简单半序约束下多个正态总体分布参数的 Bayes 估计与等值检验

史海芳[1,2]，姬永刚[2]
（1. 吉林大学 数学研究所，长春 130012；2. 中国民航大学 理学院，天津 300300）

摘要：运用 Bayes 方法讨论多个正态总体均值与标准差比在简单半序约束下的估计问题及如下等值检验问题：H_0：$\mu_1=\cdots=\mu_k$ v. s. H_1：$\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_k$，$\mu_1<\mu_k$，并用 Gibbs 抽样和 Metropolis-Hastings 方法给出了上述问题的数值模拟.

关键词：半序约束；正态分布；Bayes 估计；Gibbs 抽样；Metropolis-Hastings 方法
中图分类号：O212.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2013)01-0001-08

Bayesian Parameter Estimation and Testing of Parameters from Normal Populations under Semi-order Restrictions

SHI Hai-fang[1,2], JI Yong-gang[2]
(1. *Institute of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *College of Sciences*, *Civil Aviation University of China*, *Tianjin* 300300, *China*)

Abstract: The authors developed a procedure for estimator of ratios of means to standard deviations from normal populations under semi-order restriction using Bayes method, and considered the testing for the equality of proportions: H_0: $\mu_1=\cdots=\mu_k$ v. s. H_1: $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_k$, $\mu_1<\mu_k$. Finally, simulation results were given by Gibbs sampling and Metropolis-Hastings method.

Key words: semi-order restriction; normal distribution; Bayes estimation; Gibbs sampling; Metropolis-Hastings method

0　引　言

考虑单向方差分析模型：

$$y_{ij}=\mu_i+\epsilon_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n_i,\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{1}$$

其中：响应变量 y_{ij} 表示第 i 种试验第 j 个个体的值；μ_i 为第 i 种试验的平均值；随机误差 ϵ_{ij} 为相互独立的服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量.

在很多实际问题中，通过一些先验信息可知总体均值满足一定的序约束. 如简单半序 $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_k$，简单树半序 $\mu_1\leqslant\mu_i(i=2,3,\cdots,k)$，伞型半序 $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_p\geqslant\mu_{p+1}\geqslant\cdots\geqslant\mu_k$ 等. 文献[1-2]给了在这些先验信息下一些感兴趣参数的估计和检验. 此外，文献[3-5]分别考虑了构造总体均值置信区间的问题. 进一步，文献[6]介绍了用 U-I(union-intersection)检验法考虑似然比检验统计量的精确分布，通过计

收稿日期：2012-06-15.
作者简介：史海芳(1981—)，女，汉族，博士研究生，从事数理统计的研究，E-mail：shihf07@mails.jlu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：J1030101).

算 p 值，解决了简单半序约束下的检验问题. 但上述的频率方法在理论上一般较复杂，实际操作不太方便. 因此，近年人们试图从 Bayes 角度考虑序约束下的估计和检验问题，如文献[7-8]分别用 Bayes 方法考虑了如下等值检验问题：

$$H_0:\mu_1=\cdots=\mu_k \text{ v. s. } H_1:\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_k,\qquad \mu_1<\mu_k;$$

文献[9]利用似然比检验考虑了模型(1)中当误差项服从 $\epsilon_{ij}\sim N(0,\sigma_i^2)$(即 $Y_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,k$)时，均值和标准差比的等值检验问题，但该方法只能处理两个总体的情况. 关于多个总体均值和标准差比在简单半序约束下的估计与等值检验问题，文献[10]用频率方法做了研究. 本文基于文献[7]的思想，扩展了文献[9]的结果，用 Bayes 方法给出了 k 个正态总体均值与标准差的比满足简单半序约束下

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{\mu_k}{\sigma_k} \tag{2}$$

的估计，同时考虑了如下等值检验问题：

$$H_0:\frac{\mu_1}{\sigma_1}=\cdots=\frac{\mu_k}{\sigma_k} \text{ v. s. } H_1:\frac{\mu_1}{\sigma_1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{\mu_k}{\sigma_k},\qquad \frac{\mu_1}{\sigma_1}<\frac{\mu_k}{\sigma_k}. \tag{3}$$

最后用 Gibbs 抽样和 Metropolis-Hastings 方法给出了数值模拟. 与非 Bayes 方法相比，Bayes 方法在处理中、小样本问题时具有很大优势. 特别地，如果拒绝原假设，根据 Bayes 方法还可以知道哪些总体均值和标准差之比是不同的.

1 Bayes 分层模型

记 $\xi_1=\dfrac{\mu_1}{\sigma_1}$，$\delta_{h-1}=\dfrac{\mu_h}{\sigma_h}-\dfrac{\mu_{h-1}}{\sigma_{h-1}}(2\leqslant h\leqslant k)$，则 $\dfrac{\mu_i}{\sigma_i}=\xi_1+\sum\limits_{h=1}^{i-1}\delta_h$. 因为 δ_h 取正数或零，受文献[7]启发，本文取 δ_h 的先验分布为如下单点分布及指数分布的混合分布：

$$[\delta_h\mid\rho_h,\theta_h]=\rho_h I(\delta_h=0)+(1-\rho_h)g(\delta_h\mid\theta_h)I(\delta_h>0),\qquad h=1,2,\cdots,k-1, \tag{4}$$

其中：$I(A)$表示 A 的示性函数；$g(\delta_h\mid\theta_h)=\dfrac{1}{\theta_h}\exp\left\{-\dfrac{\delta_h}{\theta_h}\right\}$；超参数 $\rho_h(0<\rho_h<1)$表示 $\delta_h=0$ 时的先验概率. 考虑用 Beta(α_0,β_0)作为其超先验分布. 当 $\alpha_0=\beta_0=1$ 时，该超先验为均匀分布的. 对于超参数 $\theta_h>0$，超先验分布取逆伽马分布(Inv-gamma(a_0,b_0))，其密度函数为

$$[\theta_h\mid a_0,b_0]=\frac{1}{\Gamma(a_0)(b_0)^{a_0}}\frac{\exp\{-1/(b_0\theta_i)\}}{\theta_i^{a_0+1}},\quad \theta_i>0,\quad h=1,2,\cdots,k-1. \tag{5}$$

对于 ξ_1，取共轭先验 $N(\mu_0,\tau_0^2)$作为 ξ_1 的先验分布. 对于方差 σ_i，考虑用逆伽马分布作为其先验分布.

综上，Bayes 分层模型为：

$$\begin{aligned}
&y_{ij}\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\}\sim N(\mu_i,\sigma_i),\quad i=1,2,\cdots,k;\quad j=1,2,\cdots,n_i;\\
&\delta_h\mid\rho_h,\theta_h\sim\rho_h I(\delta_h=0)+(1-\rho_h)g(\delta_h\mid\theta_h)I(\delta_h>0),\quad h=1,2,\cdots,k-1;\\
&\rho_h\mid\alpha_0,\beta_0\sim \text{Beta}(\alpha_0,\beta_0),\quad h=1,2,\cdots,k-1;\\
&\theta_h\mid a_0,b_0\sim \text{Inv-gamma}(a_0,b_0),\quad h=1,2,\cdots,k-1;\\
&\xi_1\sim N(\mu_0,\tau_0^2),\quad \sigma_i\sim\text{Inv-gamma}(a_1,b_1),\quad i=1,2,\cdots,k.
\end{aligned}$$

2 满条件后验分布

设 $Y_{ij}\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n_i)$为取自正态总体 Y_i 的一个样本，此时联合似然函数为

$$\begin{aligned}
L[\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\}]&=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left\{-\frac{(y_{ij}-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}\right]\propto\\
&\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-n_i}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu_i)^2\right\}\propto
\end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-n_i}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i s_i^2}{\sigma_i^2}+n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right]\right\}\propto$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-n_i}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i s_i^2}{\sigma_i^2}+n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)^2\right]\right\},\tag{6}$$

其中：$\overline{y}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}$；$s_i^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2$；$i=1,2,\cdots,k$.

由 Bayes 分层模型知，所有未知参数包括 $\delta_j,\rho_j,\theta_j,\xi_1,\sigma_i(j=1,2,\cdots,k-1;\ i=1,2,\cdots,k)$.

2.1　$\boldsymbol{\delta}_j$ 的满条件后验分布

由 Bayes 公式知

$$p(\delta_j\mid y,\{\sigma_i\},\rho_j,\theta_j,\xi_1,\delta_{-j})\propto p(y\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\}))\pi(\delta_j\mid\rho_j,\theta_j))\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{k}\left[n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)^2\right]\right\}(\rho_jI(\delta_j=0)+(1-\rho_j)g(\delta_j\mid\theta_j)I(\delta_j>0))\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{k}\left[n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h+\delta_j-\delta_j\right)^2\right]\right\}(\rho_jI(\delta_j=0)+(1-\rho_j)g(\delta_j\mid\theta_j)I(\delta_j>0))\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{k}\left[n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1,\ h\neq j}^{i-1}\delta_h-\delta_j\right)^2\right]\right\}(\rho_jI(\delta_j=0)+(1-\rho_j)g(\delta_j\mid\theta_j)I(\delta_j>0))\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{k}[n_i(\delta_j^{\ 2}-2d_i\delta_j)]\right\}(\rho_jI(\delta_j=0)+(1-\rho_j)g(\delta_j\mid\theta_j)I(\delta_j>0))\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=j+1}^{k}n_i\delta_j^{\ 2}-2\sum_{i=j+1}^{k}n_id_i\delta_j\right]\right\}\left(\rho_jI(\delta_j=0)+(1-\rho_j)\frac{1}{\theta_h}\exp\left\{-\frac{\delta_h}{\theta_h}\right\}I(\delta_j>0)\right),$$

其中：$\delta_{-j}=(\delta_1,\cdots,\delta_{j-1},\delta_{j+1},\cdots,\delta_k)$；$d_i=\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1,\ h\neq j}^{i-1}\delta_h$；$j+1\leqslant i\leqslant k$.

因此，给定 $y,\{\sigma_i\},\rho_j,\theta_j,\xi_1,\delta_{-j}$ 下，δ_j 的满条件后验分布是一个混合分布：

$$c\rho_jh(\delta_j)I(\delta_j=0)+c(1-\rho_j)\frac{1}{\theta_j}h(\delta_j)I(\delta_j>0),$$

其中

$$h(\delta_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(f_j^{\ -1})}}\exp\left\{-\frac{1}{2f_j^{\ -1}}\left(\delta_j-\frac{e_j-I(\delta_j>0)/\theta_j}{f_j}\right)^2\right\}\exp\left\{\frac{(e_j-I(\delta_j>0)/\theta_j)^2}{2f_j}\right\};\tag{7}$$

此外 $f_j=\sum_{i=j+1}^{k}n_i$，$e_j=\sum_{i=j+1}^{k}n_id_i$，$c=\dfrac{1}{\rho_jh(0)+(1-\rho_j)\theta_j^{\ -1}\int_0^{\infty}h(\delta_h)\mathrm{d}\delta_h}$.

易见，给定 $y,\{\sigma_i\},\rho_j,\theta_j,\xi_1,\delta_{-j}$ 下，δ_j 的满条件后验分布是单点分布和截断正态分布 $N\left(\frac{e_j-\theta_j^{\ -1}}{f_j},\frac{1}{f_j}\right)$的混合.

2.2　$\boldsymbol{\xi}_1$ 的满条件后验分布

由 Bayes 公式知

$$p(\xi_1\mid y,\{\delta_h\},\{\sigma_i\},\mu_0,\tau_0^2)\propto p(y\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\})\pi(\xi_1\mid\mu_0,\tau_0^2)\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)^2\right\}\exp\left\{-\frac{(\xi_1-\mu_0)^2}{2\tau_0^2}\right\}\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i\left[\xi_1^2-2\xi_1\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)\right]\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_0^2}\xi_1^2-\frac{2\mu_0}{\tau_0^2}\xi_1\right)\right\}\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\tau_0^2}+\sum_{i=1}^{k}n_i\right)\xi_1^2-2\left[\frac{\mu_0}{\tau_0^2}+\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)\right]\xi_1\right]\right\}=$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(a\xi_1^2-2b\xi_1)\right\}\propto\exp\left\{-\frac{1}{2a^{-1}}\left(\xi_1-\frac{b}{a}\right)^2\right\},$$

其中：$a=(\tau_0^2)^{-1}+\sum_{i=1}^{k}n_i$；$b=\mu_0(\tau_0^2)^{-1}+\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)$.

因此易得 ξ_1 的满条件后验分布是正态分布 $N(\dot{\mu},\dot{\sigma}^2)$，其中：$\dot{\mu}=\frac{b}{a}$；$\dot{\sigma}^2=\frac{1}{a}$.

2.3 $\boldsymbol{\rho_i}$ 的满条件后验分布

由 Bayes 公式知

$$\begin{aligned}p(\rho_i\mid y,\xi_1,\{\delta_h\},\{\sigma_i\},\theta_i,\alpha_0,\beta_0)\propto{}& p(y\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\})p(\delta_i\mid\rho_i,\theta_i)\pi(\rho_i\mid\alpha_0,\beta_0)\propto\\ & p(\delta_i\mid\rho_i,\theta_i)\pi(\rho_i\mid\alpha_0,\beta_0)\propto\\ &(\rho_iI(\delta_i=0)+(1-\rho_i)g(\delta_i\mid\theta_i)I(\delta_i>0))\rho_i^{\alpha_0-1}(1-\rho_i)^{\beta_0-1}=\\ &\rho_i^{\alpha_0}(1-\rho_i)^{\beta_0-1}I(\delta_i=0)+\frac{1}{\theta_i}\exp\left\{-\frac{\delta_i}{\theta_i}\right\}\rho_i^{\alpha_0-1}(1-\rho_i)^{\beta_0}I(\delta_i>0).\end{aligned}$$

ρ_i 的满条件后验分布可以记作

$$\rho_i\mid\cdot\sim\begin{cases}\mathrm{Beta}(\alpha_0+1,\beta_0), & \delta_i=0,\\ \mathrm{Beta}(\alpha_0,\beta_0+1), & \delta_i>0.\end{cases}$$

当 $\alpha_0=\beta_0=1$ 时，有

$$\rho_i\mid\cdot\sim\begin{cases}\mathrm{Beta}(2,1), & \delta_i=0,\\ \mathrm{Beta}(1,2), & \delta_i>0.\end{cases}$$

2.4 $\boldsymbol{\theta_i}$ 的满条件后验分布

由 Bayes 公式知

$$\begin{aligned}&p(\theta_i\mid y,\xi_1,\{\delta_h\},\{\sigma_i\},\rho_i,a_0,b_0)\propto\\ &\quad p(y\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\})p(\delta_i\mid\rho_i,\theta_i)\pi(\theta_i\mid a_0,b_0)\propto p(\delta_i\mid\rho_i,\theta_i)\pi(\theta_i\mid a_0,b_0)=\\ &\quad(\rho_iI(\delta_i=0)+(1-\rho_i)g(\delta_i\mid\theta_i)I(\delta_i>0))\frac{1}{\Gamma(a_0)b_0^{a_0}}\frac{\exp\{-1/(b_0\theta_i)\}}{\theta_i^{a_0+1}}=\\ &\quad\rho_i\frac{1}{\Gamma(a_0)b_0^{a_0}}\frac{\exp\{-1/(b_0\theta_i)\}}{\theta_i^{a_0+1}}I(\delta_i=0)+\\ &\quad(1-\rho_i)\frac{1}{\Gamma(a_0)b_0^{a_0}}\frac{\exp\{-\theta_i^{-1}(\delta_i+1/b_0)\}}{\theta_i^{a_0+2}}I(\delta_i>0).\end{aligned}$$

θ_i 的满条件后验分布可以记作

$$\theta_i\mid\cdot\sim\begin{cases}\mathrm{Inv\text{-}gamma}(a_0,b_0), & \delta_i=0,\\ \mathrm{Inv\text{-}gamma}(a_0+1,(\delta_i+1/b_0)^{-1}), & \delta_i>0.\end{cases}$$

2.5 $\boldsymbol{\sigma_i}$ 的满条件后验分布

由 Bayes 公式，有

$$\begin{aligned}&p(\sigma_i\mid y,\xi_1,\{\delta_h\})\propto p(y\mid\xi_1,\{\sigma_i\},\{\delta_h\})p(\sigma_i\mid a_1,b_1)\propto\\ &\quad\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-n_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_is_i^2}{\sigma_i^2}+n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}-\xi_1-\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)^2\right]\right\}p(\sigma_i\mid a_1,b_1)\propto\\ &\quad\sigma_i^{-n_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n_is_i^2}{\sigma_i^2}+n_i\left(\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}\right)^2-2n_i\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i}\left(\xi_1+\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)\right]\right\}\frac{\exp\{-1/(b_1\sigma_i)\}}{\sigma_i^{a_1+1}}=\\ &\quad\sigma_i^{-(n_i+a_1+1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n_is_i^2+n_i\overline{y}_i^2)\frac{1}{\sigma_i^2}+\left[n_i\overline{y}_i\left(\xi_1+\sum_{h=1}^{i-1}\delta_h\right)-\frac{1}{b_1}\right]\frac{1}{\sigma_i}\right\}.\end{aligned}$$

显然，σ_i 的满条件后验不是一个常见分布，所以本文用 Metropolis-Hastings 方法给出 σ_i 的数值模拟.

3 数值模拟

3.1 Gibbs 抽样

Gibbs 抽样步骤如下：

1）给定初值 $\mu_i^{(0)},\sigma_i^{(0)},\rho_j^{(0)},\theta_j^{(0)}$，再由 $\xi_1^{(0)}=\frac{\mu_1^{(0)}}{\sigma_1^{(0)}}$，$\delta_j^{(0)}=\frac{\mu_{j+1}^{(0)}}{\sigma_{j+1}^{(0)}}-\frac{\mu_j^{(0)}}{\sigma_j^{(0)}}$ 给出 $\xi_1^{(0)},\delta_j^{(0)}$，其中：$1\leqslant i\leqslant k$；$1\leqslant j\leqslant k-1$.

2）① 先通过下式计算 f_j 和 e_j：

$$f_j=\sum_{i=j+1}^{k}n_i,\qquad e_j^{(t)}=\sum_{i=j+1}^{k}n_id_i^{(t-1)},$$

其中：$d_i^{(t-1)}=\frac{\overline{y}_i}{\sigma_i^{(t-1)}}-\xi_1^{(t-1)}-\sum_{h=1,\,h\neq j}^{i-1}\delta_h^{(t-1)}$. 然后计算 $\delta_j^{(t)}=0$ 的满条件后验概率(记作 $\lambda_j^{(t)}$)($1\leqslant j\leqslant k-1$)：

$$\lambda_j^{(t)}=\Pr(\delta_j^{(t)}=0\,|\,\cdot)=\frac{\rho_j^{(t-1)}h(0;f_j,e_j^{(t)})}{\rho_j^{(t-1)}h(0;f_j,e_j^{(t)})+(1-\rho_j^{(t-1)})(1/\theta_j^{(t-1)})\int_0^{\infty}h(\delta_j^{(t-1)};f_j,e_j^{(t)},\theta_j^{(t-1)})\mathrm{d}\delta_j^{(t-1)}},$$

其中，$h(\cdot)$的定义同式(7). 最后，以成功概率 $\lambda_j^{(t)}$ 抽取 Bernoulli 样本 $B_j^{(t)}$，即 $\Pr(B_j^{(t)}=1)=\lambda_j^{(t)}$. 如果$B_j^{(t)}=1$，则令 $\delta_j^{(t)}=0$；如果 $B_j^{(t)}=0$，则样本($\delta_j^{(t)}\,|\,\cdot$)来自于均值为$\frac{e_j^{(t)}-\theta_j^{-(t-1)}}{f_j}$、方差为$\frac{1}{f_j}$的截断正态分布($0<\delta_j^{(t)}<\infty$).

② 用 Metropolis-Hastings 方法给出 $\sigma_i^{(t)}$($1\leqslant i\leqslant k$)的样本，再分别由其满条件后验概率分布得到样本 $\xi_1^{(t)},\rho_j^{(t)},\theta_j^{(t)}$($1\leqslant j\leqslant k-1$). 最后，通过 $\xi_1^{(t)},\sigma_i^{(t)}$ 得到 $\mu_i^{(t)}$.

重复步骤 2)即可得到一组样本 $\xi_1^{(t)},\sigma_i^{(t)},\delta_j^{(t)},\rho_j^{(t)},\theta_j^{(t)}$($1\leqslant i\leqslant k$；$1\leqslant j\leqslant k-1$；$t=1,2,\cdots$).

Metropolis-Hastings 方法给出 $\sigma_i^{(t)}$($1\leqslant i\leqslant k$)样本的步骤如下：

1）给定初值 $\sigma_i^{(0)}$.

2）① σ_i 的建议分布假设为对数正态分布 $LN(\mu(\sigma_i^{(t-1)}),\nu(\sigma_i^{(t-1)}))$，即

$$J_t(\sigma_i^*\,|\,\sigma_i^{(t-1)})=\frac{1}{\sigma_i^*\sqrt{2\pi}\,\nu(\sigma_i^{(t-1)})}\exp\left\{-\frac{(\ln\sigma_i^*-\mu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}{2(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}\right\}.$$

一般地，假设 $E(\sigma_i^*\,|\,\sigma_i^{(t-1)})=\sigma_i^{(t-1)}$，$\mathrm{Var}(\sigma_i^*\,|\,\sigma_i^{(t-1)})=1$，即

$$\begin{cases}\exp\left\{\mu(\sigma_i^{(t-1)})+\frac{1}{2}(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2\right\}=\sigma_i^{(t-1)},\\ \exp\{2\mu(\sigma_i^{(t-1)})+(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2\}(\exp\{(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2\}-1)=1,\end{cases}\tag{8}$$

解方程组(8)得

$$\begin{cases}\mu(\sigma_i^{(t-1)})=\ln\sigma_i^{(t-1)}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{(\sigma_i^{(t-1)})^2}+1\right),\\ \nu(\sigma_i^{(t-1)})=\sqrt{\ln\left(\frac{1}{(\sigma_i^{(t-1)})^2}+1\right)}.\end{cases}$$

② 计算 r.

$$r=\frac{p(\sigma_i^*\,|\,y,\xi_1,\{\delta_h\})/J_t(\sigma_i^*\,|\,\sigma_i^{(t-1)})}{p(\sigma_i^{(t-1)}\,|\,y,\xi_1,\{\delta_h\})/J_t(\sigma_i^{(t-1)}\,|\,\sigma_i^*)}\propto$$

$$\frac{(\sigma_i^*)^{-(n_i+a_1+1)}\exp\left\{c_1\frac{1}{(\sigma_i^*)^2}+c_2\frac{1}{\sigma_i^*}\right\}\frac{1}{\sigma_i^{(t-1)}\nu(\sigma_i^*)}\exp\left\{-\frac{(\ln\sigma_i^{(t-1)}-\mu(\sigma_i^*))^2}{2(\nu(\sigma_i^*))^2}\right\}}{(\sigma_i^{(t-1)})^{-(n_i+a_1+1)}\exp\left\{c_1\frac{1}{(\sigma_i^{(t-1)})^2}+c_2\frac{1}{\sigma_i^{(t-1)}}\right\}\frac{1}{\sigma_i^*\nu(\sigma_i^{(t-1)})}\exp\left\{-\frac{(\ln\sigma_i^*-\mu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}{2(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}\right\}}=$$

$$\left(\frac{\sigma_i^{(t-1)}}{\sigma_i^*}\right)^{(n_i+a_1+1)}\frac{\sigma_i^*\nu(\sigma_i^{(t-1)})}{\sigma_i^{(t-1)}\nu(\sigma_i^*)}\times$$

$$\exp\left\{c_1\left(\frac{1}{(\sigma_i^*)^2}-\frac{1}{(\sigma_i^{(t-1)})^2}\right)+c_2\left(\frac{1}{\sigma_i^*}-\frac{1}{\sigma_i^{(t-1)}}\right)+\frac{(\ln\sigma_i^*-\mu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}{2(\nu(\sigma_i^{(t-1)}))^2}-\frac{(\ln\sigma_i^{(t-1)}-\mu(\sigma_i^*))^2}{2(\nu(\sigma_i^*))^2}\right\}.$$

③ 从(0,1)上的均匀分布抽取一随机数 u：

$$\begin{cases}\sigma_i^{(t)}=\sigma_i^*,&u\leqslant r,\\ \sigma_i^{(t)}=\sigma_i^{(t-1)},&u>r.\end{cases}$$

重复步骤2)即可得到一组样本 $\sigma_i^{(t)}(1\leqslant i\leqslant k;\ t=1,2,\cdots)$.

3.2 数值模拟

下面通过数值模拟检验本文的方法. 考虑总体个数 $k=4$ 时的情况, 已知 $\delta_j=\mu_{j+1}/\sigma_{j+1}-\mu_j/\sigma_j$, $j=1,2,3$. 共模拟4组总体. 为方便, 令每组总体中均值和标准差比的间隔 δ_j 都分别相等, 分别为0.5,0.75,1,1.25. 因此产生如下4组数据:

$$Y_1\sim N(0,1),\quad Y_2\sim N(0.5,1),\quad Y_3\sim N(1,1),\quad Y_4\sim N(1.5,1);$$
$$Y_1\sim N(0,1),\quad Y_2\sim N(0.75,1),\quad Y_3\sim N(1.5,1),\quad Y_4\sim N(2.25,1);$$
$$Y_1\sim N(0,1),\quad Y_2\sim N(1,1),\quad Y_3\sim N(2,1),\quad Y_4\sim N(3,1);$$
$$Y_1\sim N(0,1),\quad Y_2\sim N(1.25,1),\quad Y_3\sim N(2.5,1),\quad Y_4\sim N(3.75,1).$$

为考察本文方法在中小样本时的表现, 取样本容量分别为 $n=10,20,30,40,50,100$, 对每个样本值重复200次. 由于Gibbs抽样速度很快, 每次产生20 000个Gibbs样本, 前10 000个被丢弃, 后10 000个样本用来估计参数值. 在每次迭代中记录 $\delta_j=0$ 的频率用来近似 $\Pr(\delta_j=0\,|\,Y)$, 如果 $\Pr(\delta_j=0\,|\,Y)>0.5$, 则 $\mu_j/\sigma_j=\mu_{j+1}/\sigma_{j+1}$, 否则 $\mu_j/\sigma_j<\mu_{j+1}/\sigma_{j+1}$. 对于 ξ_1 先验分布中的超参数 τ_0^2, 通常取较大的数, 从而使得 ξ_1 接近于无信息先验, 在本文模拟中, 取 $\mu_0=0$, $\tau_0^2=100$. 同理, 为了使 θ_i 和 σ_i 的先验接近于无信息先验, 取 $a_0=a_1=2.2$, $b_0=b_1=0.05$. 表1列出了重复200次后检验问题(3)的势. 由表1可见, 对于 δ_j 4种不同的情况, 通常检验势随样本个数的增加而增加, 随着间隔 δ_j 的增大检验的势也增大. 当 $\delta=1.25$ 时, 样本个数达到十几个时检验的效果较好. 进一步, 当 δ_j 极小时, 则需要更多的样本保证检验的准确性.

表1 不同样本数下检验问题(3)的势

Table 1 Power of the test problem (3) with different samples

n	δ_j			
	0.5	0.75	1	1.25
10	0.005 0	0.010 0	0.130 0	0.490 0
11	0.005 0	0.040 0	0.215 0	0.635 0
12	0.005 0	0.120 0	0.435 0	0.780 0
13	0.030 0	0.220 0	0.550 0	0.850 0
14	0.040 0	0.280 0	0.710 0	0.920 0
15	0.040 0	0.400 0	0.750 0	0.955 0
16	0.100 0	0.485 0	0.865 0	0.965 0
17	0.140 0	0.550 0	0.925 0	0.975 0
18	0.120 0	0.695 0	0.950 0	0.995 0
19	0.225 0	0.685 0	0.975 0	0.995 0
20	0.295 0	0.825 0	0.990 0	1.000 0
30	0.795 0	0.985 0	1.000 0	1.000 0
40	0.970 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
50	0.975 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
100	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

表2～表4分别列出了一次抽样中参数的估计值和 $\delta_j=0$ 的后验概率, 其中Bayes估计是本文方法给出的估计, Frequentist估计是利用文献[10]中频率方法得到的参数估计值. 由表2可见, 对于参数 δ_1, δ_2 和 δ_3, 当 $n=30,100$ 时, 本文方法都给出了比频率方法更精确的估计. 尽管当 $n=30$ 时, 频率方法给出的参数 ξ 估计值比本文方法更接近真值, 但当 $n=100$ 时, 本文方法给出的估计值更接近真值. 由表3可见, 本文方法给出的参数 ξ, δ_1, δ_3 估计值优于频率方法给出的估计值, 但对于参数 δ_2, 频率方法给出了比本文方法更精确的估计. 由表4可见, 只有参数 δ_1 当 $n=30$ 时和参数 δ_3 当 $n=100$ 时, 频率方法优于本文方法, 其他情况都是本文方法优于频率方法. 总之, 两种方法给出的估计值类似, 都与真值很接近. 对于检验问题(3), 从表中数据可见应用本文给出的Bayes方法得到的结果较理想. 其中在表3中, 尽管当间隔 δ_j 较小且样本量不大($n=30$)时出现了与实际不符的检验结果

($P(\delta_2=0|Y)=0.6117$)，但随着样本的增多或间隔的增大(表 4)，从后验概率都小于 0.5 易见 4 个正态总体均值与标准差比都不同. 这主要是由于间隔较小时很难正确识别出所有不同的均值和标准差的比.

表 2　当 $\boldsymbol{\mu}=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$ 时一次抽样中参数的估计值和 $\boldsymbol{\delta}_j=0$ 的后验概率

Table 2　Parameter estimations and posterior probability of $\boldsymbol{\delta}_j=0$ for one sampling when $\boldsymbol{\mu}=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$

n	估　计	参　数				后验概率		
		ξ	δ_1	δ_2	δ_3	$P(\delta_1=0\|Y)$	$P(\delta_2=0\|Y)$	$P(\delta_3=0\|Y)$
30	Bayes	0.764 9	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.991 7	0.991 2	0.984 8
	Frequentist	0.919 3	0.000 0	0.065 3	0.218 8			
100	Bayes	1.017 3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.996 8	0.996 2	0.994 1
	Frequentist	1.120 6	0.000 0	0.000 0	0.008 3			

表 3　当 $\boldsymbol{\mu}=(0,1,2,3)$，$\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$ 时一次抽样中参数的估计值和 $\boldsymbol{\delta}_j=0$ 的后验概率

Table 3　Parameter estimations and posterior probability of $\boldsymbol{\delta}_j=0$ for one sampling when $\boldsymbol{\mu}=(0,1,2,3)$, $\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$

n	估　计	参　数				后验概率		
		ξ	δ_1	δ_2	δ_3	$P(\delta_1=0\|Y)$	$P(\delta_2=0\|Y)$	$P(\delta_3=0\|Y)$
30	Bayes	−0.064 9	0.906 6	0.000 0	1.509 0	0.200 1	0.611 7	0.181 3
	Frequentist	−0.222 4	1.108 3	0.803 3	1.934 1			
100	Bayes	−0.200 2	1.053 0	0.771 5	1.027 8	0.000 0	0.002 8	0.002 1
	Frequentist	−0.217 3	1.143 3	0.823 1	1.182 8			

表 4　当 $\boldsymbol{\mu}=(0,2,4,6)$，$\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$ 时一次抽样中参数的估计值和 $\boldsymbol{\delta}_j=0$ 的后验概率

Table 4　Parameter estimations and posterior probability of $\boldsymbol{\delta}_j=0$ for one sampling when $\boldsymbol{\mu}=(0,2,4,6)$, $\boldsymbol{\sigma}=(1,1,1,1)$

n	估　计	参　数				后验概率		
		ξ	δ_1	δ_2	δ_3	$P(\delta_1=0\|Y)$	$P(\delta_2=0\|Y)$	$P(\delta_3=0\|Y)$
30	Bayes	0.063 8	1.470 1	1.850 6	2.212 8	0.000 0	0.045 1	0.173 1
	Frequentist	0.075 3	1.710 8	2.382 8	3.206 5			
100	Bayes	−0.088 1	1.928 5	2.091 7	1.720 1	0.000 0	0.000 0	0.091 3
	Frequentist	−0.094 9	2.114 2	2.271 7	1.954 5			

进一步，当原假设成立时，本文对犯第一类错误的概率进行了模拟，结果列于表 5. 考虑 4 组总体，数据按如下总体产生：

$$Y_1 \sim N(1,\sigma_1^2),\quad Y_2 \sim N(1,\sigma_2^2),\quad Y_3 \sim N(1,\sigma_3^2),\quad Y_4 \sim N(1,\sigma_4^2),$$

其中 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ 分别取(1,1,1,1),(3,3,3,3),(6,6,6,6),(10,10,10,10).

表 5　不同样本数和方差下犯第一类错误的概率

Table 5　Type Ⅰ errors for different samples and variances

n	σ			
	1	3	6	10
10	0.000 0	0.005 0	0.005 0	0.010 0
20	0.000 0	0.005 0	0.000 0	0.000 0
30	0.000 0	0.000 0	0.010 0	0.005 0
40	0.000 0	0.005 0	0.000 0	0.005 0
50	0.005 0	0.000 0	0.005 0	0.000 0
100	0.005 0	0.000 0	0.010 0	0.005 0

由表 5 可见，本文方法能很好地控制犯第一类错误的概率，甚至当标准差很大($\sigma=10$)时，犯第一类错误的概率仍然很小，因此本文方法是一个相对保守的方法. 此外，在表 5 中，当 $\sigma=(1,1,1,1)$时似乎随着样本量的增加犯第一类错误的概率也增加，为了检验这一结论本文做了很多模拟，结果显示当 $n=49$ 时，犯第一类错误的概率为 0.005 0，当 $n=60,70,80,90,110,120$ 时，犯第一类错误的概率

均为0，因此，并不存在犯第一类错误的概率随样本量增加而增大的趋势. 当间隔δ不是太小时，本文的Bayes方法在处理检验问题(3)时，在控制犯第一类错误很小的同时，也能达到一个合理的检验势.

参　考　文　献

[1] Robertson T, Wright F T, Dykstra R L. Order Restricted Statistical Inference [M]. New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 1988.

[2] Silvapulle M J, Sen P K. Constrained Statistical Inference: Inequality, Order and Shape Restrictions [M]. New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 2005.

[3] Hayter A J. A One-Sided Studentized Range Test for Testing against a Simple Order Alternative [J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85(411): 778-785.

[4] LIU Lin. Simultaneous Statistical Inference for Monotone Dose-Response Means [D]. Newfoundlan: Memorial Universtiy of Newfoundland, 2001.

[5] LIU Lin, Lee C C, PENG Jian-an. Max-Min Multiple Comparison Procedure for Isotonic Dose-Response Curves [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2002, 107(1/2): 133-141.

[6] 史宁中. 统计检验的理论与方法 [M]. 北京：科学出版社，2008.

[7] SHANG Jun-feng, Cavanaugh J E, Wright F T. A Bayesian Multiple Comparison Procedure for Order-Restricted Mixed Models [J]. International Statistical Review, 2008, 76(2): 268-284.

[8] Oh M S, Shin D W. A Unified Bayesian Inference on Treatment Means with Order Constraints [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2011, 55(1): 924-934.

[9] Chou Y M, Owen D B. A Likelihood Ratio Test for the Equality of Proportions of Two Normal Populations [J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 1991, 20(8): 2357-2374.

[10] LI Shu-you, SHI Ning-zhong, ZHANG Bao-xue. Testing Ratios of Means to Standard Deviations from Normal Populations under Order Restrictions with Generalized p-Values [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2009, 25(1): 77-85. (李树有，史宁中，张宝学. 正态总体均值与标准差比在序约束下的广义p-值检验 [J]. 应用概率统计，2009，25(1)：77-85.)

(责任编辑：赵立芹)

欢迎订阅2013年《吉林大学学报(理学版)》

《吉林大学学报(理学版)》(原刊名为《吉林大学自然科学学报》)是由教育部主管、吉林大学主办的国家级中文综合性科学技术类核心期刊。以交流学术思想、推动科学研究、促进科教兴国和学校发展为办刊宗旨；以新(选题新，发表成果创新性强)、快(编辑出版速度快)、高(刊文学术水平和编辑出版质量高)为办刊特色；以研究论文、研究快报、研究简报和综合评述等形式报道吉林大学自然科学领域的基础研究、应用研究和开发研究中所取得的创新性研究成果。刊发国家重大科技项目和国家自然科学基金项目及各省和部委基金项目的文章数量逐年增加，其中有许多成果获得较大的社会效益和经济效益。本刊目前已被国内外20多种数据库和文摘刊物收录，国外的有：英国《科学文摘》(SA)，美国《数学评论》(MR)，美国《化学文摘》(CA)，俄罗斯《文摘杂志》(AJ of VINITI)，德国《数学文摘》(Zbl Math)，美国《剑桥科学文摘：材料信息》(CSA：MI)。

本刊2001年被选入“中国期刊方阵(双百期刊)”。在吉林省、教育部及全国优秀科技期刊评比中共获奖20次，其中获吉林省优秀科技期刊一等奖和十佳期刊共6次，教育部全国高校自然科学优秀学报一等奖等奖项共12次，全国优秀科技期刊评比二等奖2次。2008年和2011年连续两次被评为“中国精品科技期刊”；2009年获全国高校科技期刊优秀编辑质量奖，并被吉林省新闻出版局评为自然科学类“吉林名刊”；2008年～2010年连续3次获“中国科技论文在线优秀期刊”一等奖；2010年获教育部“第三届中国高校优秀科技期刊”奖；2011年获“中国科技论文在线优秀期刊”二等奖。

2013年《吉林大学学报(理学版)》为双月刊，16开本，国内定价25元，公开发行，刊号：ISSN 1671-5489，CN 22-1340/O；邮发代号：12-19(国内)，BM304(国外)。国内读者请在邮局订购，国外读者请通过中国国际图书贸易集团有限公司订购，补订者可直接与本刊编辑部联系。

编辑部地址：长春市南湖大路5372号吉林大学南湖校区，邮编：130012；电话(传真)：0431-88499428；E-mail：sejuj@mail.jlu.edu.cn；http://xuebao.jlu.edu.cn/lxb。