

文章编号: 1000-4750(2013)07-0014-08

混凝土裂纹扩展过程模拟的扩展有限元法研究

张晓东¹, 丁 勇², 任旭春³

(1. 重庆交通科研设计院结构动力工程所, 桥梁工程结构动力学国家重点实验室, 重庆 400067;

2. 宁波大学土木工程系, 浙江, 宁波 315211; 3. 爱荷华大学机械工程系, 美国)

摘 要: 扩展有限元法(the extended Finite Element Method, XFEM)为数值模拟结构裂纹扩展过程提供了一条有效途径。该文介绍了用扩展有限元法对混凝土结构裂纹扩展过程进行数值模拟的实现方法。采用虚拟裂缝模型模拟混凝土非线性断裂行为, 针对二维四边形单元推导了详细的有限元列式。采用3种方案对非线性方程系统进行求解, 分析了其求解思路并概括了其求解步骤。通过对带初始边缘裂纹的单向拉伸混凝土板的数值模拟, 对3种求解方案的计算结果进行了分析和讨论。

关键词: 扩展有限元法; 裂纹扩展; 虚拟裂缝模型; 非线性断裂; 数值模拟

中图分类号: TV313 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.03.0206

SIMULATION OF THE CONCRETE CRACK PROPAGATION PROCESS WITH THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD

ZHANG Xiao-dong¹, DING Yong², REN Xu-chun³

(1. Structural Dynamics Engineering Department, China Merchants Chongqing Communications Research & Design Institute Co., Ltd.,

State Key Laboratory of Bridge Engineering Structural Dynamics, Chongqing 400067, China;

2. Department of Civil Engineering, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China;

3. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Iowa, USA)

Abstract: The extended finite element method (XFEM) provides an effective way for the numerical simulation of the crack propagation process of structures. The implementation method for the numerical simulation of the crack propagation process of concrete structures with the extended finite element method is introduced. The fictitious crack model is adopted to simulate the concrete nonlinear fracture behaviour. The detailed formulations of a two-dimensional quadrilateral element for the finite element analysis are derived. Three schemes are employed to solve the nonlinear system of equations and their implementation procedures are analyzed and summarized. The numerical simulation of an edge-cracked uniaxial tensile concrete plate is conducted and the corresponding results are analyzed.

Key words: the extended finite element method (XFEM); crack propagation; fictitious crack model; nonlinear fracture; numerical simulation

混凝土结构裂纹扩展问题研究的一个有效途径是利用数值分析方法进行数值模拟研究, 如利用边界元法、无网格法、有限元法等, 其中有限元法

由于数学理论比较成熟, 且出现了一批成熟的商业软件, 成为目前工程上应用最广的方法。尽管如此, 传统有限元法应用于裂纹扩展问题时仍然存在很

收稿日期: 2012-03-27; 修改日期: 2012-05-18

基金项目: 重庆市自然科学基金项目(CSTC2010BB6019); 近海冲击与安全工程浙江省重中之重学科开放基金项目(ZJ1109); 浙江省自然科学基金项目(Y11110548)

通讯作者: 张晓东(1977—), 男, 山东平度人, 副研究员, 博士, 从事混凝土裂纹扩展、非线性有限元研究(E-mail: zhangxiaodong00@tsinghua.org.cn).

作者简介: 丁 勇(1975—), 男, 浙江余姚人, 副教授, 博士, 从事计算结构力学和桥梁工程研究(E-mail: dingyong@nbu.edu.cn);

任旭春(1975—), 男, 山东莱州人, 博士, 爱荷华大学机械系助研, 从事结构优化、可靠度分析研究(E-mail: xuchun-ren@uiowa.edu).

大的困难, 主要在于传统的有限元分析中用自由表面模拟裂纹面, 整个计算网格随着裂纹的扩展不断变化, 以保证裂纹始终位于自由表面^[1], 虽然学者们提出各种网格自适应剖分方法, 但网格调整的过程是非常繁琐的, 由此导致的额外计算量是可观的。

为了克服上述困难, 美国西北大学 Belytschko T 教授的研究组首先提出了扩展有限元法^[2], 基于单位分解定理^[3], 在常规有限元位移场中引入能描述裂纹两侧位移间断特性的富集函数(enrichment function)项, 使得裂纹的描述独立于计算采用的网格, 因而无需随着裂纹的扩展不断进行网格重新剖分, 避免了传统有限元法求解此类问题遇到的困难。

扩展有限元法自提出以来, 被大量应用于混凝土结构的裂纹问题研究^[4-10], 成功再现了许多试验结果, 显示出很好的应用前景。本文将该方法应用于二维混凝土结构准静态裂纹扩展问题的研究, 对相关的一些问题进行了分析讨论, 采用虚拟裂缝模型^[9]描述混凝土结构的非线性断裂行为, 给出了较为详细的有限元列式, 特别是对非线性方程系统的求解方案进行了探讨。

1 扩展有限元法(XFEM)基本思想

如图 1 所示包含任意形状的裂纹(图 1 中虚线所示)的扩展有限元计算网格, 以 S_C 表示裂尖富集节点的集合, S_H 表示 Heaviside 富集节点的集合且排除 S_C 中的节点, 则扩展有限元法采用的位移场可表示为^[11]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = & \sum_{\forall I} N_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{J \in S_H} N_J(\mathbf{x})[H(f(\mathbf{x})) - H(f(\mathbf{x}_J))]\mathbf{a}_J + \\
 & \sum_j \sum_{K \in S_C} N_K(\mathbf{x})[\psi^{(j)}(\mathbf{x}) - \psi^{(j)}(\mathbf{x}_K)]\mathbf{b}_K^{(j)} \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中, 右端第 1 项为常规有限元的近似连续位移场, 第 2 项、第 3 项为能反映裂纹两侧位移间断特性的改进位移场。 $H(\cdot)$ 为广义 Heaviside 富集函数, 其定义为:

$$H(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1, & f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases},$$

其中: $f(\mathbf{x})$ 为描述裂纹面的水平集函数, 在裂纹面一侧取正值、另一侧取负值, $f(\mathbf{x})=0$ 则隐式定义了

裂纹面; $\psi^{(j)}$ 为能反映裂尖附近位移场渐进特性的富集函数, 其选择一般依赖于对真实位移场的先验了解; \mathbf{a}_J 与 $\mathbf{b}_K^{(j)}$ 为考虑改进位移场后引入的附加节点自由度; \mathbf{x}_J 为节点 J 的位置矢量。

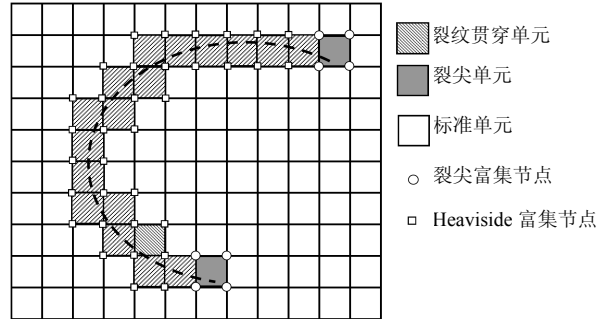


图 1 包含任意形状裂纹的计算网格中的富集节点和单元
Fig.1 Enriched nodes and elements in the computational mesh with arbitrary shaped crack

需指出的是, 式(1)中的 $N_J(\mathbf{x})$ 和 $N_K(\mathbf{x})$ 分别构成了满足局部单位分解条件的一组基函数, 即 $\sum_{J \in S_H} N_J(\mathbf{x}) = 1$, $\sum_{K \in S_C} N_K(\mathbf{x}) = 1$, 这使得能反映局部位移场特性的富集函数 $H(f(\mathbf{x}))$ 、 $\psi^{(j)}(\mathbf{x})$ 能够被重构, 同时只有裂纹周围的局部区域需要引入富集函数, 而不是整个求解区域。此外, 式(1)中的富集函数进行了移位处理, 这样做的目的是保证在各个节点处位移场恢复为常规有限元的节点位移。

由式(1)和图 1 可见, 在 XFEM 中的单元可分为 4 类:

- 1) 标准单元。其位移场仅包含式(1)右端第 1 项, 在单元内连续。
- 2) 裂纹贯穿单元, 其位移场包含式(1)右端的前两项, 改进位移场由 Heaviside 富集函数引入。
- 3) 裂尖单元, 其位移场包含式(1)右端的第 1 项、第 3 项, 改进位移场由裂尖富集函数引入。
- 4) 部分节点为富集节点的混合单元, 关于该类混合单元的相关讨论可参考文献[12]。

如式(1)所示, XFEM 可以很自然的与水平集法^[13]结合使用, 用水平集函数来描述裂纹的位置, 非常方便计算机程序实施。一个常用的水平集函数是符号距离函数, 其定义为:

$$f(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\| \quad (2)$$

如图 2 所示, 式(2)中 \mathbf{x}_r 为计算点 \mathbf{x} 在裂纹上的投影点, 当计算点在裂纹上方时, $f(\mathbf{x})$ 值取正, 当计算点在裂纹下方时, $f(\mathbf{x})$ 取负值。

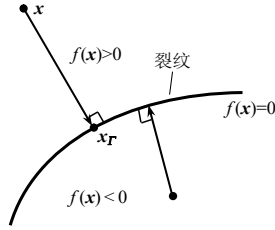


图 2 符号距离函数定义

Fig.2 Definition of signed distance function

2 虚拟裂缝模型

准确模拟混凝土结构断裂行为的一个关键问题是选择简洁合理的材料模型。由于混凝土是一种准脆性材料，其断裂行为不同于一般的线弹性材料，在数值模拟中一般采用黏聚裂缝模型描述其非线性断裂行为，这类模型放弃了传统断裂力学中的一些概念，引入了混凝土断裂过程区(Fracture Process Zone, FPZ)中材料的软化本构关系以及关于非线性变形局部化假定^[14]。适用于混凝土结构的黏聚裂缝模型主要有 2 类：虚拟裂缝模型和裂缝带模型。

本文采用虚拟裂缝模型描述混凝土结构的非线性断裂行为。虚拟裂缝模型采用如下假定：

1) 混凝土裂缝前方的断裂过程区可用一条虚拟裂缝进行模拟，与真实裂缝不同，虚拟裂缝仍可传递一定的应力，其传递的应力 σ 随裂缝张开位移 w 的增大而减小，当裂纹张开位移达到某一临界值 w_c 时，裂纹表面的面力降为零，该点成为真实裂纹尖端，其后方的裂纹表面成为自由表面，如图 3 所示。

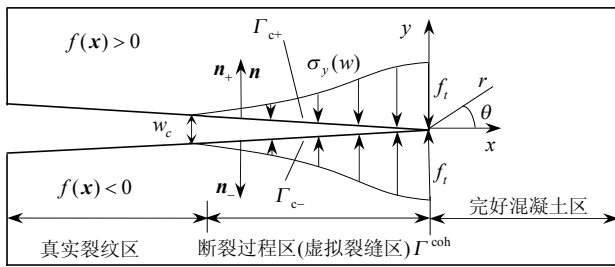


图 3 虚拟裂缝模型

Fig.3 Fictitious crack model

2) 裂纹面传递的应力 σ 与裂缝张开位移 w 的关系用 σ - w 软化律曲线来表示，常用软化律有线性软化律、双线性软化律(见图 4)等，但不论何种软化律，其断裂区单位面积吸收的能量都等于混凝土的断裂能 G_f ，即 $G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw$ 。

3) 材料是线弹性的，当最大拉应力达到混凝土材料的拉伸强度 f_t 时，虚拟裂缝向前扩展。

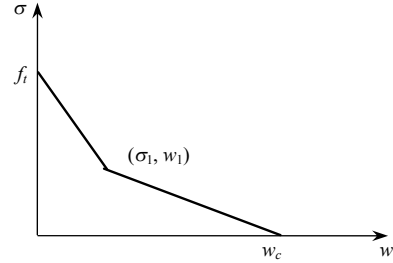


图 4 σ - w 双线性软化律曲线

Fig.4 Bilinear σ - w softening diagram

3 本文的扩展有限元列式

本文采用图 5 所示平面四边形单元来模拟混凝土结构的开裂。

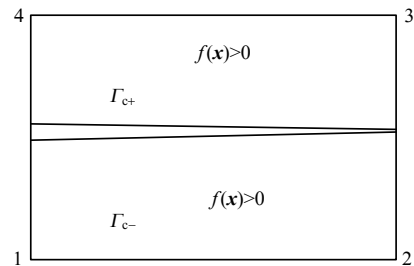


图 5 四边形裂纹贯穿单元

Fig.5 Fully cracked quadrilateral element

由式(1)裂纹贯穿单元的位移场为：

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^4 N_I(x)u_I + \sum_{J=1}^4 N_J(x)H_J a_J = [N_{st} | N_{en}] q = Nq \quad (3)$$

式(3)利用了记号 $H_J = H(f(x)) - H(f(x_j))$ ； N_{st} 和 N_{en} 分别为标准有限元位移场和改进位移场形函数矩阵； q 为扩展后的节点自由度列向量。

$$N_{st} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_4 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (4a)$$

$$N_{en} = \begin{bmatrix} N_1 H_1 & 0 & N_2 H_2 & 0 & \dots & N_4 H_4 & 0 \\ 0 & N_1 H_1 & 0 & N_2 H_2 & \dots & 0 & N_4 H_4 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (4b)$$

$$N = [N_{st} | N_{en}]_{2 \times 16} \quad (4c)$$

$$q^T = \{u_{1x} \ u_{1y} \ \dots \ u_{4x} \ u_{4y} \ a_{1x} \ a_{1y} \ \dots \ a_{4x} \ a_{4y}\}_{1 \times 16} \quad (4d)$$

同样地，对裂尖单元按文献[4]建议取裂尖富集函数 $\psi(x) = r \sin \frac{\theta}{2}$ (r, θ 为裂尖局部坐标系极坐标，见图 3)，由式(1)得到其位移场为：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^4 N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J=1}^4 N_J(\mathbf{x}) \psi_J \mathbf{b}_J =$$

$$[\mathbf{N}_{st} | \mathbf{N}_{en}] \mathbf{q} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (5)$$

式(5)中, 引入了记号 $\psi_J = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_J)$, 且有:

$$\mathbf{N}_{en} =$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \psi_1 & 0 & N_2 \psi_2 & 0 & \cdots & N_4 \psi_4 & 0 \\ 0 & N_1 \psi_1 & 0 & N_2 \psi_2 & \cdots & 0 & N_4 \psi_4 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (6a)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_{st} | \mathbf{N}_{en}]_{2 \times 16} \quad (6b)$$

$$\mathbf{q}^T = \{u_{1x} \ u_{1y} \ \cdots \ u_{4x} \ u_{4y} \ b_{1x} \ b_{1y} \ \cdots \ b_{4x} \ b_{4y}\}_{1 \times 16} \quad (6c)$$

将式(3)代入应变-位移关系得:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}_s \ \mathbf{B}_{en}] \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (7)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$ 为应变列阵; \mathbf{B}_s 、 \mathbf{B}_{en} 为应变-位移矩阵, 由式(3)、式(4a)~式(4c)、式(7)可以很容易求得其表达式。由式(7), 按标准有限元格式可求裂纹贯穿单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (8)$$

式中, \mathbf{C} 为混凝土材料的二维弹性矩阵。对于不同于图 5 的其他裂纹贯穿形式, 可采用同样的思路求其单元刚度矩阵。同理可求裂尖单元的刚度矩阵。

假定外荷载按比例因子 λ 进行加载, 即外力向量 \mathbf{f}^{ext} 可表示为 $\mathbf{f}^{\text{ext}} = \lambda \mathbf{f}_0^{\text{ext}}$, $\mathbf{f}_0^{\text{ext}}$ 代表加载模式。则系统的平衡方程可表示为:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \lambda \mathbf{f}_0^{\text{ext}} + \mathbf{f}^{\text{coh}} \quad (9)$$

式中: \mathbf{f}^{int} 为系统内力; \mathbf{f}^{coh} 为虚拟裂缝作用面力的等效节点外力。

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \sum \mathbf{K} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{f}_0^{\text{ext}} = \sum \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma \quad (10)$$

式中, $\sum(\cdot)$ 表示对单元内力、外力向量进行集成。虚拟裂缝的等效节点力可按如下思路求得:

$$\delta W^{\text{coh}} = - \int_{\Gamma_{c+}} (\mathbf{u}_+^h)^T \sigma_y(w) \mathbf{n}_+ d\Gamma - \int_{\Gamma_{c-}} (\mathbf{u}_-^h)^T \sigma_y(w) \mathbf{n}_- d\Gamma \quad (11)$$

式中: δW^{coh} 为 \mathbf{f}^{coh} 所做虚功; 下角标“+”、“-”分别表示裂缝上表面 Γ_{c+} 和下表面 Γ_{c-} 上的变量。

式(11)假定虚拟裂缝表面仅依法向应力作用且法向应力仅与法向裂缝张开位移有关。将式(3)或式(5)代入式(11), 同时注意到 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_+ = -\mathbf{n}_-$ (见图 3), 得到:

$$\delta W^{\text{coh}} = -\mathbf{q}^T \int_{\Gamma_c} \sigma_y(w) (\mathbf{N}_+^T - \mathbf{N}_-^T) \mathbf{n} d\Gamma \quad (12)$$

于是:

$$\mathbf{f}^{\text{coh}} = \frac{\delta W^{\text{coh}}}{\delta \mathbf{q}^T} = - \int_{\Gamma_c} \sigma_y(w) (\mathbf{N}_+^T - \mathbf{N}_-^T) \mathbf{n} d\Gamma \quad (13)$$

由式(13), 可分别求得位于断裂过程的虚拟裂缝贯穿单元和裂尖单元的等效节点外力。具体如下, 考虑图 5 所示的四节点裂纹贯穿单元, 由式(4a)~式(4c)可知, 式(13)中的被积函数项为:

$$\mathbf{N}_+^T(\mathbf{x}) - \mathbf{N}_-^T(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_{st} | \mathbf{N}_{en}]_+^T - [\mathbf{N}_{st} | \mathbf{N}_{en}]_-^T,$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (14)$$

考虑到 $N_{I+} = N_{I-}$ ($I=1, 2, 3, 4$), 得 $N_{st+} = N_{st-}$,

于是:

$$\mathbf{N}_+^T(\mathbf{x}) - \mathbf{N}_-^T(\mathbf{x}) = [\mathbf{0} | \mathbf{N}_{en+} - \mathbf{N}_{en-}]^T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (15)$$

利用 Heaviside 函数定义, 在裂缝上表面 Γ_{c+} , 有:

$$H_1 = H_2 = 2, \quad H_3 = H_4 = 0 \quad (16a)$$

在裂缝下表面 Γ_{c-} , 有:

$$H_1 = H_2 = 0, \quad H_3 = H_4 = -2 \quad (16b)$$

式(16a)、式(16b)代入式(15)得:

$$\mathbf{N}_+^T(\mathbf{x}) - \mathbf{N}_-^T(\mathbf{x}) = 2[\mathbf{0} | \mathbf{N}_{st}]^T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (17)$$

式(17)代入式(13)得:

$$\mathbf{f}^{\text{coh}} = -2 \int_{\Gamma_c} \sigma_y(w) [\mathbf{0} | \mathbf{N}_{st}]^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (19a)$$

同样道理, 对裂尖单元, 有:

$$\mathbf{f}^{\text{coh}} = -2 \int_{\Gamma_c} \sigma_y(w) [\mathbf{0} | r \mathbf{N}_{st}]^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (19b)$$

虚拟裂缝模型的法向张开位移 w 可如下计算:

$$w = \mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{u}_+^h - \mathbf{u}_-^h) = \mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{N}_+(\mathbf{x}) - \mathbf{N}_-(\mathbf{x})) \mathbf{q} \quad (20)$$

由式(20)断裂过程区裂纹贯穿单元和裂尖单元的法向张开位移分别为:

$$w = \mathbf{n}^T \cdot [\mathbf{0} | \mathbf{N}_{st}] \mathbf{q} \quad (21a)$$

$$w = \mathbf{n}^T \cdot [\mathbf{0} | r \mathbf{N}_{st}] \mathbf{q} \quad (21b)$$

实际计算过程中, 由式(21a)、式(21b)还可以确定断裂过程区范围。当某一开裂单元包含的裂纹上所有积分点的张开位移 w 均满足 $0 \leq w \leq w_c$ 时, 则认为该段裂纹位于断裂过程区, 此段裂纹表面将存在面力作用, 大小由 σ - w 关系确定; 否则裂纹为自由表面裂纹。

由式(18)、式(19a)、式(19b)、式(21a)、式(21b)可知 \mathbf{f}^{coh} 与节点位移向量有关 $\mathbf{f}^{\text{coh}} = \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})$, 于是系统平衡方程式(9)可表示为:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{K} \mathbf{q} = \lambda \mathbf{f}_0^{\text{ext}} + \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q}) \quad (22)$$

式中: \mathbf{K} 已经是集成后的总体刚度矩阵; \mathbf{q} 为包括了扩展节点自由度的总体节点位移向量。

为了模拟虚拟裂缝扩展过程, 还需附加虚拟裂缝扩展条件, 即虚拟裂缝尖端处拉应力达到混凝土材料的拉伸强度 f_t :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = f_t \quad (23)$$

式(23)可进一步写为:

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_t) \mathbf{q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{q} = f_t \quad (24)$$

式中, $\mathbf{S} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_t)$, $\mathbf{n}_2 = [n_x^2 \quad n_y^2 \quad 2n_x n_y]$,

其中 n_x 、 n_y 分别为法向量 \mathbf{n} 在裂尖局部坐标系 x 、 y 方向的分量, \mathbf{x}_t 为表示虚拟裂缝裂尖位置矢量。

式(22)和式(24)构成了系统最终的控制方程。

4 非线性方程求解方案

显然, 系统控制方程式(22)、式(24)是一组非线性方程, 必须采用迭代算法进行求解。考虑到混凝土结构裂纹扩展问题的荷载位移曲线不一定单调变化, 甚至可能出现“快速跳回”(snap-back)现象^[15], 用单纯的荷载控制或位移控制解法都不能适应上述情况。为此, 本文采用类似于“弧长法”^[16]的求解方案, 将荷载因子 λ 也作为未知量考虑, 采用3种方案对非线性方程系统进行求解。

方案 1.

采用文献[5]建议的方法, 直接用 Newton-Raphson 方法迭代求解。控制方程的不平衡向量为:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \lambda \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q}) \\ f_t - \mathbf{S} \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

待求变量为 \mathbf{q} 和 λ , 由式(25)可求雅可比矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} & -\mathbf{f}^{\text{ext}} \\ -\mathbf{S} & 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

其中, $\frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ 为断裂过程区虚拟裂缝作用面力产生的附加刚度项。引入记号:

$$\mathbf{K}_T^{\text{coh}} = -\frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}_T^{\text{coh}} \quad (27)$$

由式(18)、式(19a)、式(19b)、式(21a)、式(21b)可求得 $\mathbf{K}_T^{\text{coh}}$ 表达式, 对裂纹贯穿单元:

$$\mathbf{K}_T^{\text{coh}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -2 \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \sigma_y(w)}{\partial w} [\mathbf{0} | \mathbf{N}_{st}]^T \mathbf{nn}^T [\mathbf{0} | \mathbf{N}_{st}] d\Gamma = -2 \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \sigma_y(w)}{\partial w} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{st}^T \mathbf{nn}^T \mathbf{N}_{st} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (28)$$

对裂尖单元:

$$\mathbf{K}_T^{\text{coh}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -2 \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \sigma_y(w)}{\partial w} [\mathbf{0} | \mathbf{r} \mathbf{N}_{st}]^T \mathbf{nn}^T [\mathbf{0} | \mathbf{r} \mathbf{N}_{st}] d\Gamma \quad (29)$$

由式(25)、式(26)得到第 i 次迭代的未知量增量:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}^i = -(\mathbf{A}^{i-1})^{-1} \mathbf{R}^{i-1} \quad (30)$$

方案 1 每一步裂纹扩展后的平衡迭代求解算法概括如下:

1) 求总体刚度矩阵 \mathbf{K} , 未知变量取初值 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$ 和 $\lambda = \lambda^0$, \mathbf{q}^0 和 λ^0 可取上一步裂纹扩展后的平衡解, 令 $i=0$ 。

2) 由式(25)计算不平衡向量, 由式(27)计算 $(\mathbf{K}_T^{\text{coh}})^i$, 从而得到 \mathbf{A}^i 。

3) 由式(30)计算未知量增量 $\Delta \mathbf{q}^i$ 、 $\Delta \lambda^i$, 进而求得 \mathbf{q}^{i+1} 、 λ^{i+1} 。

4) 令 $i=i+1$, 回到步骤 2), 继续迭代直至平衡条件得到满足。

方案 2.

以 \mathbf{R} 表示式(22)产生的不平衡力向量:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \lambda \mathbf{f}_0^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q}) \quad (31)$$

将 \mathbf{R} 在上一次迭代解 \mathbf{q}^i 和 λ^i 处做泰勒展开并略去高阶项:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}^i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \Delta \lambda^i = \\ &= \mathbf{R}^i + \left(\mathbf{K} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{coh}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \mathbf{q}^i - \mathbf{f}_0^{\text{ext}} \Delta \lambda^i = \\ &= \mathbf{R}^i + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q}^i - \mathbf{f}_0^{\text{ext}} \Delta \lambda^i \end{aligned} \quad (32)$$

在式(32)中令 $\mathbf{R}=0$ 得:

$$\Delta \mathbf{q}^i = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}^i + \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{f}_0^{\text{ext}} \Delta \lambda^i = \Delta \bar{\mathbf{q}}^i + \mathbf{q}_e^i \Delta \lambda^i \quad (33)$$

式中引入了记号: $\Delta \bar{\mathbf{q}}^i = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}^i$ 及 $\mathbf{q}_e^i = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{f}_0^{\text{ext}}$ 。

将式(33)代入 $\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}^i$ 并代入式(24):

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{q}^i + \Delta \bar{\mathbf{q}}^i + \mathbf{q}_e^i \Delta \lambda^i) = f_t \quad (34)$$

由式(34)得:

$$\Delta \lambda^i = (f_t - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{q}^i + \Delta \bar{\mathbf{q}}^i)) / (\mathbf{S} \cdot \mathbf{q}_e^i) \quad (35)$$

由式(35)求得 $\Delta \lambda^i$ 并代入式(33)可求得 $\Delta \mathbf{q}^i$, 进而求得新的未知变量 $\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}^i$, $\lambda^{i+1} = \lambda^i + \Delta \lambda^i$ 。

方案 2 每一步裂纹扩展后的平衡迭代求解算法概括如下:

1) 求总体刚度矩阵 \mathbf{K} , 未知变量取初值 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$ 和 $\lambda = \lambda^0$, \mathbf{q}^0 和 λ^0 可取上一步裂纹扩展后的平衡解,

令 $i=0$ 。

2) 由式(31)计算的不平衡力向量 \mathbf{R}^i ，由式(27)计算 $(\mathbf{K}_T^{coh})^i$ ， $\mathbf{K}_T^i = \mathbf{K} + (\mathbf{K}_T^{coh})^i$ 。

3) 计算 $\Delta \bar{\mathbf{q}}^i = -\mathbf{K}_T^{i-1} \mathbf{R}^i$ 及 $\mathbf{q}_e^i = \mathbf{K}_T^{i-1} \mathbf{f}_0^{ext}$ 。

4) 由式(35)，求 $\Delta \lambda^i$ ，并将 $\Delta \lambda^i$ 代入式(33)求得 $\Delta \mathbf{q}^i = \Delta \bar{\mathbf{q}}^i + \Delta \lambda^i \mathbf{q}_e^i$ ，进而求得 \mathbf{q}^{i+1} 、 λ^{i+1} 。

5) 令 $i=i+1$ ，回到步骤 2)，继续迭代直至平衡条件得到满足。

方案 3.

该方案与方案 1 思路一致，区别仅在求解式(30)的方法。由式(26)可见，方案 1 对式(30)的求解涉及到非对称雅可比矩阵的求逆，方案 3 利用 Sherman-Morrison 定理^[17]使得求解过程仅涉及对称雅可比矩阵的求逆，由此给有限元编程带来的好处是显而易见的。

Sherman-Morrison 定理. 设 \mathbf{A} 为一非奇异的 n 阶方阵， \mathbf{s} 、 \mathbf{t} 是两个 n 阶向量，如果 $1 + \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \neq 0$ ，则矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{s} \mathbf{t}^T$ 也非奇异，且有：

$$(\mathbf{A} + \mathbf{s} \mathbf{t}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}}。$$

为利用 Sherman-Morrison 定理，将式(26)的雅可比矩阵做如下变换：

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{S}^T \\ -\mathbf{S} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \mathbf{S}^T - \mathbf{f}^{ext} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} + \mathbf{s} \mathbf{t}^T \quad (36)$$

其中：

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{S}^T \\ -\mathbf{S} & 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}^T - \mathbf{f}^{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{t}^T = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \end{cases} \quad (37)$$

由式(27)~式(29)知 \mathbf{K}_T 为对称矩阵，故 \mathbf{A} 也为对称矩阵。于是由 Sherman-Morrison 定理可按如下方式求解式(30)，为简单起见，略去变量的上角标：

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{cases} = -(\mathbf{A})^{-1} \mathbf{R} = -(\mathbf{A} + \mathbf{s} \mathbf{t}^T)^{-1} \mathbf{R} = \left[\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{t}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}} \right] \mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} - \frac{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}) [\mathbf{t}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R})]}{1 + \mathbf{t}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{s})} \quad (38)$$

由式(38)可见，此时求解过程仅涉及对称矩阵 \mathbf{A} 的求逆。

混凝土结构准静态裂纹扩展过程数值模拟步骤

本文用扩展有限元法结合虚拟裂缝模型对二维混凝土结构准静态裂纹扩展过程进行数值模拟

的步骤可概括如下：

1) 初始裂纹为自由表面裂纹，令荷载因子 $\lambda=1$ ，计算外荷载向量 \mathbf{f}_0^{ext} 作用下线弹性裂纹问题应力强度因子 K_I 、 K_{II} ，并采用下式计算裂纹扩展方向^[4]：

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

2) 令虚拟裂缝在 θ_c 方向扩展指定长度 Δa ，计算裂纹两侧富集节点的符号距离函数、Heaviside 函数及裂尖富集函数，由此计算开裂单元高斯积分点的应变-位移矩阵，进而形成总体刚度矩阵 \mathbf{K} 。

3) 采用上述 3 种方案之一求解非线性控制方程，在此过程中一并确定断裂过程区范围。

4) 计算当前外荷载向量作用下自由表面裂纹问题应力强度因子，并按步骤 1) 的方法计算新的裂纹扩展方向 θ_c 。

5) 到步骤 2) 继续下一个裂纹扩展步的计算。

5 数值算例——带初始边缘裂纹的单向拉伸混凝土板

考虑图 6 所示的混凝土板，板的几何尺寸为 $b=150\text{mm}$ ， $l=600\text{mm}$ ，厚度 $t=b$ ，板的下部边缘中间有一条长度为 $a_0=15.1\text{mm}$ 的初始裂纹，板的左侧边缘约束 y 方向的位移，为防止刚体位移，左下角点同时约束 x 方向位移。板的右侧受均布拉伸荷载 q_0 作用。与 Xiao Q Z 等^[18]相同，本文采用了双线性软化律(图 4)，材料参数为 $E=36.9\text{GPa}$ ， $\nu=0.2$ ， $f_t=3.14\text{MPa}$ ， $\sigma_1=0.455\text{MPa}$ ， $w_1=0.0373\text{mm}$ ， $w_c=0.279\text{mm}$ ， $G_f=0.122\text{N/mm}$ 。混凝土虚拟裂缝区的本构关系为：

$$\sigma_y = \begin{cases} f_t \left[1 - \frac{w(f_t - f_1)}{w_1 f_t} \right], & 0 \leq w \leq w_1 \\ \frac{f_1 w_c}{(w_c - w_1)} \left(1 - \frac{w}{w_c} \right), & w_1 \leq w \leq w_c \end{cases}。$$

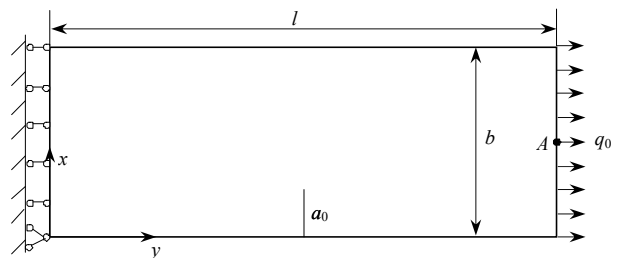


图 6 单向拉伸混凝土板

Fig.6 Uniaxial tension concrete plate

图 7 显示了本文计算采用的有限元网格, 计算网格共包含 39×59 个四边形单元, 网格在 x 和 y 方向均匀分布, 在计算过程中, 裂纹每一步扩展长度取为 5.1mm, 混凝土板经过 25 个裂纹扩展步后完全断裂。在文献[18]中, Xiao Q Z 等对该算例采用了两种网格进行计算, 粗网格单元数为 50×100, 细网格单元数为 150×120, 网格在 x 方向均匀分布, 在 y 方向裂纹附近区域进行了加密, 两种网格采取的裂纹扩展步长分别取为 3mm 和 1mm。

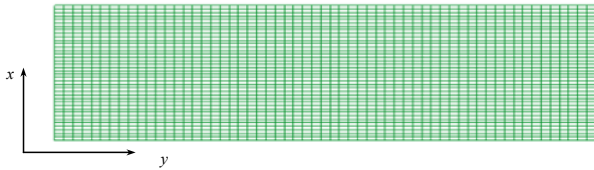


图 7 有限元分析网格图

Fig.7 The mesh for finite element analysis

图 8 给出了右端拉伸荷载随 q_0 右边缘中点 A (如图 6 所示) 处 y 方向位移的变化曲线, 图中横纵坐标均进行了无量纲化处理。实际计算中, 有限元网格在 A 点处并无节点存在, 因此 A 点位移取为右边缘处上下相邻节点的平均位移。由图 8 可见, 本文 3 种计算方案得到的结果完全一致, 计算结果与 Xiao Q Z 等采用细网格得到的结果完全吻合。

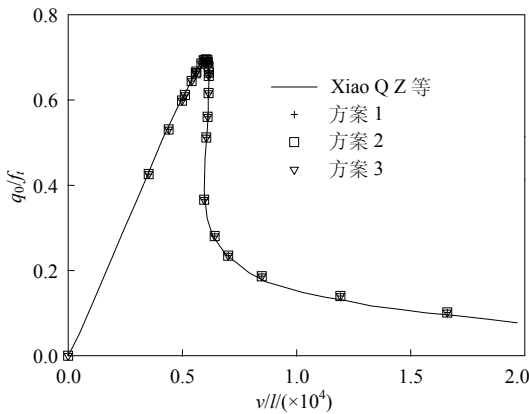


图 8 混凝土板拉力与位移关系

Fig.8 The load displacement curve of the concrete plate

图 9 给出了 3 种计算方案断裂过程区长度 d_c 随裂纹总长度 a 的变化情况, 图中的横纵坐标同样进行了无量纲化处理。可以看出, 3 种方案计算结

果完全一致, 给出的断裂过程区范围随裂纹扩展的演化情况与 Xiao Q Z 等的计算结果较为吻合。

图 9 的结果还显示, 在裂纹扩展的第 1 步~第 19 步(第 19 步虚拟裂缝扩展后, 自由表面裂缝与虚拟裂缝总长 a 与板宽 b 之比为 $a/b=0.75$), 断裂过程区的虚拟裂缝张开位移 w 均位于 σ - w 双线性关系曲线的第 1 段, 即满足 $0 < w < w_1$; 从裂纹扩展的第 20 步开始, 部分虚拟裂缝张开位移进入双线性关系曲线的第 2 段, 即满足 $w_1 < w < w_c$, 部分仍位于 σ - w 双线性关系曲线的第 1 段。

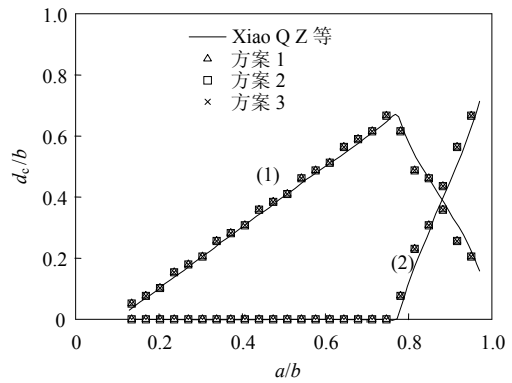


图 9 混凝土板断裂过程区范围随裂纹扩展变化, (1)、(2)分别表示位于双线性软化曲线的第 1 段和第 2 段的断裂过程区范围

Fig.9 Evolution of FPZ size with the crack propagation, (1) and (2) correspond to the first and second branches of the bilinear softening diagram

本文计算结果与 Xiao Q Z 等计算结果的少许差别是由于本文的计算网格较粗所致, 采用本文方法计算断裂过程区长度的最小“分辨率”为一个单元内包含的虚拟裂缝长度, 显然网格越粗, 断裂过程区长度的“分辨率”越低, 这一点在虚拟裂缝张开位移同时跨越双线性关系曲线的两段时影响更加明显, 图 9 的结果也证明了这一点。

表 1 给出了 3 种计算方案对应每一裂纹扩展步达到平衡状态所需的迭代次数。可以看出, 3 种计算方案所需的迭代次数相差不大。理论上, 方案 1 和方案 3 各步所需的迭代次数应完全一致, 实际计算中所需的迭代次数仅在第 7、16、19、25 步有少许差异, 而总的迭代次数仍然相同, 这可能是由于

表 1 3 种计算方案各裂纹扩展步所需迭代次数(1 步~25 步)

Table 1 Number of iterations required in each crack propagation step for the three solution schemes (step 1 ~ step 25)

方案	扩展步																									迭代总次数
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
方案 1	3	3	3	3	3	4	3	4	4	4	5	5	5	6	7	6	8	10	11	10	6	6	8	13	30	170
方案 2	3	3	4	3	4	4	3	4	4	4	5	5	5	6	7	6	9	10	11	8	5	6	9	14	34	176
方案 3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	7	7	8	10	10	10	6	6	8	13	29	170

数值计算误差所致。与方案 1 和方案 3 相比, 方案 2 所需的迭代次数最多, 在裂纹扩展的最后几步尤其明显, 这是因为当裂纹扩展到最后时, 荷载位移曲线越来越“平”(如图 8), 结构的切线刚度矩阵 \mathbf{K}_T 越来越接近奇异, 而方案 1 和方案 3 计算采用的雅可比矩阵式(26), 由于对虚拟裂缝尖端应力状态增加了附加条件, 即使在切线刚度矩阵 \mathbf{K}_T 奇异的时候, 仍然可以保持非奇异。

6 结论

本文将扩展有限元法应用于二维混凝土结构准静态裂纹扩展问题的研究, 采用虚拟裂缝模型描述混凝土结构的断裂行为, 推导了较为详细的有限元列式。对非线性方程系统采用 3 种方案进行求解, 并分析和讨论了计算结果。主要结果及分析如下:

(1) 本文采取的 3 种计算方案用于带初始边缘裂纹的单向拉伸混凝土板裂纹扩展过程模拟均取得了较好的结果, 计算过程中无需对网格进行重新剖分, 显示了扩展有限元法在解决该类问题时的优势。

(2) 计算网格粗细对断裂过程区范围有所影响。要较为精确的计算断裂过程区的范围, 可以采用较细的计算网格, 或者将断裂过程区单元内包含的虚拟裂缝再进一步细分成若干段, 对每一段分别判断其是否位于断裂过程区, 通过此种方式提高断裂过程区长度的“分辨率”。

(3) 本文讨论的 3 种计算方案均可用于二维混凝土结构准静态裂纹扩展问题模拟研究。方案 1 计算采用的雅可比系数矩阵非对称, 方案 2 和方案 3 计算过程均采用了对称的系数矩阵, 从矩阵存储和有限元编程角度考虑, 不建议采用方案 1; 从求解线性代数方程组计算效率角度分析, 方案 1 每一步迭代仅需求解一个线性代数方程组式(30), 方案 2 和方案 3 则需求解两个代数方程组, 即式(33)中的 $\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}^0$ 、 $\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{f}_0^{\text{ext}}$ 和式(38)中的 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}$, 虽然如此, 由于对系数矩阵 \mathbf{K}_T 和 \mathbf{A} 仅需做一次分解, 由此增加的计算量并不是很大。综合上述两点, 实际计算中方案 2 和方案 3 均可采用。此外需注意的是, 方案 3 的系数矩阵 \mathbf{A} 式(37)考虑虚拟裂缝尖端应力状态附加条件引入了最后一行和最后一列, 这可能会使其系数矩阵带宽大于方案 3。

本文考虑的算例以 I 型开裂为主, 对于更复杂的裂纹形态, 3 种方案的计算效果如何尚需考察;

本文采用的虚拟裂缝模型也仅考虑了双线性软化律, 对于其他类型的软化率及不同的本构关系参数, 3 种方案的计算效果如何也尚需研究。

参考文献:

- [1] 杨庆生, 杨卫. 断裂过程的有限元模拟[J]. 计算力学学报, 1997, 14(4): 33—38.
Yang Qingsheng, Yang Wei. Finite element simulation of fracture process [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1997, 14(4): 33—38. (in Chinese)
- [2] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 131—150.
- [3] Melenk J M, Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and application [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139: 289—314.
- [4] Moës N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 69: 813—833.
- [5] Goangseup Zi, Ted Belytschko. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57: 2221—2240.
- [6] Mariani S, Perego U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58(1): 103—126.
- [7] Mergheim J, Kuhl E, Steinmann P. A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 63(2): 276—289.
- [8] Asferg J L, Poulsen P N, Nielsen L O. A consistent partly cracked XFEM element for cohesive crack growth [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 72(4): 464—485.
- [9] Hillerborg A, Modéer M, Peterson P E. Analysis of crack propagation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements [J]. Cement and Concrete Research, 1976, 6: 773—782.
- [10] 方修君, 金峰, 王进廷. 用扩展有限元方法模拟混凝土的复合型开裂过程[J]. 工程力学, 2007, 24(增刊 I): 46—52.
Fang Xiujun, Jin Feng, Wang Jinting. Simulation of mixed-mode fracture of concrete using extended finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Suppl I): 46—52. (in Chinese)
- [11] Ted Belytschko, Robert Gracie, Giulio Ventura. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling [J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2009, 17(4): 043001.

(参考文献[12]—[18]转第 27 页)

5 结论

本文提出了一种结构拓扑与内嵌构件布局联合优化的新颖方法。这种方法突出的特点是利用水平集函数隐式地描述不规则的构件形状,因此可以非常方便地处理构件之间的互不覆盖约束条件。数值算例表明:较之文献中已有的方法,本文算法能够以更小的计算量有效地实现结构拓扑与内嵌构件布局的联合优化。

参考文献:

- [1] Bendsoe M P, Sigmund O. Topology optimization: Theory, methods and applications [M]. Berlin: Springer, 2003: 1—8.
- [2] Guo X, Cheng G D. Recent development in structural design and optimization [J]. Acta Mechanica Sinica, 2010, 26(6): 807—823.
- [3] Chickermane H, Gea H C. Design of multi-component structural systems for optimal layout topology and joint locations [J]. Engineering with Computers, 1997, 13(4): 235—243.
- [4] Zhu J H, Zhang W H, Beckers P, Chen Y Z, Guo Z Z. Simultaneous design of components layout and supporting structures using coupled shape and topology optimization technique [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 36(1): 29—41.
- [5] Zhu J H, Zhang W H, Beckers P. Integrated layout design of multi-component system [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78(6): 631—651.
- [6] Zhu J H, Zhang W H. Integrated layout design of supports and structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(9/10/11/12): 557—569.
- [7] Wang M Y, Wang X M, Guo D M. A level set method for structural topology optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192 (1/2): 227—246.
- [8] Allaire G, Jouve F, Toader A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 194(1): 363—393.
- [9] Rozvany G I N, Zhou M, Birker T. Generalized shape optimization without homogenization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1992, 4(3/4): 250—252.
- [10] Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24: 359—373.
- [11] 单鹏. 镶嵌多个部件的结构拓扑优化设计[D]. 大连: 大连理工大学, 2008: 26—31.
Shan Peng. Optimal embedding objects in the topology design of structure [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008: 26—31.(in Chinese)
- [12] 郭旭, 赵康. 拓扑相关荷载作用下结构拓扑优化的水平集方法[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 69—77.
Guo Xu, Zhao Kang. Topology optimization with design-dependent loads by level set approach [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 69—77. (in Chinese)
- [12] Chessa J, Wang H, Belytschko T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(7): 1015—1038.
- [13] Sethian J A. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: .
- [14] 徐世娘. 混凝土断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 131—139.
Xu Shilang. Concrete fracture mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2011: 131—139. (in Chinese)
- [15] Carpinteri A, Colombo G. Numerical analysis of catastrophic softening behaviour (snap-back instability) [J]. Computers and Structures, 1989, 31: 607—636.
- [16] Criesfield M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume1: Essentials [M]. New York: Wiley, 1991: 266—276.
- [17] Hager W W. Updating the inverse of a matrix [J]. SIAM Review, 1989, 31(2): 221—239.
- [18] Xiao Q Z, Karihaloo B L, Liu X Y. Incremental-secant modulus iteration scheme and stress recovery for simulating cracking process in quasi-brittle materials using XFEM [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 69: 2606—2635.

(上接第 21 页)