

文章编号: 1000-4750(2013)06-0162-06

组合梁界面滑移的计算分析

曾兴贵, 周东华, 李龙起, 郑文莉, 曾德光

(昆明理工大学建筑工程学院, 云南, 昆明 650500)

摘 要: 钢-混凝土组合梁(以下简称组合梁)的界面滑移总是存在的, 滑移的存在会降低组合梁的组合作用和刚度, 增大挠度, 要计算组合梁界面的滑移及挠度, 对于简支梁在简单荷载情况下, 还可得到解析解, 但对于连续梁要得到解析解是十分困难的, 另外简支梁的解析解十分冗长, 实际运用十分不便。用有限元法计算组合梁的滑移和挠度将是很有用的, 不受荷载及支撑条件限制, 而有限元法的关键是单元刚度矩阵, 该文用虚功原理推导了组合梁的单元刚度矩阵, 并用自编的有限元程序对组合梁的滑移和挠度进行了计算, 在简支情况下与解析解进行了对比和验证, 误差很小, 在 1%以内。该文推导的单元刚度矩阵可用于小型的自编有限元软件, 为快速经济地解决相关的大量实际工程问题奠定了基础。

关键词: 组合梁; 有限元; 单元刚度矩阵; 剪切连接; 界面滑移

中图分类号: TU398.9 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.01.0053

CALCULATION AND ANALYSIS OF INTERFACE SLIP OF COMPOSITE BEAMS

ZENG Xing-gui, ZHOU Dong-hua, LI Long-qi, ZHENG Wen-li, ZENG De-guang

(Construction Engineering College, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract: Interface slip always exists in steel-concrete composite beams (hereinafter referred to as composite beams), it will also reduce composite effect and stiffness and increase deflection of composite beams. If the interface slip and deflection are to be calculated, closed solutions can be only obtained for simple cases, such as for simply supported beams with simple load cases. For a continuous beam it is difficult to obtain a closed solution. Moreover the closed solutions are often too long and too complicate for application. With the finite element method, it is efficient to calculate the interface slip and deflection and there is no restriction of loads and supports. The key step for the finite element method is establishing an element stiffness matrix, which is derived in this paper by using the principle of virtual work. In addition the interface slip and deflection of a simple supported composite beam is calculated by using the finite element program designed by the auther and the results are compared with those of the closed solutions. It shows a good agreement and the difference of both results is small and within 1%. Thus the element stiffness matrix derived in the paper is correct and can be used in the finite element program for solving a large number of practical engineering problems.

Key words: composite beams; finite element; element stiffness matrix; shear connection; interface slip

通常情况下, 组合梁的界面剪切连接在荷载作用下均属于弹性剪切连接(半刚性剪切连接), 而无

剪切连接与刚性剪切连接只是弹性剪切连接的两个极端, 组合梁在实际受力中都有滑移的存在, 而

收稿日期: 2012-01-17; 修改日期: 2012-02-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(50778086); 教育部博士点基金项目(20095314110008); 云南省自然科学基金项目(2006E0024M)

通讯作者: 曾兴贵(1982—), 男, 福建人, 硕士生, 主要从事结构工程研究(E-mail: zxg821004@yahoo.com.cn).

作者简介: 周东华(1957—), 男, 云南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事混凝土结构、组合结构、钢结构研究(E-mail: stahlverbundbau@yahoo.com.cn);

李龙起(1986—), 男, 山东人, 博士生, 主要从事组合结构研究(E-mail: lilongqiqingdao@sina.com);

郑文莉(1985—), 女, 云南人, 硕士生, 主要从事结构工程研究(E-mail: 66143517@qq.com);

曾德光(1984—), 男, 河南人, 硕士生, 主要从事结构工程研究(E-mail: zengdeguang@gmail.com).

滑移的存在又会降低组合梁的组合作用和刚度，增大梁的挠度。组合梁界面滑移及挠度等的计算受截面形状、荷载形式、约束条件等的影响，只有在简单的荷载与支撑条件下才可得到解析解，另外所得到的解析式也很复杂和冗长，不便于实际运用。对于超静定情况，如连续梁，要得到相应的解析解是非常困难的，至今也未见到相关的报道。

目前大多数是采用大型商用软件(如 ANSYS、ABACUS 等)进行计算，而购置这样的大型商用软件费用高昂，若采用解析解，只能解决荷载作用极为简单的情况，面对这一尴尬局面，本文作者用虚功原理推导了组合梁单元的刚度矩阵，为自编相关的有限元软件奠定了基础，有限元中的总刚的形成及线性方程组的求解相对较简单，这样便可自编有限元软件来方便地解决工程中大量的实际问题。

1 单元刚度矩阵的计算

1.1 组合梁单元刚度矩阵计算的假设条件^[1]

- 1) 混凝土为线弹性，不考虑混凝土开裂；
- 2) 混凝土板和钢梁的曲率相同，连接界面不出现分离，但可有滑移；
- 3) 忽略混凝土板中配置钢筋的作用。

1.2 位移模式的选取

组合梁是由混凝土板和钢梁通过剪切连接件连接而成的，混凝土板和钢梁的受力和变形类似于梁单元，连接件类似于弹簧单元，为了要得到统一的组合梁单元变形模型，需根据组合梁的变形特点确定其单元节点的自由度，由假设条件 2 可知上、下梁单元具有相同的挠度和转角，但有不同的水平位移，这样组合梁单元的节点独立的自由度变为 4 个 u_c 、 u_s 、 w 、 θ ，如图 1 所示，而普通梁单元的独立自由度为 3 个 u 、 w 、 θ 。界面的滑移不仅与上、下梁单元的轴向位移有关，还和其转角有关。

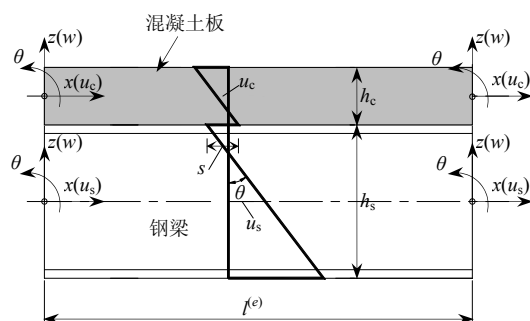


图 1 位移模式简图

Fig.1 The sketch of displacement mode

由图 1 可知组合梁单元节点位移向量为：

$$\mathbf{a}^{(e)} = \{u_{cl}^{(e)}, u_{sl}^{(e)}, w_1^{(e)}, \theta_1^{(e)}, u_{cr}^{(e)}, u_{sr}^{(e)}, w_r^{(e)}, \theta_r^{(e)}\}^T \quad (1)$$

其中下标中 l 和 r 分别表示单元的左端和右端。

从图 1 可知混凝土板截面上任一点的轴向位移：

$$\bar{u}_c = u_c - z_c \theta \quad (2)$$

同理钢梁截面上任一点的轴向位移：

$$\bar{u}_s = u_s - z_s \theta \quad (3)$$

因而混凝土板 ($z_c = -h_c / 2$) 与钢梁 ($z_s = h_s / 2$) 之间的界面滑移为：

$$s = \bar{u}_c - \bar{u}_s = u_c - u_s + \theta d \quad (4)$$

式中， $d = (h_c + h_s) / 2$ 。

因此，单元左右端界面滑移采用向量表示为：

左端：

$$\mathbf{s}_l^{(e)} = u_{cl}^{(e)} - u_{sl}^{(e)} + \theta_1^{(e)} \cdot d = \{1, -1, 0, d, 0, 0, 0, 0\} \mathbf{a}^{(e)} = \{\mathbf{B}_{kl}^{(e)}\}^T \mathbf{a}^{(e)} \quad (5)$$

右端：

$$\mathbf{s}_r^{(e)} = u_{cr}^{(e)} - u_{sr}^{(e)} + \theta_r^{(e)} \cdot d = \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, d\} \mathbf{a}^{(e)} = \{\mathbf{B}_{kr}^{(e)}\}^T \mathbf{a}^{(e)} \quad (6)$$

$\{\mathbf{B}_{kl}^{(e)}\}$ 和 $\{\mathbf{B}_{kr}^{(e)}\}$ 是单元两端弹簧的几何矩阵。

在节点自由度数目确定后，单元的位移模式自然也就确定下来，轴向位移和挠度分别选用线性和三次函数^[2-7]，各自分别有 2 个和 4 个待定常数，即单元的节点位移，下面就分别对梁单元的轴向位移和挠度进行推导。

1) 轴向位移函数。

混凝土板与钢梁中任意一点的 u_c 、 u_s 采用拉格朗日线性插值函数，即形函数向量 $N_i^{(e)}(\xi)$ 与节点位移向量 $\mathbf{a}_n^{(e)}$ 的点积，其相对坐标(即无量纲坐标)的形式为：

$$u(\xi)^{(e)} = N_i^{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_n^{(e)} = \{N_1^{(e)}(\xi), N_2^{(e)}(\xi)\} \cdot \{u_1^{(e)}, u_r^{(e)}\}^T \quad (7)$$

式中， $\{N_1^{(e)}(\xi), N_2^{(e)}(\xi)\} = \{(1-\xi)/2, (1+\xi)/2\}$ 。

由此，混凝土板和钢梁的轴向位移函数分别为：

$$\begin{cases} u_c^{(e)}(\xi) = \{N_1^{(e)}(\xi), N_2^{(e)}(\xi)\} \{u_{cl}^{(e)}, u_{cr}^{(e)}\}^T \\ u_s^{(e)}(\xi) = \{N_1^{(e)}(\xi), N_2^{(e)}(\xi)\} \{u_{sl}^{(e)}, u_{sr}^{(e)}\}^T \end{cases} \quad (8)$$

其应变函数为：

$$\frac{du^{(e)}(\xi)}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dN_1}{d\xi} \right)^{(e)}, \left(\frac{dN_2}{d\xi} \right)^{(e)} \right\} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_r^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

绝对坐标与相对坐标的变换关系为:

$$\begin{cases} x = \frac{l^{(e)}}{2}(1 + \xi) \\ dx = \frac{l^{(e)}}{2}d\xi \end{cases} \quad (10)$$

绝对坐标中混凝土板和钢梁的应变函数为:

$$\begin{cases} \frac{du_c^{(e)}(x)}{dx} = \left\{ -\frac{1}{l^{(e)}}, \frac{1}{l^{(e)}} \right\} \begin{Bmatrix} u_{cl}^{(e)} \\ u_{cr}^{(e)} \end{Bmatrix} \\ \frac{du_s^{(e)}(x)}{dx} = \left\{ -\frac{1}{l^{(e)}}, \frac{1}{l^{(e)}} \right\} \begin{Bmatrix} u_{sl}^{(e)} \\ u_{sr}^{(e)} \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

2) 挠度函数。

混凝土板与钢梁中任意一点的横向位移 $w(x)$

采用三次埃米特多项式插值函数, 即形函数向量 $N_{bi}^{(e)}(\xi)$ 与为节点位移向量 $\mathbf{a}_b^{(e)}$ 的点积:

$$w^{(e)}(\xi) = N_{bi}^{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \quad (12)$$

其中: $\mathbf{a}_b^{(e)} = \{w_1^{(e)}, \theta_1^{(e)}, w_r^{(e)}, \theta_r^{(e)}\}^T$;

$$N_{bi}^{(e)}(\xi) = \begin{cases} N_3^{(e)}(\xi) = (2 - 3\xi + \xi^3) / 4 \\ \bar{N}_3^{(e)}(\xi) = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) / 4 \\ N_4^{(e)}(\xi) = (2 + 3\xi - \xi^3) / 4 \\ \bar{N}_4^{(e)}(\xi) = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) / 4 \end{cases}$$

绝对坐标与相对坐标的变换:

$$\begin{cases} x = \frac{l^{(e)}}{2}(1 + \xi) \\ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{(e)} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)^{(e)} \end{cases} \quad (13)$$

考虑坐标变换后曲率可由式(13)所得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{4}{(l^{(e)})^2} \cdot \left\{ \frac{d^2 N_3^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_3^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{l^{(e)}}{2}, \frac{d^2 N_4^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{d^2 \bar{N}_4^{(e)}}{d\xi^2}, \frac{l^{(e)}}{2} \right\} \cdot \mathbf{a}_b^{(e)} \\ \mathbf{a}_b^{(e)} &= \left\{ \frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{-1+3\xi}{l^{(e)}}, \frac{-6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{1+3\xi}{l^{(e)}} \right\} \mathbf{a}_b^{(e)} = \\ & \{B_1^{(e)}, B_2^{(e)}, B_3^{(e)}, B_4^{(e)}\} \mathbf{a}_b^{(e)} = \{\mathbf{B}^{(e)}\}^T \mathbf{a}_b^{(e)} \end{aligned} \quad (14)$$

混凝土板截面上任一点的应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c^{(e)}(x) &= \frac{d\bar{u}_c^{(e)}(x)}{dx} = \frac{du_c^{(e)}}{dx} - z_c \frac{d^2 w^{(e)}}{dx^2} = \\ & \left\{ -\frac{1}{l^{(e)}}, 0, z_c \frac{-6\xi}{(l^{(e)})^2}, z_c \frac{1-3\xi}{l^{(e)}}, \frac{1}{l^{(e)}}, 0, \right. \end{aligned}$$

$$\left. z_c \frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, z_c \frac{-1-3\xi}{l^{(e)}} \right\} \mathbf{a}^{(e)} = \{\mathbf{B}_c^{(e)}\}^T \mathbf{a}^{(e)} \quad (15)$$

同理钢梁截面上任一点的应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{(e)}(x) &= \frac{d\bar{u}_s^{(e)}(x)}{dx} = \frac{du_s^{(e)}}{dx} - z_s \frac{d\theta^{(e)}}{dx} = \\ & \left\{ 0, -\frac{1}{l^{(e)}}, z_s \frac{-6\xi}{(l^{(e)})^2}, z_s \frac{1-3\xi}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}}, z_s \frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \right. \\ & \left. z_s \frac{-1-3\xi}{l^{(e)}} \right\} \mathbf{a}^{(e)} = \{\mathbf{B}_s^{(e)}\}^T \mathbf{a}^{(e)} \end{aligned} \quad (16)$$

$\{\mathbf{B}_c^{(e)}\}^T$ 和 $\{\mathbf{B}_s^{(e)}\}^T$ 各为混凝土板和钢梁的几何矩阵。

1.3 组合梁剪切连接件的简化^[8]

组合梁界面的剪切连接件虽然也是离散布置的, 但其间距通常很小, 其间距常常与组合梁单元的长度不一致, 这样就需要先将剪切连接件连续化, 然后再按组合梁单元的长度离散化, 由此, 每个组合梁单元两端仅需各设一个弹簧单元, 如图 2 所示。

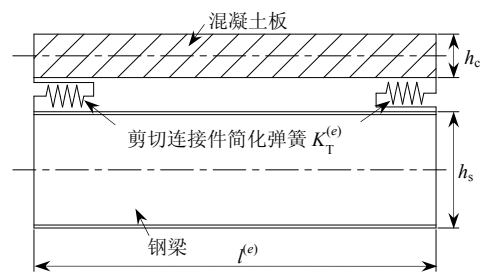


图 2 表示剪切连接件的弹簧单元

Fig.2 Spring element for shear connections

单个弹簧的刚度为 $K_T^{(e)}$:

$$K_T^{(e)} = \frac{kl^{(e)}}{2a} \quad (17)$$

其中: k 是均匀分布在梁中的单个剪切连接件的刚度; $l^{(e)}$ 单元长度; a 是梁单元中均匀分布的剪切连接件的间距。

1.4 采用虚功原理^[9]的具体计算过程

若组合梁产生虚位移 δu 、 δw 、 $\delta \theta$, 则有虚应变 $\delta \varepsilon$, 因此组合梁的虚功方程表达式为:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \delta \varepsilon_c \cdot \sigma_c dv + \int_{V_s} \delta \varepsilon_s \cdot \sigma_s dv + \delta s_1 \cdot T_1 + \\ \delta s_r \cdot T_r - \int_l \delta w \cdot q dx = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

由应力与应变之间的关系及弹簧的虎克定理得:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ 及 } T_1 = K_T s_1 \text{ 和 } T_r = K_T s_r \quad (19)$$

因此, 虚功方程的前四项为:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \delta \varepsilon_c \cdot \sigma_c dv + \int_{V_s} \delta \varepsilon_s \cdot \sigma_s dv + \delta s_1 \cdot T_1 + \delta s_r \cdot T_r = \\ & \int_{V_c} \delta \varepsilon_c \cdot E_c^{(e)} \varepsilon_c dv + \int_{V_s} \delta \varepsilon_s \cdot E_s^{(e)} \varepsilon_s dv + \\ & \delta s_1 \cdot K_T^{(e)} s_1 + \delta s_r \cdot K_T^{(e)} s_r = \\ & \delta \{a^{(e)}\}^T K_c^{(e)} \{a^{(e)}\} + \delta \{a^{(e)}\}^T K_s^{(e)} \{a^{(e)}\} + \\ & \delta \{a^{(e)}\}^T K_{T1}^{(e)} \{a^{(e)}\} + \delta \{a^{(e)}\}^T K_{Tr}^{(e)} \{a^{(e)}\} = \\ & \delta \{a^{(e)}\}^T K^{(e)} \{a^{(e)}\} \end{aligned} \quad (20)$$

因此虚功方程可表示为:

$$\begin{aligned} & \delta \{a^{(e)}\}^T K^{(e)} \{a^{(e)}\} - \int_l \delta w \cdot q dx = \\ & \delta \{a^{(e)}\}^T K^{(e)} \{a^{(e)}\} - \delta \{a^{(e)}\}^T \int_{-1}^1 \{B_b^{(e)}\} \cdot q \frac{l^{(e)}}{2} d\xi = 0 \\ & \Rightarrow K^{(e)} \{a^{(e)}\} - f = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \frac{(EA)_c}{l} + K & -K & 0 & \frac{-(ES)_c}{l} + Kd & \frac{-(EA)_c}{l} & 0 & 0 & \frac{(ES)_c}{l} \\ & \frac{(EA)_s}{l} + K & 0 & \frac{-(ES)_s}{l} - Kd & 0 & \frac{-(EA)_s}{l} & 0 & \frac{(ES)_s}{l} \\ & & \frac{12(EI)_c}{l^3} + \frac{12(EI)_s}{l^3} & \frac{6(EI)_c}{l^2} + \frac{6(EI)_s}{l^2} & 0 & 0 & \frac{-12(EI)_c}{l^3} - \frac{12(EI)_s}{l^3} & \frac{6(EI)_c}{l^2} + \frac{6(EI)_s}{l^2} \\ & & & \frac{4(EI)_c}{l} + \frac{4(EI)_s}{l} + Kd^2 & \frac{(ES)_c}{l} & \frac{(ES)_s}{l} & \frac{-6(EI)_c}{l^2} - \frac{6(EI)_s}{l^2} & \frac{2(EI)_c}{l} + \frac{2(EI)_s}{l} \\ \frac{(EA)_c}{l} + K & -K & 0 & \frac{-(ES)_c}{l} + Kd & \frac{(EA)_c}{l} + K & -K & 0 & \frac{-(ES)_c}{l} + Kd \\ & \frac{(EA)_s}{l} + K & 0 & \frac{-(ES)_s}{l} - Kd & & \frac{(EA)_s}{l} + K & 0 & \frac{-(ES)_s}{l} - Kd \\ & & \frac{12(EI)_c}{l^3} + \frac{12(EI)_s}{l^3} & \frac{-6(EI)_c}{l^2} - \frac{6(EI)_s}{l^2} & & & \frac{12(EI)_c}{l^3} + \frac{12(EI)_s}{l^3} & \frac{-6(EI)_c}{l^2} - \frac{6(EI)_s}{l^2} \\ & & & \frac{4(EI)_c}{l} + \frac{4(EI)_s}{l} + Kd^2 & & & & \frac{4(EI)_c}{l} + \frac{4(EI)_s}{l} + Kd^2 \end{bmatrix}$$

图 3 组合梁单元刚度矩阵

Fig.3 Element stiffness matrix of composite beams

单元刚度矩阵中的 S 是对截面形心的静矩。

2 有限元计算结果的验证

为验证上述所推导的组合梁单元刚度矩阵的正确性及精度, 将采用一简支组合梁分别在均布和集中荷载作用下进行计算, 该梁的计算简图及截面参数如图 4 所示。

在有限元计算中把梁分成了 10 个单元, 用自编的有限元程序计算分析, 并与解析方法^[10]算得结果进行比较, 通过比较来验证单元刚度矩阵的正确性。在比较中有限元计算采用三组剪切连接参数:

- 1) $k=3.46 \times 10^4 \text{N/mm}$, $a=200\text{mm}$;
- 2) $k=1.0 \times 10^5 \text{N/mm}$, $a=200\text{mm}$;
- 3) $k=3.46 \times 10^4 \text{N/mm}$, $a=200\text{mm}$ 。

$$\begin{cases} K^{(e)} = K_c^{(e)} + K_s^{(e)} + K_{T1}^{(e)} + K_{Tr}^{(e)} \\ \{B_b^{(e)}\} = \{0, 0, N_3^{(e)}(\xi), \bar{N}_3^{(e)}(\xi), 0, 0, N_4^{(e)}(\xi), \bar{N}_4^{(e)}(\xi)\}^T \\ K_c = \int_{-1}^1 B_c^{(e)} \cdot (EA)_c^{(e)} \cdot \{B_c^{(e)}\}^T \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\ K_s = \int_{-1}^1 B_s^{(e)} \cdot (EA)_s^{(e)} \cdot \{B_s^{(e)}\}^T \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \\ K_{T1} = B_{kl}^{(e)} \cdot K_T^{(e)} \cdot \{B_{kl}^{(e)}\}^T \\ K_{Tr} = B_{kr}^{(e)} \cdot K_T^{(e)} \cdot \{B_{kr}^{(e)}\}^T \\ f = \int_{-1}^1 \{B_b^{(e)}\} \cdot q \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \end{cases}$$

把前面所推导的 $B_c^{(e)}$ 、 $B_s^{(e)}$ 、 $B_{kl}^{(e)}$ 、 $B_{kr}^{(e)}$ 的表达式代入上式计算, 其积分计算过程就不具体叙述。根据计算结果按照自由度的顺序依次组装单元刚度矩阵 $K^{(e)}$ $[8 \times 8]$, 其结果如图 3 所示。

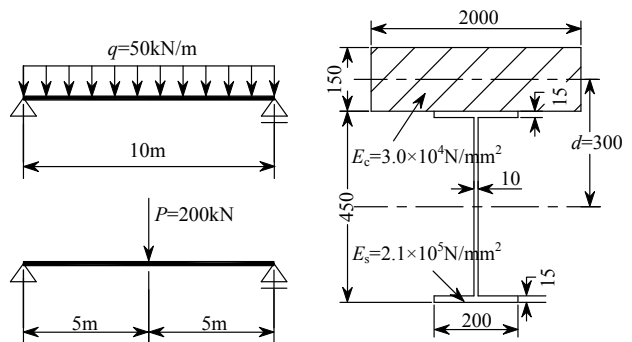


图 4 组合梁的截面参数

Fig.4 Cross-section parameters of composite beams

简支梁在均布和集中荷载作用下的解析公式如下所示:

均布荷载:

$$N = \gamma M + \frac{q\gamma}{\omega^2} \left\{ \frac{\cosh(\omega(l/2-x))}{\cosh(\omega l/2)} - 1 \right\} \quad (22)$$

$$f = \frac{q}{24EI(1+\beta)} (x^4 - 2lx^3 + l^3x) + \frac{q\gamma d}{2\omega^2 EI} \cdot (lx - x^2) + \frac{q\gamma d}{\omega^4 EI} \left(\frac{\cosh(\omega(l/2-x))}{\cosh(\omega l/2)} - 1 \right) \quad (23)$$

集中荷载:

$$N_1 = \gamma M_1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma P \sinh(\omega x)}{\omega \cosh(\omega l/2)} \quad (24)$$

$$f_1 = \frac{P \left(-\frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{16} l^2 x \right)}{EI(1+\beta)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma d P x}{\omega^2 EI} - \frac{1}{2} \frac{\gamma d P \sinh(\omega x)}{\omega^3 \cosh\left(\frac{1}{2} \omega L\right) EI} \quad (25)$$

式(22)~式(25)中的参数为:

$$\begin{cases} \beta = \frac{EA}{EI} \cdot d^2 \\ \frac{1}{EA} = \frac{1}{(EA)_c} + \frac{1}{(EA)_s}, \quad EI = (EI)_c + (EI)_s \\ \gamma = \frac{\beta}{(1+\beta)} d \\ \omega^2 = \frac{k_a(1+\beta)}{EA}, \quad k_a = \frac{k}{a} \end{cases} \quad (26)$$

对于梁端界面滑移上述两种荷载情况都采用同一公式计算, 即

$$s = \frac{T}{k_a} \quad (26)$$

其中, $T = \frac{-dN}{dx}$ 。

具体的计算结果比较如表 1 所示。

表 1 解析法和有限元法计算结果比较

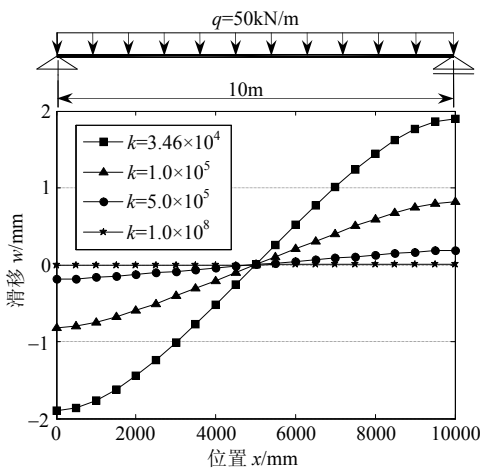
Table 1 The comparison of calculation results of tow methods

荷载类型	均布荷载 $q=50\text{N/mm}$						集中荷载 $P=2.0 \times 10^5\text{N}$					
	$k=3.46 \times 10^4\text{N/mm}$ $a=200\text{mm}$		$k=1.0 \times 10^5\text{N/mm}$ $a=200\text{mm}$		$k=3.46 \times 10^4\text{N/mm}$ $a=250\text{mm}$		$k=3.46 \times 10^4\text{N/mm}$ $a=200\text{mm}$		$k=1.0 \times 10^5\text{N/mm}$ $a=200\text{mm}$		$k=3.46 \times 10^4\text{N/mm}$ $a=250\text{mm}$	
计算位置及位移类型	跨中挠度	梁端滑移	跨中挠度	梁端滑移	跨中挠度	梁端滑移	跨中挠度	梁端滑移	跨中挠度	梁端滑移	跨中挠度	梁端滑移
	w	s	w	s	w	s	w	s	w	s	w	s
解析解/mm	38.703	1.903	31.602	0.821	40.814	2.221	25.050	1.046	20.468	0.413	26.395	1.238
数值解/mm	38.908	1.890	31.901	0.813	40.994	2.207	25.183	1.041	20.669	0.412	26.512	1.232
与解析解的误差/(%)	0.53	0.68	0.95	0.97	0.44	0.63	0.53	0.48	0.98	0.24	0.44	0.53

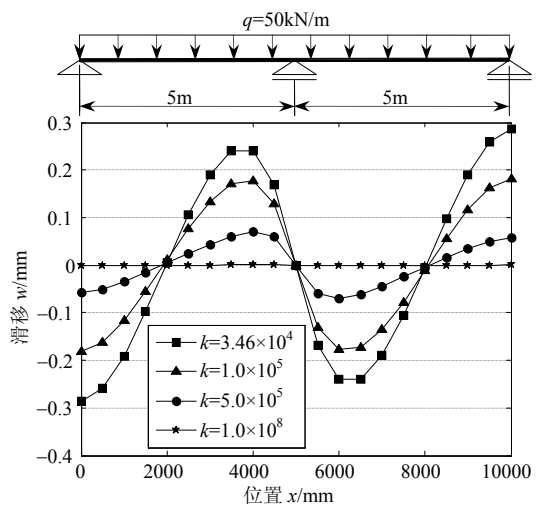
3 界面滑移及挠度的计算分析

3.1 简支梁和连续梁的界面滑移计算

用有限元计算的简支梁和连续梁的界面滑移, 沿梁长度方向的分布如图 5 所示。



(a) 简支梁界面滑移分布



(b) 连续梁界面滑移分布

图 5 界面滑移分布

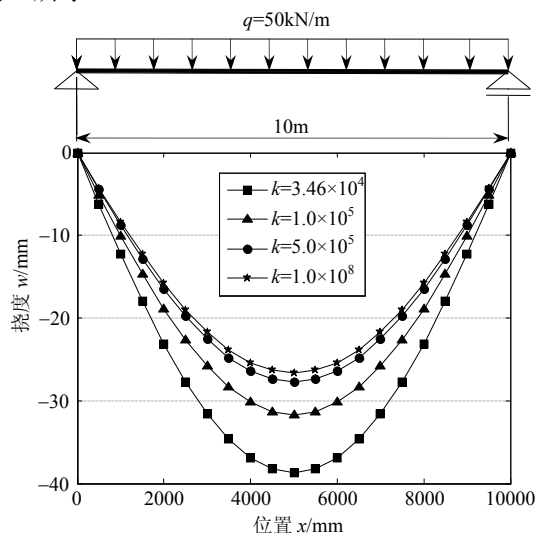
Fig.5 Distribution of interface slips

从图 5(a)可以看出, 简支梁的界面滑移在跨中为 0 的, 梁端最大。而图 5(b)中连续梁的分布跟简支梁有很大差别的, 中间支座的滑移为 0, 而不像

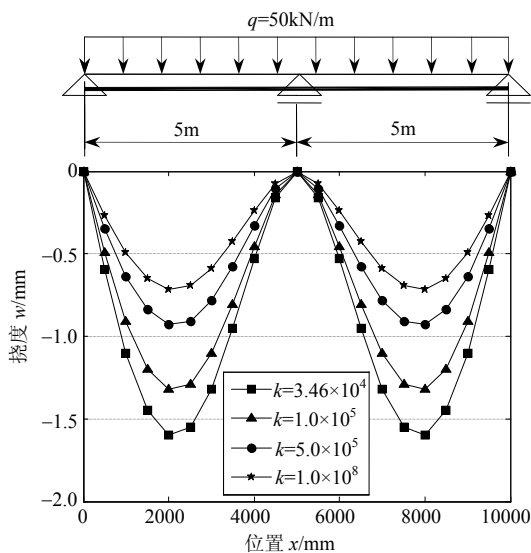
简支梁那样在支座处的滑移是最大的。连续梁在刚度比较小的时候其界面滑移最大值还是在最外面的两个支座处，然而当刚度增大后其界面滑移最大值就跨中转移了，最大值在离中间支座的附近。当刚度 $k=1.0 \times 10^8 \text{N/mm}$ 时，可认为是刚性剪切连接，此时无论是简支梁还是连续梁都无界面滑移。

3.2 界面滑移对挠度的影响

用有限元计算简支梁和连续梁的挠度，当刚度 $k=1.0 \times 10^8 \text{N/mm}$ 时，可认为是刚性剪切连接，此时无界面滑移。计算所得挠度沿梁长度方向的分布如图 6 所示。



(a) 简支梁挠度分布



(b) 连续梁挠度分布

图 6 挠度的分布

Fig.6 Distribution of the deflections

从图 6(a)中可以看到，在简支梁中，当刚度 $k=1.0 \times 10^8 \text{N/mm}$ 时跨中挠度 $w=26.65 \text{mm}$ ，而当 $k=3.46 \times 10^4 \text{N/mm}$ 时跨中挠度为 $w=38.74 \text{mm}$ ，与刚性

连接相比增加了 45.36%。在图 6(b)中连续梁， $x=2 \text{m}$ 或 8m 处挠度最大，当刚度 $k=1.0 \times 10^8 \text{N/mm}$ 时，挠度为 $w=0.72 \text{mm}$ ，而当 $k=3.46 \times 10^4 \text{N/mm}$ 时，挠度为 $w=1.60 \text{mm}$ ，与刚性连接相比增加了 122%。从中可以看出不管是简支梁还是连续梁，剪切连接件的刚度越小则挠度越大，更为重要的是在连续梁中因界面滑移的存在使得挠度最大点已经不在跨中了，而且界面滑移对挠度的影响也比简支梁大很多。因此当弹性剪切连接时不考虑组合梁界面滑移，挠度的计算是偏于不安全的。

4 结论

本文所推导的组合梁单元刚度矩阵，通过一简支梁计算其挠度与界面滑移，与解析解进行比较，其误差都在 1%以内，计算结果精度高，充分说明组合梁单元刚度矩阵的正确性。因此能满足理论分析和工程上的应用。

文中给出的组合梁单元刚度矩阵可以用于复杂荷载作用下静定与超静定情况下挠度和界面滑移的计算分析。并且可以计算任意刚度的剪切连接，可以快速便捷得到计算结果并很直观的评价剪切连接件对界面滑移及挠度的影响。这充分说明该单元刚度矩阵适用于任意刚度的剪切连接及任何形式的梁，具有普遍的使用性的。

同时文中通过计算分析了界面滑移对组合梁挠度的影响。在同等荷载条件下，弹性剪切连接的挠度比刚性剪切连接的挠度大很多，特别是连续梁的增加幅度更大。若在计算挠度时不考虑界面滑移是不安全的，因此计算分析组合梁的界面滑移是很有必要的。

参考文献:

- [1] 聂建国. 钢-混凝土组合梁结构试验、理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 57—67.
Nie Jianguo. Experiment, theory and application of steel-concrete composite beams [M]. Beijing: Science Press, 2005: 57—67. (in Chinese)
- [2] Hinton E, Owen D R J. An introduction to finite element computations [M]. U.K: Pineridge Press Limited Swansea, 1979: 1—171.
- [3] Zhou Donghua. Auswirkung der verformbarkeit der verbundmittel und teilverbundes auf das tragverhalten und die tragfähigkeit von verbundträn mit querschnittsprüngen [M]. Germany: Shaker-Verlag, 2003: 40—42.

(参考文献[4]—[10]转第 174 页)

- [5] Billington S L. Damage-tolerant cement-based materials for performance based earthquake engineering design: research needs [C]. Colorado, USA: Proceedings of the Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-5), 2004: 53—60.
- [6] Fischer G, Li V C. Effect of matrix ductility on deformation behavior of steel reinforced ECC flexural members under reversed cyclic loading conditions [J]. ACI Structural Journal, 2002, 99(6): 781—790.
- [7] Li V C, Mishra D K, Naaman A E, et al. On the shear behavior of ECC [J]. J Advance Cement Based Mater, 1994, 1(3): 142—1491.
- [8] Kabele P, Li V C, Horii H, et al. Use of BMC for ductile structural members [C]. Warsaw, Poland: In Proceeding of 5th International Symposium on Brittle Matrix Composites (BMC-5), 1997: 579—588.
- [9] Fischer G, Li V C. Influence of matrix ductility on the tension-stiffening behavior of steel reinforced ECC [J]. ACI Structural Journal, 2002, 99(1): 104—111.
- [10] Matsumoto T, Suthiwarapirak P, Kanda T. Mechanism of multiple cracking and fracture of DFRCCs under failure flexure [J]. Journal of Advanced Technology, 2003, 1(3): 299—306.
- [11] Kanda T, Watanabe S, Li V C. Application of pseudo strain hardening cementitious composites to shear resistant structural elements [C]. D-79104 Freiburg, Germany: In Fracture Mechanics of Concrete Structures Proceeding of FRAMCOS-3, AEDIFI CATIO Publishers, 1998: 1477—1490.
- [12] Maalej M, Zhang J, Quek S T, et al. High-velocity impact resistance of hybrid-fiber engineered cementitious composites [C]. Vail, Colorado, USA: Proceedings of the Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-5), 2004: 1051—1058.
- [13] Billington S L, Kyriakides M A, Blackard B, et al. Evaluation of a sprayable, ductile cement-based composite for the seismic retrofit of unreinforced masonry infills [C]. San Francisco, California: AIC & SEI Conference on Improving the Seismic Performance of Existing Buildings and Other Structures, 2009: 823—834.
- [14] 徐世娘, 王楠, 尹世平. 超高韧性水泥基复合材料加固钢筋混凝土梁弯曲控制裂试验研究[J]. 建筑结构学报, 2011, 32(9): 115—122.
Xu Shilang, Wang Nan, Ying Shiping. Experimental study on flexural characteristics of RC beams strengthened with post-poured ultra high toughness cementitious composites [J]. Journal of Building Structures, 2011, 32(9): 115—122. (in Chinese)
- [15] 梁兴文, 郑雨, 邓明科, 寇佳亮, 车佳玲. 塑性铰区采用纤维增强混凝土剪力墙的变形性能研究[J]. 工程力学, 2013, 30(3): 256—262.
Liang Xingwen, Zheng Yu, Deng Mingke, Kou Jialiang, Che Jialing. An investigation of deformation behavior of the shear wall with fiber-reinforced concrete in plastic high region [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(3): 256—262. (in Chinese)
- [16] 李艳, 梁兴文. PVA-ECC 纤维增强水泥基复合材料: 性能与设计[J]. 混凝土, 2009, 242(12): 54—57.
Li Yan, Liang Xingwen. PVA fiber reinforced cementitious composites: Performance and design [J]. Concrete, 2009, 242(12): 54—57. (in Chinese)
- [17] JGJ 101-96, 建筑抗震试验方法规程[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
JGJ 101-96, Specification of testing methods for earthquake resistant building [S]. Beijing: China Architecture Industry Press, 1997. (in Chinese)

(上接第 167 页)

- [4] Salari M R, Spacone E. Finite element formulations of one-dimensional elements with band-slip [J]. Engineering Structures, 2001, 23(7): 815—826.
- [5] Ranzi G, Bradford M A. A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(5): 657—672.
- [6] Oehlers D J, Bradford M A. Elementary behavior of composite steel and concrete structural members [M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999: 1—280.
- [7] Owen V A, Burgess I W, Plank R J, A A Abdul Wali. An analytical model for the analysis of composite beams with partial interaction [J]. Computers & Structure, 1997, 62(3): 493—504.
- [8] 潘志强. 组合梁考虑滑移的弹性分析及压弯构件弹塑性计算[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2007.
Pan Zhiqing. The elastic analysis of composite beams and the calculation of press-bending members [D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2007. (in Chinese)
- [9] Owen D R J, Hinton E. Finite elements in plasticity [M]. U.K: Pineridge Press Limited Swansea, 1980: 1—153.
- [10] 周东华, 孙丽莉, 樊江, 赵志曼, 刘永芳. 组合梁挠度计算的新方法--有效刚度法[J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(4): 541—546.
Zhou Donghua, Sun Lili, Fan Jiang, Zhao Zhiman, Liu Yongfang. Effective stiffness method for calculation of deflection of composite beams [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2011, 46(4): 541—546. (in Chinese)