具有梯形结构大系统目标规划模型的求解算法

张　杰，刘　妮，徐玲敏
(东北电力大学 理学院，吉林 吉林 132012)

摘要：先在纵向分解子问题对应的约束不等式组有解的条件下，通过证明对应的达成向量为零进而证明了子问题的最优解构成大系统问题的最优解；再针对一般情况，提出一种求解具有梯形结构大系统目标规划模型的"顺次解耦算法"，并结合实例说明了算法的迭代过程及其有效性.

关键词：梯形结构；大系统规划；顺次解耦算法
中图分类号：O221.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2013)01-0009-06

Algorithm of Large Scale Multiobjective Programming Model with Trapezoidal Structure

ZHANG Jie, LIU Ni, XU Ling-min
(*College of Science*, *Northeast Dianli University*, *Jilin* 132012, *Jilin Province*, *China*)

Abstract: Firstly, on the basis of the condition of inequality group constraint to which correspond longitudinal decomposition subproblems having solutions, via proving that corresponding reach vector is zero, we further proved that the optimal solutions of longitudinal subproblems comprise the large scale problem's optimal solutions; then proposed the "order decoupling algorithm" under particular conditions, which is used to solve the large scale goal programming model with trapezoidal structure; and finally illustrated the iteration process and effectiveness of algorithm with examples.

Key words: trapezoid structure; large scale programming; order decoupling algorithm

由于大系统目标规划模型规模庞大、结构复杂，很难直接求解，所以需要根据其特殊结构研究相应的求解算法，目前已取得了一些成果. Shastri 等[1]将所研究的问题先转化为两阶段随机规划问题，再将对大型随机非线性规划问题的求解转化为对不确定变量重复加权，并对目标函数和约束条件进行线性近似，从而简化模型. Saadouli[2]利用聚合法解决大型随机动态规划问题，先将系统分解为几个阶段，然后利用仿真和人工智能思想相结合，从而得出高精度的有效解. Regis[3]提出了求解大系统优化问题的随机径向基函数算法，利用多重径向基函数近似模型中的目标函数和不等式约束，得到替代模型，并在每次迭代时运用这些模型为函数估计确定合适的点，这种算法只需要相对较小的计算量即可得到较好的解. Anderson 等[4]以生物系统为原型，提出了两种求解生物大系统问题的算法——分解法和降阶法，基本思路是对于不含不确定性参数的模型，采用降阶法；对于含有不确定性参数的情况，采用分解法，在保证原模型动态特性不变的前提下，将模型分解成较小的子系统，并对子系统进行仿真求解，进而得到大系统的解. 文献[5]根据原方块角形结构大系统多目标规划问题的特征，将其进行

收稿日期：2012-07-09.
作者简介：张　杰(1962—)，女，汉族，博士，教授，从事运筹学与优化理论的研究，E-mail：jlzj2005@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：10671082).

分解，通过研究大系统模型与各个子系统模型最优解之间的关系，给出了此类大系统问题最优解的判别条件. 文献[6]针对原方块角形结构大系统目标规划问题，研究了分解子问题与大系统问题有效解之间的关系，并讨论了大系统问题有效解的存在性. 文献[7-8]对具有梯形结构大系统多目标规划问题进行了初步研究，通过对模型进行适当的分解，探讨了大系统问题最优解与分解后子问题最优解的关系，旨在将大系统问题的求解转化为求解子问题，为研究这类大系统目标规划模型的有效求解算法奠定了基础. 本文在文献[7-8]的基础上，先在纵向分解子问题对应的约束不等式组有解的条件下，证明子问题(P_i)的最优解构成大系统问题(P)的最优解；再针对一般情况，提出求解梯形结构大系统目标规划模型的“顺次解耦算法”，并结合实例说明了算法的迭代过程及其有效性.

1 大系统与纵向分解子系统约束不等式组解之间的关系

1.1 模型描述

具有梯形结构大系统目标规划模型(P)[8]为：求 $\boldsymbol{x}\in X\subset\mathbb{R}_+^n$ $\left(n=\sum\limits_{i=1}^{M}n_i\right)$，使得

$$\operatorname{lex}\ \min\ \boldsymbol{a}=\left(\sum_{i=1}^{M}\omega_1^i\rho_1^i,\ \sum_{i=1}^{M}\omega_2^i\rho_2^i,\cdots,\sum_{i=1}^{M}\omega_K^i\rho_K^i\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{\eta}\geqslant\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\rho}=0,\end{cases}$$

其中各部分的含义与文献[8]相同.

大系统模型(P)所对应的约束不等式组为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1^1 & & & \\ \boldsymbol{F}_1^2 & \boldsymbol{F}_2^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{F}_{M-1}^M & \boldsymbol{F}_M^M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \boldsymbol{x}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^M\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^1\\ \boldsymbol{C}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}^M\end{pmatrix}. \tag{1}$$

大系统模型(P)纵向垂直分解子系统(P_i)为：求 $\boldsymbol{x}^i\in X^i\subset\mathbb{R}_+^{n_i}$，使得

$$\operatorname{lex}\ \min\ \boldsymbol{a}_i=(\omega_{i,1}^i\rho_{i,1}^i+\omega_{i,1}^{i+1}\rho_{i,1}^{i+1},\cdots,\omega_{i,K}^i\rho_{i,K}^i+\omega_{i,K}^{i+1}\rho_{i,K}^{i+1}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{F}_i^i(\boldsymbol{x}^i)+\boldsymbol{\eta}_i^i-\boldsymbol{\rho}_i^i=\boldsymbol{C}_i^i,\\ \boldsymbol{F}_i^{i+1}(\boldsymbol{x}^i)+\boldsymbol{\eta}_i^{i+1}-\boldsymbol{\rho}_i^{i+1}=\boldsymbol{C}_i^{i+1},\\ \boldsymbol{\eta}_i^i=(\eta_{i,1}^i,\cdots,\eta_{i,K}^i)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\rho}_i^i=(\rho_{i,1}^i,\cdots,\rho_{i,K}^i)^{\mathrm{T}},\quad(\boldsymbol{\eta}_i^i)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\rho}_i^i=0,\\ \boldsymbol{\eta}_i^{i+1}=(\eta_{i,1}^{i+1},\cdots,\eta_{i,K}^{i+1})^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\rho}_i^{i+1}=(\rho_{i,1}^{i+1},\cdots,\rho_{i,K}^{i+1})^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0},\quad(\boldsymbol{\eta}_i^{i+1})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\rho}_i^{i+1}=0,\\ \boldsymbol{\omega}_i^i=(\omega_{i,1}^i,\cdots,\omega_{i,K}^i)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\omega}_i^{i+1}=(\omega_{i,1}^{i+1},\cdots,\omega_{i,K}^{i+1})^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

纵向分解子问题(P_i)对应的约束不等式组为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_i^i\\ \boldsymbol{F}_i^{i+1}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}^i\leqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{i,i}\\ \boldsymbol{C}^{i+1,i}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

1.2 大系统与纵向分解子系统约束不等式组解之间的关系

一般的多目标规划模型为

$$(\mathrm{MP})\quad\underset{\boldsymbol{x}\in X\subset\mathbb{R}_+^n}{\min\ \mathrm{imize}}\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),g_2(\boldsymbol{x}),\cdots,g_K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}.$$

在字典序下，其对应的目标规划模型(P')为：求 $\boldsymbol{x}\in X\subset\mathbb{R}_+^n$，使得

$$\operatorname{lex}\ \min\ \boldsymbol{a}=(\omega_1\rho_1,\omega_2\rho_2,\cdots,\omega_K\rho_K),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_K)^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_K)^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\rho}=0,\quad\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_k)^{\mathrm{T}}.\end{cases}$$

记模型(P')的最优集为 $A(P')$.

定理1 若不等式组

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}_{+}^{n}) \tag{3}$$

有解，设其解集为 $U(\boldsymbol{G})$，则 $U(\boldsymbol{G})=A(P')$.

证明：先证明 $U(\boldsymbol{G})\subset A(P')$. 因为不等式组(3)有解，则对任意的 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)\in U(\boldsymbol{G})$，有

$$\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{C}, \tag{4}$$

将 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 代入模型(P')中，有

$$\boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \tilde{\boldsymbol{\eta}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{C}. \tag{5}$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\tilde{\boldsymbol{\rho}}\geqslant\boldsymbol{0}$ 且 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\rho}}=0$，所以由式(4),(5)，有 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{0}$，即 $\omega_k\tilde{\rho}_k=0(k=1,2,\cdots,K)$，因此 $\tilde{\boldsymbol{a}}=(\omega_1\tilde{\rho}_1,\omega_2\tilde{\rho}_2,\cdots,\omega_K\tilde{\rho}_K)=\boldsymbol{0}$，即 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in A(P')$，从而 $U(\boldsymbol{G})\subset A(P')$.

下面证明 $U(\boldsymbol{G})\supset A(P')$. 对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_K)\in A(P')$，因为不等式组(3)有解，所以 $\bar{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0}$($\bar{\boldsymbol{a}}$ 为在模型(P')中 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 所对应的达成向量)，即 $\bar{\rho}_k=0(k=1,2,\cdots,K)$. 因此，将 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 代入模型(P')中，有

$$\boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{C}. \tag{6}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{\eta}}\geqslant\boldsymbol{0}$，所以式(6)为 $\boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{C}$，即 $\bar{\boldsymbol{x}}\in U(\boldsymbol{G})$，因此，证得 $U(\boldsymbol{G})\supset A(P')$.

综上所述，有 $U(\boldsymbol{G})=A(P')$.

定理 2　不等式组(1)有解的充要条件为：存在 $\boldsymbol{C}^i$ 的分解 $\boldsymbol{C}^i=\bar{\boldsymbol{C}}_{i-1}^i+\bar{\boldsymbol{C}}_i^i(i=2,3,\cdots,M)$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$，不等式组(2)有解.

证明：必要性. 设 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{\boldsymbol{x}}^1,\bar{\boldsymbol{x}}^2,\cdots,\bar{\boldsymbol{x}}^M)$为不等式组(1)的解，则将 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 代入式(1)，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_1^1(\bar{\boldsymbol{x}}^1) \leqslant \boldsymbol{C}^1, \\ \boldsymbol{F}_1^2(\bar{\boldsymbol{x}}^1) + \boldsymbol{F}_2^2(\bar{\boldsymbol{x}}^2) \leqslant \boldsymbol{C}^2, \\ \boldsymbol{F}_2^3(\bar{\boldsymbol{x}}^2) + \boldsymbol{F}_3^3(\bar{\boldsymbol{x}}^3) \leqslant \boldsymbol{C}^3, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{F}_{M-2}^{M-1}(\bar{\boldsymbol{x}}^{M-2}) + \boldsymbol{F}_{M-1}^{M-1}(\bar{\boldsymbol{x}}^{M-1}) \leqslant \boldsymbol{C}^{M-1}, \\ \boldsymbol{F}_{M-1}^{M}(\bar{\boldsymbol{x}}^{M-1}) + \boldsymbol{F}_M^M(\bar{\boldsymbol{x}}^M) \leqslant \boldsymbol{C}^M.\end{cases}$$

令 $\bar{\boldsymbol{C}}_{i-1}^i=\boldsymbol{F}_{i-1}^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{i-1})$，$\bar{\boldsymbol{C}}_i^i=\boldsymbol{C}^i-\bar{\boldsymbol{C}}_{i-1}^i(i=2,3,\cdots,M)$，则有 $\boldsymbol{F}_i^i(\bar{\boldsymbol{x}}^i)\leqslant\bar{\boldsymbol{C}}^i-\boldsymbol{F}_{i-1}^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{i-1})=\boldsymbol{C}^i-\bar{\boldsymbol{C}}_{i-1}^i=\bar{\boldsymbol{C}}_i^i$. 因此，对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_i^i \\ \boldsymbol{F}_i^{i+1}\end{pmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}^i \leqslant \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_i^i \\ \bar{\boldsymbol{C}}_i^{i+1}\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{C}_1^1=\boldsymbol{C}^1),$$

即 $\bar{\boldsymbol{x}}^i$ 为不等式组(2)的解，所以不等式组(2)有解.

充分性. 因为存在 $\boldsymbol{C}^i$ 的分解 $\boldsymbol{C}^i=\bar{\boldsymbol{C}}_{i-1}^i+\bar{\boldsymbol{C}}_i^i$，使得不等式组(2)有解，不妨设为 $\tilde{\boldsymbol{x}}^i$，则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_i^i \\ \boldsymbol{F}_i^{i+1}\end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}^i \leqslant \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_i^i \\ \bar{\boldsymbol{C}}_i^{i+1}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{F}_i^i(\tilde{\boldsymbol{x}}^i)\leqslant\bar{\boldsymbol{C}}_i^i$，$\boldsymbol{F}_i^{i+1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^i)\leqslant\bar{\boldsymbol{C}}_i^{i+1}$，所以有

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_1^1(\tilde{\boldsymbol{x}}^1) \leqslant \bar{\boldsymbol{C}}_1^1 = \boldsymbol{C}^1, \\ \boldsymbol{F}_1^2(\tilde{\boldsymbol{x}}^1) + \boldsymbol{F}_2^2(\tilde{\boldsymbol{x}}^2) \leqslant \bar{\boldsymbol{C}}_1^2 + \bar{\boldsymbol{C}}_2^2 = \boldsymbol{C}^2, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{F}_{M-1}^{M}(\tilde{\boldsymbol{x}}^{M-1}) + \boldsymbol{F}_M^M(\tilde{\boldsymbol{x}}^M) \leqslant \boldsymbol{C}_{M-1}^M + \boldsymbol{C}_M^M = \boldsymbol{C}^M.\end{cases}$$

令 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{\boldsymbol{x}}^1,\tilde{\boldsymbol{x}}^2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}^M)$，则 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 即为不等式组(1)的解. 证毕.

由定理 1 和定理 2 可得：

定理 3　若存在 $\boldsymbol{C}^i$ 的分解 $\boldsymbol{C}^i=\boldsymbol{C}_{i-1}^i+\boldsymbol{C}_i^i$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$，不等式组(2)有解，则大系统目标规划模型(P)最优解所对应的达成向量为 $\boldsymbol{0}$.

2　具有梯形结构大系统目标规划模型的顺次解耦算法及数值算例

2.1　顺次解耦算法的基本思想

对于大系统模型(P)资源参数 $\boldsymbol{C}^i$ 充足的情况，由定理 2 可知，必存在 $\boldsymbol{C}^i$ 的某种分解$\boldsymbol{C}^i=\boldsymbol{C}_{i-1}^i+\boldsymbol{C}_i^i$，

使得相应的纵向分解子系统(P_i)的最优解构成大系统(P)的最优解.

如果大系统模型(P)的资源参数$\boldsymbol{C}^i$不充足，则由文献[8]可知，只要纵向分解子系统(P_i)的两个子问题(P_i^i)和(P_i^{i+1})的最优集相交非空，则子问题(P_i)的最优解即构成大系统问题的最优解.

因此，算法的关键是寻求资源参数$\boldsymbol{C}^i$的分解方法，使得$A(P_i^i)\cap A(P_i^{i+1})\neq\varnothing$. 在顺次解耦算法中，横向资源分解的原则是“前紧后松”，即对于子问题(P_{i-1}^i)和(P_i^i)的共享资源$\boldsymbol{C}^i$，分解为$\boldsymbol{C}^i=\boldsymbol{C}_{i-1}^i+\boldsymbol{C}_i^i$，对应于$(P_{i-1}^i)$的资源$\boldsymbol{C}_{i-1}^i$没有盈余，保证$A(P_i^i)\cap A(P_i^{i+1})\neq\varnothing$，其余的资源$\boldsymbol{C}_i^i$分配给$(P_i^i)$.

顺次解耦算法的基本思想是：按行块的顺序顺次求解. 首先确定模型$(P_i^i)(i=1,2,\cdots,M)$的最优集；然后在(P_i^i)的最优集中求同一纵向子问题(P_i^{i+1})的各个约束函数$f_{i,k}^{i+1}(\boldsymbol{x}^i)(k=1,2,\cdots,K)$的最小值，从而得到右端为每个约束函数最小值的不等式组；再根据该不等式组解的存在性确定横向子问题(P_i^{i+1})和(P_{i+1}^{i+1})所对应的资源；依此类推，每个纵向分解子问题(P_i)的最优解即构成了大系统问题(P)的最优解.

2.2 算法步骤

1) 设$i=1$，求解模型(P_1^1)：求$\boldsymbol{x}^1\in X^1$，使得

$$\text{lex min } \boldsymbol{a}_1^1=(\omega_{1,1}^1\rho_{1,1}^1,\omega_{1,2}^1\rho_{1,2}^1,\cdots,\omega_{1,K}^1\rho_{1,K}^1),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}f_{1,1}^1(\boldsymbol{x}^1)+\eta_{1,1}^1-\rho_{1,1}^1=C_1^1,\\ f_{1,2}^1(\boldsymbol{x}^1)+\eta_{1,2}^1-\rho_{1,2}^1=C_2^1,\\ \quad\vdots\\ f_{1,K}^1(\boldsymbol{x}^1)+\eta_{1,K}^1-\rho_{1,K}^1=C_K^1.\end{cases}$$

设其最优集为$A(P_1^1)$，$\bar{\boldsymbol{\rho}}_1^1$为最优解对应的正偏差向量，$\bar{\boldsymbol{\eta}}_1^1$为$(P_1^1)$所有最优解所对应的字典序最小负偏差向量，即$\bar{\boldsymbol{\eta}}_1^1=\underset{\boldsymbol{x}^1\in\boldsymbol{A}(P_1^1)}{\text{lex min}}\{\boldsymbol{\eta}_1^1(\boldsymbol{x}^1)\}$，转2).

2) 设$i=i+1$，求$\min\limits_{\boldsymbol{x}^{i-1}\in\boldsymbol{A}(P_{i-1}^{i-1})} f_{i-1,k}^i(\boldsymbol{x}^{i-1})(k=1,2,\cdots,K)$，即求解如下模型：

$$\min f_{i-1,k}^i(\boldsymbol{x}^{i-1}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}f_{i-1,1}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})=C_{i-1,1}^{i-1}+\bar{\rho}_{i-1,1}^{i-1}-\bar{\eta}_{i-1,1}^{i-1},\\ f_{i-1,2}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})=C_{i-1,2}^{i-1}+\bar{\rho}_{i-1,2}^{i-1}-\bar{\eta}_{i-1,2}^{i-1},\\ \quad\vdots\\ f_{i-1,K}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})=C_{i-1,K}^{i-1}+\bar{\rho}_{i-1,K}^{i-1}-\bar{\eta}_{i-1,K}^{i-1}.\end{cases}$$

设$\min\limits_{\boldsymbol{x}^{i-1}\in\boldsymbol{A}(P_{i-1}^{i-1})} f_{i-1,k}^i(\boldsymbol{x}^{i-1})=m_{i-1,k}^i$，转3).

3) 求解模型$(\bar{P}_{i-1}^i)$：求$\boldsymbol{x}^{i-1}\in X^{i-1}$，使得

$$\text{lex min } \hat{\boldsymbol{a}}_{i-1}^i=(\omega_{i-1,1}^{i-1}\rho_{i-1,1}^{i-1},\omega_{i-1,2}^{i-1}\rho_{i-1,2}^{i-1},\cdots,\omega_{i-1,K}^{i-1}\rho_{i-1,K}^{i-1},\omega_{i-1,1}^{i}\rho_{i-1,1}^{i},\omega_{i-1,2}^{i}\rho_{i-1,2}^{i},\cdots,\omega_{i-1,K}^{i}\rho_{i-1,K}^{i}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}f_{i-1,1}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,1}^{i-1}-\rho_{i-1,1}^{i-1}=C_{i-1,1}^{i-1},\\ f_{i-1,2}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,2}^{i-1}-\rho_{i-1,2}^{i-1}=C_{i-1,2}^{i-1},\\ \quad\vdots\\ f_{i-1,K}^{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,K}^{i-1}-\rho_{i-1,K}^{i-1}=C_{i-1,K}^{i-1},\\ f_{i-1,1}^{i}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,1}^{i}-\rho_{i-1,1}^{i}=m_{i-1,1}^{i},\\ f_{i-1,2}^{i}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,2}^{i}-\rho_{i-1,2}^{i}=m_{i-1,2}^{i},\\ \quad\vdots\\ f_{i-1,K}^{i}(\boldsymbol{x}^{i-1})+\eta_{i-1,K}^{i}-\rho_{i-1,K}^{i}=m_{i-1,K}^{i}.\end{cases}$$

设模型$(\bar{P}_{i-1}^i)$最优解所对应的正负偏差变量分别为$\bar{\rho}_{i-1,k}^i,\eta_{i-1,k}^i(k=1,2,\cdots,K)$，此时$\bar{\eta}_{i-1,k}^i=0$，并设

$$\bar{C}_{i-1,k}^i=m_{i-1,k}^i+\bar{\rho}_{i-1,k}^i\quad(k=1,2,\cdots,K),$$

转4).

4) 设 $\bar{C}^i_{i,k}=C^i_k-\bar{C}^i_{i-1,k}(k=1,2,\cdots,K)$，求解模型$(P^i_i)$：求 $\boldsymbol{x}^i\in X^i$，使得

$$\text{lex min } \boldsymbol{a}^i_i=(\omega^i_{i,1}\rho^i_{i,1},\omega^i_{i,2}\rho^i_{i,2},\cdots,\omega^i_{i,K}\rho^i_{i,K}),$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}f^i_{i,1}(\boldsymbol{x}^i)+\eta^i_{i,1}-\rho^i_{i,1}=C^i_{i,1},\\ f^i_{i,2}(\boldsymbol{x}^i)+\eta^i_{i,2}-\rho^i_{i,2}=C^i_{i,2},\\ \quad\vdots\\ f^i_{i,K}(\boldsymbol{x}^i)+\eta^i_{i,K}-\rho^i_{i,K}=C^i_{i,K}.\end{cases}$$

设其最优解为 $\bar{\boldsymbol{x}}^i$，转 5).

5) 若 $i=M$，计算结束，$\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{\boldsymbol{x}}^1,\bar{\boldsymbol{x}}^2,\cdots,\bar{\boldsymbol{x}}^M)$即为大系统问题$(P)$的最优解；否则，设其最优集为 $A(P^i_i)$，$\boldsymbol{\rho}^i_i$为最优解对应的正偏差向量，$\bar{\boldsymbol{\eta}}^i_i$ 为(P^i_i)所有最优解所对应的字典序最小负偏差向量，即 $\bar{\boldsymbol{\eta}}^i_i=\underset{\boldsymbol{x}^i\in A(P^i_i)}{\text{lex min}}\{\boldsymbol{\eta}^i_i(\boldsymbol{x}^i)\}$，转 2).

2.3　顺次解耦算法的数值算例

利用顺次解耦算法求解大系统目标规划模型(P)：求 $\boldsymbol{x}=(x_{ij}:i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$，使得

$$\text{lex min } \tilde{\boldsymbol{a}}=(\eta_{10}+\eta_{11}+\eta_{12},\rho_1+\rho_4+\rho_7,\rho_2+\rho_5+\rho_8,\rho_3+\rho_6+\rho_9),$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x^2_{11}+x_{12}+4x_{13}+3x^3_{14}+\eta_1-\rho_1=4,\\ x^3_{11}+2x^2_{12}+x_{13}+5x_{14}+\eta_2-\rho_2=5,\\ 3x^2_{11}+x_{12}+7x^3_{13}+4x^2_{14}+\eta_3-\rho_3=6,\\ x^3_{11}+3x^2_{12}+x_{13}+2x_{14}+2x_{21}+5x_{22}+x^2_{23}+x_{24}+\eta_4-\rho_4=5,\\ 5x^2_{11}+3x_{12}+x^3_{13}+x_{14}+x^2_{21}+3x_{22}+x^3_{23}+4x_{24}+\eta_5-\rho_5=8,\\ 2x^3_{11}+3x_{12}+x^2_{13}+5x_{14}+x_{21}+2x^2_{22}+3x_{23}+x^3_{24}+\eta_6-\rho_6=6,\\ 2x^3_{21}+x^2_{22}+8x_{23}+6x_{24}+6x_{31}+8x^2_{32}+6x_{33}+5x^3_{34}+\eta_7-\rho_7=16,\\ 3x_{21}+7x^3_{22}+5x_{23}+4x^2_{24}+3x^4_{31}+5x^2_{32}+8x_{33}+7x_{34}+\eta_8-\rho_8=12,\\ 3x^2_{21}+5x_{22}+3x^3_{23}+8x_{24}+3x_{31}+4x^2_{32}+x_{33}+4x^2_{34}+\eta_9-\rho_9=10,\\ x^2_{11}+x^2_{12}+x^2_{13}+x^2_{14}+\eta_{10}-\rho_{10}=1,\\ x^2_{21}+x^2_{22}+x^2_{23}+x^2_{24}+\eta_{11}-\rho_{11}=1,\\ x^2_{31}+x^2_{32}+x^2_{33}+x^2_{34}+\eta_{12}-\rho_{12}=1.\end{cases}$$

按横向双层分解的顺序顺次求解. 由于模型(P^1_1)不涉及资源的分解，所以根据算法步骤 1)，直接求解模型(P^1_1)：求 $x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}$，使得

$$\text{lex min } \tilde{\boldsymbol{a}}^1_1=(\eta^1_{1,4},\rho^1_{1,1},\rho^1_{1,2},\rho^1_{1,3}),$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x^2_{11}+x_{12}+4x_{13}+3x^3_{14}+\eta^1_{1,1}-\rho^1_{1,1}=4,\\ x^3_{11}+2x^2_{12}+x_{13}+5x_{14}+\eta^1_{1,2}-\rho^1_{1,2}=5,\\ 3x^2_{11}+x_{12}+7x^3_{13}+4x^2_{14}+\eta^1_{1,3}-\rho^1_{1,3}=6,\\ x^2_{11}+x^2_{12}+x^2_{13}+x^2_{14}+\eta^1_{1,4}-\rho^1_{1,4}=1.\end{cases}$$

根据算法步骤 2)，在模型(P^1_1)的最优集中求向量值函数 $\boldsymbol{F}^2_1$ 的最小值 $\boldsymbol{m}^2_1$，其中 $\boldsymbol{m}^2_1=(m^2_{1,1},m^2_{1,2},m^2_{1,3})$；在资源参数 $\boldsymbol{C}^1$ 及 $\boldsymbol{m}^2_1$ 确定的情况下，根据算法步骤 3)，求解模型$(\bar{P}^2_1)$，从而得到模型$(\bar{P}^2_1)$的资源分解 $\bar{\boldsymbol{C}}^2_1=(\bar{C}^2_{1,1},\bar{C}^2_{1,2},\bar{C}^2_{1,3})=(2,1,5)$；由于 $\boldsymbol{C}^2=\bar{\boldsymbol{C}}^2_1+\bar{\boldsymbol{C}}^2_2$，则根据算步骤 4)，可确定出模型$(P^2_2)$的资源参数 $\bar{\boldsymbol{C}}^2_2=(\bar{C}^2_{2,1},\bar{C}^2_{2,2},\bar{C}^2_{2,3})=(3,7,1)$，进而在资源确定的情况下，求解模型$(P^2_2)$. 此时，$i=2$，$M=3$，按照算法步骤 5)，判断出 $i\neq M$，返回算法步骤 2)；在模型(P^2_2)的最优集中求解向量值函数 $\boldsymbol{F}^3_2$ 的最小值 $\boldsymbol{m}^3_2$，其中 $\boldsymbol{m}^3_2=(m^3_{2,1},m^3_{2,2},m^3_{2,3})$；在资源参数 $\bar{\boldsymbol{C}}^2_2$ 及 $\boldsymbol{m}^3_2$ 确定的情况下，根据算法步骤 3)，求解模型$(\bar{P}^3_2)$，从而得到模型$(\bar{P}^3_2)$的资源分解 $\bar{\boldsymbol{C}}^3_2=(\bar{C}^3_{2,1},\bar{C}^3_{2,2},\bar{C}^3_{2,3})=(6,4,8)$；由于 $\boldsymbol{C}^3=\bar{\boldsymbol{C}}^3_1+\bar{\boldsymbol{C}}^3_2$，因此根据算法步骤 4)，可确定出模型$(P^3_3)$的资源参数 $\bar{\boldsymbol{C}}^3_3=(\bar{C}^3_{3,1},\bar{C}^3_{3,2},\bar{C}^3_{3,3})=(10,6,2)$，进而在资源确定的情况下，求解问题$(P^3_3)$. 此时，$i=3$，$M=3$，再由算法步骤 5)，判断出 $i=M$，计算结束.

对纵向分解的模型(P_1),(P_2)和(P_3^3)进行求解，模型(P_1)的最优解为$(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14})=(0,0,0,1)$；模型$(P_2)$的最优解为$(x_{21},x_{22},x_{23},x_{24})=(0,0,0,1)$；模型$(P_3^3)$的最优解为$(x_{31},x_{32},x_{33},x_{34})=(0,0,0,1)$. 因此，模型$(P)$的最优解为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=(0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0).$$

该解与直接对模型(P)求解得到的结果一致.

综上所述，本文提出了求解具有梯形结构大系统目标规划模型的“顺次解耦算法”. 利用该算法，每次迭代只需要对规模较小的子问题进行求解，即可得到大系统问题的最优解.

参 考 文 献

[1] Shastri Y, Diwekar U. An Efficient Algorithm for Large Scale Stochastic Nonlinear Programming Problems [J]. Computers & Chemical Engineering, 2006, 30(5): 864-877.

[2] Saadouli N. Computationally Efficient Solution Algorithm for a Large Scale Stochastic Dynamic Program [J]. Procedia Computer Science, 2010, 1(1): 1397-1405.

[3] Regis R G. Stochastic Radial Basis Function Algorithms for Large-Scale Optimization Involving Expensive Black-Box Objective and Constraint Functions [J]. Computers & Operations Research, 2011, 38(5): 837-853.

[4] Anderson J, CHANG Yo-cheng, Papachristodoulou A. Model Decomposition and Reduction Tools for Large-Scale Networks in Systems Biology [J]. Automatica, 2011, 47(6): 1165-1174.

[5] ZHANG Jie, FENG Ying-jun. The Criteria of Optimal Solution on a Kind of Large Scale Goal Programming [J]. Journal of Mathematical Study, 2000, 33(2): 163-168. (张杰，冯英浚. 一类大系统目标规划问题分解算法中最优解之间的关系 [J]. 数学研究，2000, 33(2): 163-168.)

[6] ZHANG Jie, FENG Ying-jun. Existence of Effective Solution on Large Scale Multiobjective Programming with General Diagonal Structure [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2001, 33(5): 617-619. (张杰，冯英浚. 一般原方块角形结构的大系统多目标规划有效解的存在性 [J]. 哈尔滨工业大学学报，2001, 33(5): 617-619.)

[7] ZHANG Jie, WEI Cai-xia. Relations of Solutions among Subproblems on Large Scale Multiobjective Programming with Trapezoidal Structure [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(2): 237-240. (张杰，魏彩霞. 梯形结构大系统多目标规划子问题解的关系 [J]. 吉林大学学报：理学版，2010, 48(2): 237-240.)

[8] ZHANG Jie, XU Ling-min, HU Ding. Bidirectional Decomposition of Large Scale Multiobjective Programming Model with Trapezoidal Structure and Relations of Its Solutions [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2011, 49(5): 802-808. (张杰，徐玲敏，胡鼎. 具有梯形结构大系统目标规划模型的双向分解及解的关系 [J]. 吉林大学学报：理学版，2011, 49(5): 802-808.)

(责任编辑：赵立芹)