具年龄和加权的半线性种群系统的最优边界控制

付 军[1],朱 宏[2]

(1. 吉林师范大学 数学学院,吉林 四平 136000;2. 吉林师范大学 计算机学院,吉林 四平 136000)

摘要:讨论一类具年龄和加权的半线性种群系统的最优控制问题. 运用 Mazur's 定理证明了最优边界控制的存在性,利用 Gâteax 微分和 Lions 的变分不等式理论得到了控制为最优的一阶必要条件,从而得到了由积分偏微分方程和变分不等式构成的最优性组,该最优性组能确定最优控制.

关键词:加权种群系统;最优边界控制;一阶必要条件;最优性组

中图分类号:O231.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1671-5489(2013)01-0027-07

Optimal Boundary Control for a Semi-linear Age-Dependent Population System Based on Weight

FU Jun[1], ZHU Hong[2]

(1. *College of Mathematics*, *Jilin Normal University*, *Siping* 136000, *Jilin Province*, *China*;
2. *College of Computer*, *Jilin Normal University*, *Siping* 136000, *Jilin Province*, *China*)

Abstract: The authors discussed the optimal boundary control for a semi-linear age dependent population system based on weight, proved the existence of optimal boundary control via Mazur's theorem. We obtained the necessary conditions for an optimal control, using Gâteax differentiation and Lions' theory of variational inequalities; and then obtained the optimality system consisting of integral paritial differential equation and variational inequalities. The optimality system can determine optimal control. These results may serve as theoretical reference for practical researches of the control problem in population systems. Its optimality systems determine the optimal control.

Key words: population-weighted system; optimal boundary control; first-order necessary condition; optimality system

0 引言及预备知识

目前,关于生物种群系统最优控制问题的研究已取得许多成果. 例如:文献[1]讨论了一类时变种群系统的最优边界控制问题;文献[2]应用惩罚移位法研究了其最优边界控制的计算;文献[3]讨论了具最终状态观测的时变种群系统的最优边界控制问题;文献[4]针对生育率和死亡率均依赖于个体年龄的情形,提出了具有加权规模的数学模型,并讨论了其最优收获问题;文献[5]研究了具有年龄分布和加权的非线性种群系统的最优分布控制问题. 本文进一步讨论如下具年龄和加权的半线性种群系统(P):

收稿日期:2012-05-25.

作者简介:付 军(1963—),女,汉族,博士,教授,从事分布参数系统控制的研究,E-mail:jlfj8080@126.com.

基金项目:吉林省自然科学基金(批准号:201115222)和吉林师范大学研究生创新项目(批准号:201114).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}+\mu(r,t;S)p=f(r,t), \quad 在\ Q=\Omega\times(0,T)\ 内, & (1)\\ p(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta(r,t;S)p(r,t)\mathrm{d}r+u(r,t), \quad 在(0,T)\ 内, & (2)\\ p(r,0)=p_0(r), \quad 在(0,A)\ 内, & (3)\\ S=S(t)=\displaystyle\int_0^A\omega(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r, \quad 在(0,T)\ 内 & (4)\end{cases}$$

的最优边界控制问题，其中：$p(r,t)$表示时刻 t、年龄为 r 的单种群密度；$p_0(r)$表示 $t=0$ 时种群的年龄密度初始分布；常数 T 表示生物种群的控制周期；f 表示时刻 t、年龄为 r 的种群系统的外界扰动函数；$S(t)$表示时刻 t 种群的加权总量；ω 为权函数；u 为控制变量；β 和 μ 分别为生物种群的出生率和死亡率，这里 μ 和 β 均与权函数 ω 有关，体现了加权总规模对种群动态过程的影响，因而，更具有实际意义；A 表示种群个体能活到的最高年龄，$r\in(0,A)$，$0<A<+\infty$，因而有

$$p(r,t)=0, \qquad r\geqslant A. \tag{5}$$

由于状态方程(1)-(4)的解依赖于 u，所以记为 $p(r,t;u)$或简记为 $p(u)$，人们希望通过控制函数 $u(t)$，使系统(P)的状态更接近种群密度的理想状态 $z_d(r,t)$. 为此，引入如下性能指标泛函：

$$J(u)=\int_0^T\int_0^A g(p(r,t)-z_d(r,t))\mathrm{d}r\mathrm{d}t+\int_0^T h(u(t))\mathrm{d}t. \tag{6}$$

假设如下条件成立：

(H_1) g,h: $R\to R^+$ 为凸函数，$g,h\in C(R^+)$且 g',h'有界；

(H_2) $\mu(r,t;y)\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,A]\times[0,T])$, $\int_0^A\mu(r,t;y)\mathrm{d}r=+\infty$；$\mu(r,t;y)$与$\beta(r,t;y)$定义在$Q\times R^+$上，关于$(r,t)$连续，关于 y 两次连续可微，而且

$$0\leqslant\mu(r,t;y),\beta(r,t;y),|\mu_y(r,t;y)|,|\beta_y(r,t;y)|,|\mu_{yy}(r,t;y)|,|\beta_{yy}(r,t;y)|\leqslant G;$$

(H_3) $f\in L^2(Q)$；$0\leqslant p_0(r)\leqslant\overline{p}_0<+\infty$, a. e. 于$[0,A]$内，$p_0(r)$在$[0,A]$上连续，且 $\int_0^A p_0^2(r)\mathrm{d}r=P_0\leqslant G_2$；$p_0(r)\in L^2(0,A)$，且 p_0 在$(0,A)$上连续，$p_0(r)$和 $p(0,t)$满足相容性条件

$$p_0(0)=p(0,0)=\int_0^A\beta(r,0;S(0))p(r,0)\mathrm{d}r;$$

(H_4) $\omega\in L^\infty(Q)$，$\forall(r,t)\in Q$，$0\leqslant\omega(r,t)\leqslant G_3$.

本文考虑实际控制问题：寻求满足等式 $J(u^*)=\inf\limits_{u\in U_{ad}}J(u)$的 $u^*\in U_{ad}$，使得

$$\begin{cases}U=L^2(0,T),\\ U_{ad}=U\ 的非空闭凸子集.\end{cases} \tag{7}$$

例如：

$$U_{ad}=\{u\in L^2(0,T);\ 0\leqslant\underline{u}\leqslant u(t)\leqslant\overline{u}<+\infty,\ \text{a. e 于}(0,T)\ 内\} \tag{8}$$

是 $L^2(0,T)$的非空闭凸子集. 不失一般性，假设 U_{ad} 由式(8)确定.

定义 1 函数 $p\in L^2(Q)$称为问题(1)-(4)的弱解，若 $\forall\varphi\in\Phi_0$，满足

$$\int_Q[-D\varphi+\mu(S)\varphi]p\mathrm{d}Q=\int_0^T\left[\int_0^A\beta(S)p(r,t)\mathrm{d}r+u(t)\right]\varphi(0,t)\mathrm{d}t+\int_0^A p_0(r)\varphi(r,0)\mathrm{d}r+\int_Q f\varphi\mathrm{d}Q, \quad \forall\varphi\in\Phi_0, \tag{9}$$

其中

$$\Phi_0=\{\varphi\,|\,\varphi(r,t)\in C^1(\overline{Q}),\varphi(r,T)=\varphi(A,t)=0\}. \tag{10}$$

引理 1[6] 若条件(H_1)～(H_4)成立，则系统(P)有唯一解 $p\in C([0,T];L^1(\Omega))$.

定理 1[7] 若条件(H_1)～(H_4)成立，则系统(P)的 $C([0,T];L^1(\Omega))$解属于 $L^2(Q)$解，即 $p\in L^2([0,T];L^2(0,A))=L^2(Q)$.

证明：任取 $v\in U_{ad}$，$p(v)\in\Phi_1=\{\varphi\,|\,\varphi\in C([0,T];L^1(\Omega)),\varphi(A,t)=\varphi(0,t)=0\}$，用 $p(v)$乘以方

程(1)两边，并在$(0,A)$上积分，有

$$\int_0^A \frac{\partial p}{\partial r} p(v)\mathrm{d}r + \int_0^A \frac{\partial p}{\partial t} p(v)\mathrm{d}r + \int_0^A \mu(S) p^2(v)\mathrm{d}r = \int_0^A pf\,\mathrm{d}r. \tag{11}$$

对式(11)的第一项、第二项分别利用分部积分法，并注意到$\mu(S)$的非负性及式(5)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |p^2(r,t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant p^2(0,t) + \int_0^A f^2\mathrm{d}r + \int_0^A p^2(v)\mathrm{d}r. \tag{12}$$

将式(12)两边关于τ在$(0,t)$上积分，$t\in(0,T)$，有

$$|p(r,t)|^2_{L^2(\Omega)} - |p(r,0)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \int_0^t p^2(0,\tau)\mathrm{d}\tau + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t |p|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

将式(13)右边的第一项运用 Hölder 不等式，并由式(2)及假设(H_2)，可得

$$\int_0^A p^2(0,\tau)\mathrm{d}Q = \int_0^t \left[\int_0^A \beta(S)p\mathrm{d}r + v(\tau)\right]^2 \mathrm{d}\tau \leqslant 2G_1^2 A\int_0^t |p|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau + 2\overline{u}^2 T. \tag{14}$$

将式(14)代入式(13)，得

$$|p(r,t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant |p_0(r)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\overline{u}^2 T + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + (2G_1^2A+1)\int_0^t |p|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau =$$

$$C_1 + C_2\int_0^t |p|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

其中：$C_1 = |p_0(r)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\overline{u}^2T + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$；$C_2 = 2G_1^2A+1$. 对式(15)利用 Gronwall 不等式，有

$$\int_0^T |p(r,t)|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T C_1 \mathrm{e}^{C_2T}\mathrm{d}t = C_1T\mathrm{e}^{C_2T} = C_3 < +\infty,$$

其中C_3是与p无关的常数，即$p(r,t)\in L^2([0,T];L^2(0,A)) = L^2(Q)$.

1　最优边界控制的存在性

引理 2[8]　设X为实线性赋范空间，$\{x_n\}$是X中元素构成的序列，且x_n于X中弱收敛x_0，则对于任意自然数n，都存在子列$\{x_{n+j}\}(j=0,1,2,\cdots)$的一个有限凸组合：$\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_{n_i}^{(n)}$，使得下式成立：

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_{n_i}^{(n)} - x_0\right\| < \frac{1}{n},$$

这里：$\alpha_i^{(n)}\geqslant 0$；$\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)} = 1$；$n_i\geqslant n$.

运用定理 1 的证明方法，可得：

引理 3　设$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$成立，则系统$(P)$的解$p(v)\in L^2(Q)$关于$v$是连续的.

定理 2　设$p(v)\in L^2(Q)$是由问题(1)-(4)所支配系统(P)的状态，容许控制集合U_{ad}满足式(8)，性能指标泛函$J(u)$由式(6)给出，若假设条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$成立，则问题(7)在$U_{ad}$中至少存在一个最优控制$u^*\in U_{ad}$，即$u^*$满足$J(u^*) = \inf_{u\in U_{ad}} J(u)$.

证明：设

$$d = \inf_{u\in U_{ad}} J(u) = \inf_{u\in U_{ad}}\left[\int_0^T\int_0^A (g(p(r,t;u)) - z_d)\mathrm{d}r\mathrm{d}t + \int_0^T h(u(t))\mathrm{d}t\right], \tag{16}$$

由假设条件(H_4)可知$0\leqslant J(u) < +\infty$，则$d\in[0,+\infty)$. 取$\{v_n\}\subset U_{ad}$，使得

$$d \leqslant J(v_n) \leqslant d + \frac{1}{n}, \tag{17}$$

即当$n\to+\infty$时，$J(v_n)\to d$. 由比较定理，有$0\leqslant p^{v_n}\leqslant p^{\overline{u}}$，于是存在$\{p^{v_n}\}$的子序列，仍记为$\{p^{v_n}\}$，使得：在$L^2(Q)$中，$p_n = p^{v_n}\xrightarrow{W} p^*$，$p^*\in L^2(Q)$.

由引理 2 知，存在$\{p^{v_n}\}$的子列$\{p_n\}$，满足

$$\tilde{p}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}p^{v_i},\quad \lambda_i^{(n)}\geqslant 0,\quad \sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)} = 1,\quad k_n\geqslant n+1, \tag{18}$$

其中$\{v_i\}\subset\{v_n\}$，$i=n+1,\cdots,k_n$，使得

$$\tilde{p}_n \xrightarrow{S} p^*, \qquad \text{在 } L^2(Q) \text{ 中}. \tag{19}$$

由式(8)知，$\{v_n\}$在$L^2(0,T)$中一致有界，

$$v_n \xrightarrow{W} u^*, \qquad \text{在 } L^2(0,T) \text{ 中}. \tag{20}$$

设$\tilde{v}_n=\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}v_i$，易知$\tilde{v}_n\in U_{ad}$，且

$$\tilde{v}_n \xrightarrow{S} u^*, \qquad \text{在 } L^2(0,T) \text{ 中}. \tag{21}$$

令

$$S^{\tilde{v}_n}=\int_0^A\omega(r,t)p^{\tilde{v}_n}\mathrm{d}r,\quad \tilde{S}_n=\int_0^A\omega(r,t)\tilde{p}_n\mathrm{d}r,\quad S^*=\int_0^A\omega(r,t)p(u^*)\mathrm{d}r. \tag{22}$$

设$p^{v_i}=p(v_i)$为方程(1)-(4)当$v=v_i$时的解，则$\tilde{p}_n$满足如下方程：

$$\begin{cases} D\tilde{p}_n+\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\mu(S^{v_i})p^{v_i}=0, & (23)\\ \tilde{p}_n(0,t)=\int_0^A\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\beta(S^{v_i})p^{v_i}\mathrm{d}r+\tilde{v}_n, & (24)\\ \tilde{p}_n(r,0)=p_0(r), & (25)\\ \tilde{S}_n(t)=\int_0^A\omega\tilde{p}_n\mathrm{d}r, & (26)\end{cases}$$

其中$S^{v_i}=\int_0^A\omega p^{v_i}\mathrm{d}r$. 设$p^{v_i}$为问题(1)-(4)当$v=v_i$时的解，则由定义1知，$p^{v_i}$满足式(9)，在式(9)中用$p^{v_i}$代替$p$，$S^{v_i}$代替$S$，各项乘以$\lambda_i^{(n)}$再求和，有

$$\int_Q(-D\varphi\tilde{p}_n)\mathrm{d}Q+\int_Q\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\mu(S^{v_i})p^{v_i}\varphi\mathrm{d}Q=\int_0^T\int_0^A\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\beta(S^{v_i})p^{v_i}\mathrm{d}r\varphi(0,t)\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^T\tilde{v}_n(t)\varphi(0,t)\mathrm{d}t+\int_0^A p_0(r)\varphi(r,0)\mathrm{d}r. \tag{27}$$

因此，由定义1知$\tilde{p}_n$为方程(23)-(26)的$L^2(Q)$弱解.

已知$\tilde{p}_n\xrightarrow{S}p^*$于$L^2(Q)(n\to\infty)$，$p^{v_i}\xrightarrow{W}p^*$于$L^2(Q)(i\to\infty)$，$\tilde{v}_n\xrightarrow{S}u^*$于$L^2(0,T)(n\to\infty)$，$v_i\xrightarrow{W}u^*$于$L^2(0,T)(i\to\infty)$.

1) 对式(27)左边第一项，利用Hölder不等式及$p_n\xrightarrow{S}p^*$，在$L^2(Q)$中，当$n\to+\infty$时，有

$$\int_Q(-D\varphi)\tilde{p}_n\mathrm{d}Q\to\int_Q(-D\varphi)p^*\mathrm{d}Q. \tag{28}$$

2) 对式(27)左边第二项，当$n\to+\infty$，$i\to+\infty$时，有

$$\int_Q\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\mu(S^{v_i})p^{v_i}\varphi\mathrm{d}Q\to\int_Q\mu(S^*)p^*\varphi\mathrm{d}Q\quad(i\to\infty,\ n\to\infty). \tag{29}$$

事实上，有

$$\left|\int_Q\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\mu(S^{v_i})p^{v_i}\varphi\mathrm{d}Q-\int_Q\mu(S^*)p^*\varphi\mathrm{d}Q\right|\leqslant\int_Q|\tilde{p}_n-p^*||\mu(S^*)\varphi|\mathrm{d}Q+$$
$$\int_Q|[\mu(S^{N_i})-\mu(S^*)]p^*\varphi|\mathrm{d}Q\triangleq I_1+I_2.$$

由$\|\varphi\|_{C^1(\bar{Q})}\leqslant M_0$，有$I_1\leqslant G_1M_0(\text{mes }Q)^{1/2}\|\tilde{p}_n-p^*\|_{L^2(Q)}\to0(n\to\infty)$；由$p^{v_i}\xrightarrow{W}p^{u^*}$于$L^2(Q)$，$i\to\infty$，有

$$I_2\leqslant\int_Q|p^*\varphi[\mu(S^{v_i})-\mu(S^*)]|\mathrm{d}Q\leqslant M_0G_2G_3\int_0^A\left[\int_0^T\int_0^A|p^*||p^{v_i}-p^{u^*}|\mathrm{d}Q\right]\mathrm{d}r\to0.$$

3）对式(27)右边第一项，当 $n\to+\infty$，$i\to+\infty$时，有

$$\int_0^T\int_0^A\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\beta(S^{v_i})p^{v_i}\,\mathrm{d}r\varphi(0,t)\mathrm{d}t\to\int_0^T\int_0^A\beta(S^*)p^*\,\mathrm{d}r\varphi(0,t)\mathrm{d}t.\tag{30}$$

事实上，与式(27)的证明类似，可以证明

$$\left|\int_0^T\int_0^A\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\beta(S^{v_i})p^{v_i}\,\mathrm{d}r\varphi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^T\left[\int_0^A\beta(S^*)p^*\,\mathrm{d}r\right]\varphi(0,t)\mathrm{d}t\right|\to 0\quad(i\to\infty).$$

4）对式(27)右边第二项，当 $n\to+\infty$时，有

$$\int_0^T\tilde{v}_n\varphi(0,t)\mathrm{d}t\to\int_0^T u^*\varphi(0,t)\mathrm{d}t.\tag{31}$$

事实上，有

$$\left|\int_0^T\tilde{v}_n\varphi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^T u^*\varphi(0,t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^T|(\tilde{v}_n-u^*)\varphi(0,t)|\,\mathrm{d}t\leqslant M_0T^{1/2}\ \|\tilde{v}_n-u^*\|_{L^2(0,T)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

在式(27)中，令 $i\to\infty$，$n\to\infty$，并注意到式(28)～(31)，有

$$\int_Q(-D\varphi)p^*\,\mathrm{d}Q+\int_Q\mu(S^*)p^*\varphi\mathrm{d}Q=\int_0^T\left[\int_0^A\beta(S^*)p^*\,\mathrm{d}r\right]\varphi(0,t)\mathrm{d}t+\int_0^T u^*\varphi(0,t)\mathrm{d}t+\int_0^A p_0(r)\varphi(r,0)\mathrm{d}r.\tag{32}$$

式(32)表明 p^* 为问题(1)-(4)当 $u=u^*$，$f=0$ 时的解，即 $p^*=p(u^*)$为问题(1)-(4)当 $f=0$ 时的 $L^2(Q)$解.

下证 u^* 为性能指标泛函 $J(v)$的最优控制.

定理 3　设状态函数 $p(v)$是问题(1)-(4)的 $L^2(Q)$解，性能指标泛函 $J(v)$定义如式(6)，容许控制集合 U_{ad} 由式(8)给定. 序列$\{v_n\}$是极小化序列，$u^*\in U_{ad}$ 是式(20)中的极限函数，即 $v_n\to u^*$ 在 $L^2(0,T)$中弱. 则 $u^*\in U_{ad}$即为系统(P)关于问题(7)的最优边界控制，即

$$J(u^*)=\inf_{v\in U_{ad}}J(v),\qquad u^*\in U_{ad}.\tag{33}$$

证明：由 $p^{\tilde{v}_n}$对 $\tilde{v}_n$ 的连续性及 $\beta(S^{\tilde{v}_n})$，$\mu(S^{\tilde{v}_n})$对 $\tilde{v}_n$ 的连续性，当 $\tilde{v}_n\xrightarrow{S}u^*$ 时，在问题(1)-(4)(其中$p=p^{\tilde{v}_n}$，$v=\tilde{v}_n$)中取极限，得

$$p^{\tilde{v}_n}\to p^{u^*}=p(u^*).\tag{34}$$

由式(34)及 $p^*=p(u^*)$，有 $p^*=p^{u^*}$，故有

$$p^{\tilde{v}_n}\to p^*(n\to+\infty),\tag{35}$$

即 p^* 为问题(1)-(4)当 $u=u^*$ 时的解，$p^*=p(u^*)$.

下面证明 u^* 即为最优边界控制，(p^*,u^*)为最优对，即证

$$J(u^*)=d.\tag{36}$$

事实上，由式(17)，(20)，(21)，(35)，有

$$d=\lim_{n\to\infty}J(v_n)=\lim_{n\to\infty}J(\tilde{v}_n)=\left[\int_Q g(p^*-z_d)\mathrm{d}r\mathrm{d}t+\int_0^T h(u^*)\mathrm{d}t\right]=J(u^*),$$

即式(36)成立.

2　控制为最优的必要条件及确定最优控制的最优性组

下面讨论 $u^*\in U$ 为系统(P)最优边界控制的必要条件，并确定最优控制的最优性组. 记

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}p(u^*+\lambda(u-u^*))\bigg|_{\lambda=0}=\lim_{\lambda\to\infty^+}\frac{1}{\lambda}[p(u^*+\lambda(u-u^*))-p(u^*)].\tag{37}$$

事实上，$\dot{p}$ 即为非线性函数 $p(u)$在 u^* 处沿方向$(u-u^*)$的 G 微分[9]，记

$$u_\lambda=u^*+\lambda(u-u^*),\qquad 0<\lambda<1,$$

并且 p_λ 和 p 分别表示问题(1)-(4)中当 $p_\lambda=p(u_\lambda)$和 $p=p(u^*)$时在 $L^2(Q)$中的弱解，则利用微分中值定理，将方程两端同时除以 $\lambda>0$，并令 $\lambda\to0^+$ 取极限，再注意到 $\dot{p}$ 的定义和式(37)得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \dot{p}}{\partial r}+\dfrac{\partial \dot{p}}{\partial t}+\mu(\dot{S}^*)\dot{p}+\mu_P(\dot{S}^*)p\displaystyle\int_0^A\omega\dot{p}\,\mathrm{d}r=0, & \text{在 } Q \text{ 内},\\ \dot{p}(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta(\dot{S}^*)\dot{p}\,\mathrm{d}r+\int_0^A p\beta_P(\dot{S}^*)\left(\int_0^A\omega\dot{p}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r+u(t)-u^*(t), & \text{在}[0,T]\text{ 内},\\ \dot{p}(r,0)=0, & \text{在}(0,A)\text{ 内},\\ \dot{S}^*(t)=\displaystyle\int_0^A\omega\dot{p}(r,t)\,\mathrm{d}r, & \text{在}[0,T]\text{ 内}.\end{cases}\tag{38}$$

因为式(38)与式(1)-(4)属同类问题，故运用定理2可得问题(38)在 $L^2(Q)$ 中有唯一弱解 $\dot{p}$.

定理4 若 $u^*\in U_{ad}$ 是系统(P)的最优边界控制，则 u^* 满足如下不等式：

$$\int_Q g'(p^*-z_d)\dot{p}\,\mathrm{d}Q+\int_0^T h'(u^*)(u-u^*)\,\mathrm{d}t\geqslant 0,\qquad \forall\, u\in U_{ad}.\tag{39}$$

证明：设 $u^*\in U_{ad}$ 为最优边界控制，则由性能指标泛函 $J(u)$ 的结构式(6)，有

$$J(u_\lambda)-J(u^*)=\int_Q g(p_\lambda-z_d)\,\mathrm{d}Q+\int_0^T h(u_\lambda)\,\mathrm{d}t-\int_Q g(p^*-z_d)\,\mathrm{d}Q-\int_0^T h(u^*)\,\mathrm{d}t\geqslant 0,\tag{40}$$

其中：$p(u_\lambda)=p(r,t;u_\lambda)$；$p^*(u)=p(r,t;u^*)$；$0<\lambda<1$. 由式(40),(37)和极限的保号性可得

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}(J(u_\lambda)-J(u^*))=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}\left[\int_Q g(p_\lambda-z_d)\,\mathrm{d}Q+\int_0^T h(u_\lambda)\,\mathrm{d}t-\int_Q g(p^*-z_d)\,\mathrm{d}Q-\int_0^T h(u^*)\,\mathrm{d}t\right]=$$

$$\int_Q g'(p^*-z_d)\dot{p}\,\mathrm{d}Q+\int_0^T h'(u^*)(u-u^*)\,\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

即式(39)成立. 证毕.

为变换式(39)，导入式(38)的伴随状态 $q(r,t;u)=q(u)$.

$$\begin{cases}A^*q=-\dfrac{\partial q}{\partial r}-\dfrac{\partial q}{\partial t}+\mu(S)q-\beta(r,t;S)q(0,t)-\omega\displaystyle\int_0^A p(\sigma,t)\beta_P(\sigma,t;S)\,\mathrm{d}\sigma\, q(0,t)+\\ \qquad\omega\displaystyle\int_0^A\mu_P(S)pq(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi=g'(p-z_d), \quad \text{在 } Q \text{ 内},\\ q(A,t)=0, \quad \text{在}[0,T]\text{ 内},\\ q(r,T)=0, \quad \text{在}(0,A)\text{ 内},\\ S(t)=\displaystyle\int_0^A\omega(r,t)p(r,t)\,\mathrm{d}r, \quad \text{在}[0,T]\text{ 内}.\end{cases}\tag{41}$$

定理5 设 $p(r,t;u)$ 是问题(1)-(4)的广义解，则伴随问题(41)存在唯一的广义解：$q(u)\in L^2(Q)$，$Dq(u)\in L^2(Q)$.

证明：用 $q(u)$ 乘式(38)的第一式，并在 Q 上积分，得

$$\int_Q g'(p^*-z_d)\dot{p}\,\mathrm{d}Q=\int_Q\left[\frac{\partial\dot{p}}{\partial r}+\frac{\partial\dot{p}}{\partial t}+\mu(S^*)\dot{p}+\mu_P(S^*)p\int_0^A\omega\dot{p}\,\mathrm{d}r\right]q\,\mathrm{d}Q.\tag{42}$$

在式(42)等号右边对 (r,t) 进行分部积分，并结合式(38)和式(41)后3个等式，得

$$\int_Q g'(p^*-z_d)\dot{p}\,\mathrm{d}Q=\int_0^T(u(t)-u^*(t))q(0,t)\,\mathrm{d}t.\tag{43}$$

由式(43)知，式(39)等价于

$$\int_0^T[q(0,t)+h'(u^*)](u-u^*)\,\mathrm{d}t\geqslant 0,\qquad \forall\, u\in U.\tag{44}$$

又由方程(41)知，$q(r,t)$ 依赖于 $p(r,t)$，而 $p(r,t)=p(r,t;u^*)$，因此式(44)可变为

$$\int_0^T(q(0,t;p,u^*)+h'(u^*))(u-u^*)\,\mathrm{d}t\geqslant 0,\qquad \forall\, u\in U.\tag{45}$$

综上，可得本文主要结果：

定理6 设 $p(v)\in L^2(Q)$ 是系统(P)的状态，$J(v)$ 是由式(6)给出的性能指标，U_{ad} 是式(8)表示的容许控制集，若 $u^*\in U_{ad}$ 为系统(P)关于问题(7)的最优控制，则 $u^*\in U_{ad}$ 由系统(P)(其中 $v=u^*$)、伴随系统(41)及变分不等式(45)构成的最优性组的联立解 $\{u^*,p,q\}$ 确定.

参　考　文　献

[1] CAO Chun-ling，CHEN Ren-zhao. Optimal Boundary Control for Time-Varying Population Systems [J]. Journal of Northeast Normal University：Natural Science Edition，1999(4)：9-13.（曹春玲，陈任昭. 时变种群系统的最优边界控制 [J]. 东北师大学报：自然科学版，1999(4)：9-13.）

[2] FU Jun，YAN Shu-kun，LÜ Xian-rui. Penalty Shifting Method on Calculation of Optimal Boundary Control for Time-Varying Population System with Age-Dependence [J]. Journal of Jilin University：Science Edition，2010，48(2)：177-182.（付军，闫淑坤，吕显瑞. 年龄相关的时变种群系统最优边界控制计算的惩罚移位法 [J]. 吉林大学学报：理学版，2010，48(2)：177-182.）

[3] XU Wen-bing，CHEN Ren-zhao. Final State Observation and Boundary Control for a Time-Varying Population System [J]. Journal of Northeast Normal University：Natural Science Edition，2000，32(1)：6-9.（徐文兵，陈任昭. 时变种群系统最终状态观测及边界控制 [J]. 东北师大学报：自然科学版，2000，32(1)：6-9.）

[4] HE Ze-rong，ZHU Guang-tian. Optimal Harvesting for a Population System Based on Age Distribution and Weighted Size [J]. Advances in Mathematics，2006，35(3)：315-324.（何泽荣，朱广田. 基于年龄分布和加权总规模的种群系统的最优收获控制 [J]. 数学进展，2006，35(3)：315-324.）

[5] YE Shan-xi，ZHAO Chun. Optimal Control for a Class of Age-Dependent Population System Based on Weight [J]. Mathematica Applicata，2007，20(3)：562-567.（叶山西，赵春. 一类具有年龄分布和加权的种群系统的最优控制 [J]. 应用数学，2007，20(3)：562-567.）

[6] CHEN Ren-zhao，LI Jian-quan. Existence and Uniqueness of the Solution for Nonlinear Age-Dependent Time-Varying Population Evolution Equations [J]. Acta Mathematiea Scientia，2003，23A(4)：385-400.（陈任昭，李健全. 与年龄相关的非线性时变种群发展方程解的存在与唯一性 [J]. 数学物理学报，2003，23A(4)：385-400.）

[7] TIAN Jian-hao，FU Jun. Solution and Continuous Dependency of the Solution for the Boundary Control in a Class of Nonlinear and Weighted Size Population System [J]. Journal of Jilin Normal University：Natural Science Edition，2009(2)：73-75.（田健豪，付军. 一类非线性加权种群系统解及其对边界控制的连续相依性 [J]. 吉林师范大学学报：自然科学版，2009(2)：73-75.）

[8] 黎茨 F，塞克佛尔维-纳吉 B. 泛函分析讲义 [M]. 庄万，译. 第二卷. 北京：科学出版社，1981：65-71.

[9] 赵义纯. 非线性泛函分析及其应用 [M]. 北京：高等教育出版社，1989：10-11.

（责任编辑：赵立芹）

2011 年综合大学学报类期刊影响因子排序表*

期刊名称	影响因子	排序	期刊名称	影响因子	排序
成都理工大学学报自然科学版	0.689	1	济南大学学报自然科学版	0.369	12
北京大学学报自然科学版	0.537	2	**吉林大学学报理学版**	**0.368**	**13**
兰州大学学报自然科学版	0.510	3	东华理工大学学报自然科学版	0.366	14
山东大学学报理学版	0.492	4	云南大学学报自然科学版	0.357	15
西安科技大学学报	0.487	5	石河子大学学报自然科学版	0.355	16
广西大学学报自然科学版	0.474	6	南昌大学学报理科版	0.343	17
河北科技大学学报	0.452	7	浙江大学学报理学版	0.333	18
西南大学学报自然科学版	0.450	8	中南民族大学学报自然科学版	0.301	19
南京大学学报自然科学	0.449	9	厦门大学学报自然科学版	0.272	20
中山大学学报自然科学版	0.431	10	暨南大学学报自然科学与医学版	0.271	21
江苏大学学报自然科学版	0.407	11	中国科学院研究生院学报	0.270	22

* 源于中国科学技术信息研究所《中国科技期刊引证报告(核心版)》. 2012：108-109.