristics of the Green's function，we obtained sufficient conditions for the existence of a unique nonnegative and nondecreasing solution to this class of equations. And we discussed the existence and uniqueness of a positive and strictly increasing solution to this equations.

Key words：fractional boundary conditions；Green's function；strictly increasing

0 引 言

分数阶微分方程广泛应用于计算生物、药物科学、经济学、物理学和工程学等领域，目前已有许多研究结果. 如：Atici 等[1-2]在发展了关于离散型分数阶微积分初值问题的基础上，还研究了有限分数阶差分方程的两点边值问题；Goodrich[3]研究了带有非局部条件的离散型分数阶边值问题解的存在性和唯一性；文献[4-8]研究了分数阶差分方程的边值问题(简称 FBVP). 但目前大多数研究成果主要利用 Green 函数的性质，在 Banach 空间中运用不动点定理对 FBVP 进行讨论，而在度量空间中利用不动点定理研究 FBVP 的报道较少. 本文考虑如下 FBVP：

$$-\Delta^{\nu} u(t)=f(t+\nu-1,u(t+\nu-1)),\quad t\in[0,b+2]_{\mathbb{N}_0},\tag{1}$$

$$u(\nu-3)=[\Delta^{\alpha} u(t)]|_{t=\nu-\alpha-2}=[\Delta^{\beta} u(t)]|_{t=\nu+b+2-\beta}=0,\tag{2}$$

其中：$2<\nu\leqslant 3$；$1<\beta<2$；$\nu-\beta>1$；$0<\alpha<1$；$f(t+v-1,\cdot)$：$[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数；$b>3(b\in\mathbb{N})$. 本文先分析 Green 函数的性质，然后在度量空间中利用不动点定理，分别建立该方

收稿日期：2012-06-07.
作者简介：葛 琦(1975—)，女，汉族，硕士，副教授，从事微分方程及其应用的研究，E-mail：geqi9688@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：11161049)和延边大学科研项目(批准号：延大科合字[2010]第 004 号).

程存在唯一递增非负解的充分条件及存在唯一严格递增正解的充分条件，并结合实例说明充分条件的合理性.

本文记

$$\mathbb{N}_a := \{a, a+1, a+2, \cdots\},$$
$$[a,b]_{\mathbb{N}_a} := \{a, a+1, a+2, \cdots, b\} \ (b-a \in \mathbb{N}_1).$$

1 预备知识

定义 1[3] 定义 $t^{\underline{\nu}} := \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)} (t,\nu \in \mathbb{R})$. 规定：当 $t+1-\nu$ 是 Γ 函数的极点，而 $t+1$ 不是 Γ 函数的极点时，有 $t^{\underline{\nu}}=0$.

定义 2[3] 对于 $\nu>0$，定义函数 f 的 ν 阶分数和如下：

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \Delta^{-\nu} f(t;a) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-s-1)^{\underline{\nu-1}} f(s), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}.$$

对于 $N\in\mathbb{N}$，$0\leqslant N-1<\nu\leqslant N$，定义函数 f 的 ν 阶分数差分如下：

$$\Delta^{\nu} f(t) = \Delta^{N} \Delta^{\nu-N} f(t), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}.$$

引理 1[3] 对于 $\forall\, t,\nu\in\mathbb{R}$，如果 $t^{\underline{\nu}}$ 和 $t^{\underline{\nu-1}}$ 都有定义，则 $\Delta\, t^{\underline{\nu}} = \nu\, t^{\underline{\nu-1}}$.

引理 2[3] 设 $N\in\mathbb{N}$，$0\leqslant N-1<\nu\leqslant \mathbb{N}$. 则

$$\Delta^{-\nu}\Delta^{\nu} u(t) = u(t) + C_1 t^{\underline{\nu-1}} + C_2 t^{\underline{\nu-2}} + \cdots + C_N t^{\underline{\nu-N}}, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

引理 3[4] 对于 $\alpha>0$ 和 $\forall\,\nu\in\mathbb{R}$，有 $\Delta^{\alpha} t^{\underline{\nu}} = \dfrac{\Gamma(\nu+1) t^{\underline{\nu-\alpha}}}{\Gamma(\nu+1-\alpha)}$.

令

$$S = \{\beta\colon [0,\infty) \to [0,1) \mid \beta(t_n) \to 1 (t_n \to 0)\}. \tag{3}$$

引理 4[9] 设$(X,\leqslant)$是一个偏序集，且 X 中存在一个度量 d，使得(X,d)是一个完备的度量空间. 设 $T\colon X\to X$ 是递增的映射，且存在一个 $x_0\in X$，使得 $x_0\leqslant Tx_0$. 假设存在 $\beta\in S$，使得对于 $\forall\, x,y\in X$，且 $x\leqslant y$，有

$$d(Tx,Ty) \leqslant \beta(d(x,y)) d(x,y). \tag{4}$$

如果下列二条件之一成立，则 T 有唯一的不动点：

(i) $T\colon X\to X$ 是连续的映射； (5)

(ii) 如果$\{x_n\}$是 X 中递增序列，且在 X 中有 $x_n\to x(n\to\infty)$，则对于 $\forall\, n\in\mathbb{N}$，有

$$x_n \leqslant x, \tag{6}$$

且对于 $\forall\, x,y\in X$，存在 $z\in X$，使得 z 和 x 与 z 和 y 有序关系.

2 Green 函数及其性质

下面构建带有边值条件(2)的 FBVP：

$$-\Delta^{\nu} u(t) = h(t+\nu-1), \quad 2<\nu\leqslant 3, \quad t \in [0,b+2]_{\mathbb{N}_0} \tag{7}$$

的 Green 函数 $G(t,s)$，其中 $h\colon [\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

定理 1 设 $2<\nu\leqslant 3$，则 FBVP(7)-(2)的唯一解是

$$u(t) = \sum_{s=0}^{b+2} G(t,s) h(s+\nu-1), \qquad t \in [\nu-1, b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}, \tag{8}$$

这里

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \begin{cases} \dfrac{t^{\underline{\nu-1}} (\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}} - (t-s-1)^{\underline{\nu-1}}, & 0 \leqslant s < t-\nu+1 \leqslant b+2, \\ \dfrac{t^{\underline{\nu-1}} (\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}}, & 0 \leqslant t-\nu+1 \leqslant s \leqslant b+2. \end{cases} \tag{9}$$

证明：由引理 2，有

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{t-\nu}(t-s-1)^{\underline{\nu-1}}h(s+\nu-1)+$$
$$C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}+C_3t^{\underline{\nu-3}}\quad(C_i\in\mathbb{R},\ 1\leqslant i\leqslant 3).\tag{10}$$

将边值条件 $u(\nu-3)=0$ 代入式(10)得 $C_3=0$. 由于

$$\Delta^\alpha u(t)=C_1\Delta^\alpha t^{\underline{\nu-1}}+C_2\Delta^\alpha t^{\underline{\nu-2}}-\Delta^{-(\nu-\alpha)}h(t+\nu-1)=$$
$$C_1\frac{\Gamma(\nu)t^{\underline{\nu-\alpha-1}}}{\Gamma(\nu-\alpha)}+C_2\frac{\Gamma(\nu-1)t^{\underline{\nu-\alpha-2}}}{\Gamma(\nu-\alpha-1)}-\frac{1}{\Gamma(\nu-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\nu+\alpha}(t-s-1)^{\underline{\nu-\alpha-1}}h(s+\nu-1),$$

则由边值条件 $[\Delta^\alpha u(t)]|_{t=\nu-\alpha-2}=0$，得 $C_2=0$. 再由边值条件

$$[\Delta^\beta u(t)]|_{t=\nu+b+2-\beta}=\left[C_1\frac{\Gamma(\nu)t^{\underline{\nu-\beta-1}}}{\Gamma(\nu-\beta)}-\frac{1}{\Gamma(\nu-\beta)}\sum_{s=0}^{t-\nu+\beta}(t-s-1)^{\underline{\nu-\beta-1}}h(s+\nu-1)\right]\Bigg|_{t=\nu+b+2-\beta}=0,$$

得

$$C_1=\frac{1}{\Gamma(\nu)(\nu+b+2-\beta)^{\underline{\nu-\beta-1}}}\sum_{s=0}^{b+2}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}h(s+\nu-1).$$

因此

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{t-\nu}(t-s-1)^{\underline{\nu-1}}h(s+\nu-1)+\frac{t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)(\nu+b+2-\beta)^{\underline{\nu-\beta-1}}}\times$$
$$\sum_{s=0}^{b+2}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}h(s+\nu-1).\tag{11}$$

由式(11)知式(8)成立.

定理 2　对于 $(t,s)\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\times[0,b+2]_{\mathbb{N}_0}$，Green 函数 $G(t,s)>0$，且 $G(t,s)$ 关于第一个变量 t 严格递增.

证明：当 $0\leqslant t-\nu+1\leqslant s\leqslant b+2$ 时，显然有 $G(t,s)>0$. 由

$$\Delta G_t(t,s)=\frac{(\nu-1)t^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{\Gamma(\nu)(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}}>0$$

可知 $G(t,s)$ 关于 t 递增，且 $G(t,s)<G(s+\nu-1,s)$. 当 $0\leqslant s<t-\nu+1\leqslant b+2$ 时，

$$\Delta_tG(t,s)=\frac{(\nu-1)t^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{\Gamma(\nu)(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}}-\frac{(\nu-1)(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu)}=$$
$$\frac{(\nu-1)(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu)}\left[\frac{t^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}}-1\right].$$

令

$$F(t,s,\beta)=\frac{t^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta-s+1)^{\underline{\nu-\beta-1}}}{(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-\beta+2)^{\underline{\nu-\beta-1}}}=\frac{t^{\underline{\nu-2}}\Gamma(b+4)}{(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}\Gamma(b-s+3)}(b+\nu-\beta-s+1)^{\underline{-s-1}},$$

由于 $\Delta_\beta F(t,s,\beta)>0$，所以 $F(t,s,\beta)$ 关于 $\beta(1<\beta<2)$ 是递增的，因此，有

$$F(t,s,\beta)>F(t,s,1)=\frac{t^{\underline{\nu-2}}(\nu+b-s)^{\underline{\nu-2}}}{(t-s-1)^{\underline{\nu-2}}(\nu+b+1)^{\underline{\nu-2}}}=$$
$$\frac{t(t-1)\cdots(t-s)(b+3)(b+2)\cdots(b-s+3)}{(t-\nu+2)(t-\nu+1)\cdots(t-\nu+2-s)(\nu+b+1)(\nu+b)\cdots(\nu+b+1-s)}.$$

由 $\dfrac{(t-i)(b+3-i)}{(t-\nu+2-i)(\nu+b+1-i)}\geqslant 1\ (0\leqslant i\leqslant s)$ 可知，$F(t,s,\beta)>F(t,s,1)\geqslant 1$，从而 $\Delta_tG(t,s)>0$，即 $G(t,s)$ 关于 t 递增，进而有

$$G(t,s)>G(s+\nu-1,s)=\frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma(b+\nu-\beta-s+2)\Gamma(b+4)}{\Gamma(\nu)\Gamma(s+1)\Gamma(b+3-s)\Gamma(\nu+b-\beta+3)}>0.$$

综上所述，对于 $(t,s)\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\times[0,b+2]_{\mathbb{N}_0}$，有 $G(t,s)>0$，且 $G(t,s)$ 关于第一个变量 t 严格递增.

注 1　由定理 2 知，如果定理 1 中 $h(t)\geqslant 0$，$t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，则有解 $u(t)\geqslant 0$，$t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$.

由于 $G(t,s)$ 关于第一个变量 t 严格递增，因此记

$$L=\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)=\sum_{s=0}^{b+2}G(b+\nu+1,s). \tag{12}$$

3 主要结果

由定理1知，求FBVP(1)-(2)的解，等价于在条件(2)下求方程

$$u(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,u(s+\nu-1)),\qquad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}} \tag{13}$$

的解. 为此先定义度量空间 B 如下：

$$B=\{x:\ [\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\to\mathbb{R}\}, \tag{14}$$

其中距离为

$$d(x,y)=\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\{|x(t)-y(t)|\},\qquad x,y\in B. \tag{15}$$

在 B 中定义偏序 $\leqslant$：

$$x\leqslant y\Leftrightarrow x(t)\leqslant y(t),\quad x,y\in B,\quad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}. \tag{16}$$

显然 $(B,\leqslant)$ 满足式(6)，如果对于 $x,y\in B$，取函数 $z=\max\{x,y\}\in B$，则 $(B,\leqslant)$ 满足 z 和 x 与 z 和 y 有序关系.

为方便，用 A 表示一类函数族：$\varphi\in A$，φ：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，且满足：

1) φ 是递增的函数；

2) 对于 $\forall x>0$，$\varphi(x)<x$；

3) $\varphi(x)/x\in S$，其中 S 定义如式(3).

满足上述条件的函数 φ 存在，如：$\varphi(x)=x/(1+x)$；$\varphi(x)=\ln(1+x)$.

定理3 如果下列条件成立，则FBVP(1)-(2)存在唯一递增的非负解：

(H_1) $f(t,\cdot)$：$[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非负连续函数；

(H_2) 对于 $\forall t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，$f(t,u)$ 关于第二个变量 u 递增；

(H_3) 存在 $0<\lambda\leqslant 1/L$ 和 $\varphi\in A$，使得对于 $x,y\in[0,\infty)$，且 $x\leqslant y$ 和 $t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，有 $f(t,y)-f(t,x)\leqslant\lambda\varphi(y-x)$.

证明：首先构造 B 上的锥：

$$\Pi=\{y\in B\,|\,y(t)\geqslant 0,t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}\}.$$

易知 Π 为 B 上的闭集，并且 Π 按式(15)中的距离成为完备的度量空间，显然按式(16)中的偏序 $\leqslant$，Π 满足引理4中的条件(ii). 对于 $u\in\Pi$，定义算子 T：

$$(Tu)(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,u(s+\nu-1)),\qquad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}},$$

其中 $G(t,s)$ 定义如式(9). 由定理2和条件(H_1)知 T 是 Π 到 Π 上的算子.

下面证明引理4的条件成立. 首先算子 T 是递增的，事实上，由条件(H_2)知，对于 $u_2\leqslant u_1$，有

$$(Tu_2)(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,u_2(s+\nu-1))\leqslant\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,u_1(s+\nu-1))=(Tu_1)(t).$$

另一方面，对于 $u_2\leqslant u_1$ 且 $u_1\neq u_2$，由条件(H_3)有

$$\begin{aligned}d(Tu_1,Tu_2)&=\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\{|(Tu_1)(t)-(Tu_2)(t)|\}=\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\{(Tu_1)(t)-(Tu_2)(t)\}=\\&\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)[f(s+\nu-1,u_1(s+\nu-1))-f(s+\nu-1,u_2(s+\nu-1))]\leqslant\\&\max_{t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}}\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)\lambda\varphi(u_1(s+\nu-1))-u_2(s+\nu-1)).\end{aligned}$$

由于 φ 是递增函数，所以由式(12)和条件(H_3)得

$$d(Tu_1,Tu_2)\leqslant\lambda\varphi(d(u_1,u_2))L\leqslant\varphi(d(u_1,u_2))=\frac{\varphi(d(u_1,u_2))}{d(u_1,u_2)}d(u_1,u_2).$$

因此，对于 $u_2\leqslant u_1$ 且 $u_1\neq u_2$，有

$$d(Tu_1,Tu_2)\leqslant\beta(d(u_1,u_2))d(u_1,u_2),\tag{17}$$

其中 $\beta(x)=\varphi(x)/x\in S$. 显然，当 $u_1=u_2$ 时式(17)也成立. 于是式(4)成立. 又由于 $f(t,u)$ 和 $G(t,s)$ 是非负函数，所以，当 $u=0$ 时，有

$$(T0)(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,0)\geqslant 0,\qquad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}.$$

从而引理 4 的条件成立. 由引理 4 知，FBVP(1)-(2)存在唯一的非负解 $u(t)$.

最后证明 FBVP(1)-(2)的唯一非负解 $u(t)$ 是递增的. 事实上，由于 $u(t)$ 是算子 T 的不动点，所以有

$$u(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,u(s+\nu-1)),\qquad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}.$$

由 $G(t,s)$ 的严格递增性和 $f(t,u)$ 的非负性知 $u(t)$ 是递增的.

下面给出 FBVP(1)-(2)存在唯一严格递增正解 $u(t)$ 的充分条件.

定理 4　在定理 3 的假设下，如果下列条件成立，则 FBVP(1)-(2)存在唯一严格递增的正解：

(H_4) 存在 $t_0\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，使得 $f(t_0,0)\neq 0$ 成立.

证明：由定理 3 知，FBVP(1)-(2)存在唯一递增的非负解，设为 $x(t)$，则

$$x(t)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t,s)f(s+\nu-1,x(s+\nu-1)),\qquad t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}.$$

先证明 $x(t)>0$，$t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$. 事实上，假设存在 $t^*\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，使得 $x(t^*)=0$，则

$$x(t^*)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t^*,s)f(s+\nu-1,x(s+\nu-1))=0.$$

由 $x(t)\geqslant 0$，$G(t,s)>0$ 及条件(H_1)，(H_2)得

$$0=x(t^*)=\sum_{s=0}^{b+2}G(t^*,s)f(s+\nu-1,x(s+\nu-1))\geqslant\sum_{s=0}^{b+2}G(t^*,s)f(s+\nu-1,0)\geqslant 0,$$

所以 $\sum_{s=0}^{b+2}G(t^*,s)f(s+\nu-1,0)=0$. 又由 $G(t^*,s)>0$ 及条件(H_1)知

$$G(t^*,s)f(s+\nu-1,0)=0,\qquad s\in[0,b+2]_{\mathbb{N}_0},$$

即 $f(s+\nu-1,0)=0$，$s\in[0,b+2]_{\mathbb{N}_0}$，这与条件($H_4$)矛盾，因此 $x(t)>0$，$t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$.

其次，证明 $x(t)$ 是严格递增的. 事实上，设 $t_1,t_2\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，且 $t_1<t_2$. 假设 $x(t_1)=x(t_2)$，则

$$\sum_{s=0}^{b+2}[G(t_1,s)-G(t_2,s)]f(s+\nu-1,x(s+\nu-1))=0.$$

由于 $G(t_1,s)-G(t_2,s)<0$，则 $f(s+\nu-1,x(s+\nu-1))=0$，$s\in[0,b+2]_{\mathbb{N}_0}$. 又因为

$$0=f(s+\nu-1,x(s+\nu-1))\geqslant f(s+\nu-1,0)\geqslant 0,$$

所以 $f(s+\nu-1,0)=0$，$s\in[0,b+2]_{\mathbb{N}_0}$. 这与条件($H_4$)矛盾，因此 $x(t_1)<x(t_2)$. 所以 $x(t)$ 是严格递增的.

注 2　条件(H_4)似乎是 FBVP(1)-(2)存在唯一严格递增正解的较强条件，但当 FBVP(1)-(2)存在唯一非负解时，这个条件非常恰当. 事实上，假设 FBVP(1)-(2)存在唯一非负解 $x(t)$，则对 $\forall t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，有 $f(t,0)=0$ 当且仅当 $x(t)=0$. 实际上，若 $\forall t\in[\nu-1,b+\nu+1]_{\mathbb{N}_{\nu-1}}$，有 $f(t,0)=0$，则由式(13)知 $x(t)=0$ 是 FBVP(1)-(2)的唯一非负解. 反之亦然.

4　应用实例

考虑如下 FBVP：

$$-\Delta^{5/2}u(t)=t+\nu-1+\frac{\lambda u(t+\nu-1)}{1+u(t+\nu-1)},\quad t\in[0,6]_{\mathbb{N}_0},\tag{18}$$

$$u\left(-\frac{1}{2}\right)=[\Delta^{1/3}u(t)]\big|_{t=1/6}=[\Delta^{4/3}u(t)]\big|_{t=43/6}=0,\tag{19}$$

其中：$\nu=\frac{5}{2}$；$\beta=\frac{4}{3}$；$\alpha=\frac{1}{3}$；$b=4$；$\lambda>0$；$f(\tau,u)=\tau+\frac{\lambda u}{1+u}$，$\tau\in\left[\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right]_{\mathbb{N}_{3/2}}$；$L=\sum\limits_{s=0}^{6}G\left(\frac{15}{2},s\right)\approx 52.8$. 显然 $f(\tau,u)=\tau+\frac{\lambda u}{1+u}$满足条件($H_1$)，且对于 $u\in[0,\infty)$有$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\lambda}{(1+u)^2}>0$，所以 $f(\tau,u)$满足条件(H_2). 而且对于 $u_2\leqslant u_1\left(\tau\in\left[\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right]_{\mathbb{N}_{3/2}}\right)$，有

$$f(\tau,u_1)-f(\tau,u_2)=\lambda\left(\frac{u_1}{1+u_1}-\frac{u_2}{1+u_2}\right)=\frac{\lambda(u_1-u_2)}{(1+u_1)(1+u_2)}\leqslant\frac{\lambda(u_1-u_2)}{1+u_1-u_2}=\lambda\varphi(u_1-u_2),$$

其中 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$. 显然 $\varphi(x)\in A$，并且对于 $\forall\tau\in\left[\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right]_{\mathbb{N}_{3/2}}$，有 $f(\tau,0)=\tau\neq 0$. 因此 FBVP(18)-(19)满足定理4的条件，所以当 $0<\lambda<\frac{1}{L}\approx 0.02$ 时，FBVP(18)-(19)存在唯一严格递增的正解.

参 考 文 献

[1] Atici F M, Eloe P W. Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus [J]. Proc Amer Math Soc, 2009, 137(3): 981-989.

[2] Atici F M, Eloe P W. Two-Point Boundary Value Problems for Finite Fractional Difference Equations [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2011, 17(4): 445-456.

[3] Goodrich C S. Existence and Uniqueness of Solutions to a Fractional Difference Equation with Nonlocal Conditions [J]. Comput & Math with Appl, 2011, 61(2): 191-202.

[4] Goodrich C S. On a Fractional Boundary Value Problem with Fractional Boundary Conditions [J]. Appl Math Lett, 2012, 25(8): 1101-1105.

[5] Goodrich C S. Solutions to a Discrete Right-Focal Fractional Boundary Value Problem [J]. Int J of Difference Equa, 2010, 5(2): 195-216.

[6] CHEN Fu-lai, LUO Xian-nan, ZHOU Yong. Existence Results for Nonlinear Fractional Difference Equation [J]. Advances in Difference Equations, 2011, 2011(1): 713201.

[7] Goodrich C S. On Discrete Sequential Fractional Boundary Value Problems [J]. J of Math Anal and Appl, 2012, 385(1): 111-124.

[8] Goodrich C S. Existence of a Positive Solution to a System of Discrete Fractional Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(9): 4740-4753.

[9] Cabrera I J, Harjani J, Sadarangani K B. Positive and Nondecreasing Solutions to a m-Point Boundary Value Problem for Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 2012: 826580.

(责任编辑：赵立芹)