$\sum\limits_{k=0}^{\omega-1}(y_i(k+1)-y_i(k))=0(i=1,2,\cdots,n)$，由方程右边得

$$\bar{r}_i\omega\sum_{k=0}^{\omega-1}\left[\sum_{j=1}^{m}r_i(k)c_{ij}(k)\exp\{\theta y_i(k-\tau_j)\}+\frac{r_i(k)\exp\{y_i(k)\}}{a_i(k)+\sum\limits_{s=1,\,s\neq i}^{n}b_{is}(k)\exp\{y_s(k)\}}\right]. \tag{6}$$

则由式(5),(6)知

$$\sum_{k=0}^{\omega-1}|y_i(k+1)-y_i(k)|\leqslant 2\bar{r}_i\omega. \tag{7}$$

一方面，由式(6)有

$$\bar{r}_i\omega\geqslant\exp\{\theta y_i(\xi_i)\}\sum_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}},$$

从而有

$$y_i(\xi_i)\leqslant\frac{1}{\theta}\ln\left\{\frac{\bar{r}_i}{\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}}\right\}.$$

结合式(7)，由引理 3，有

$$y_i(k)\leqslant y_i(\xi_i)+\sum_{s=0}^{\omega-1}|y_i(s+1)-y_i(s)|\leqslant\frac{1}{\theta}\ln\left\{\frac{\bar{r}_i}{\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}}\right\}+2\bar{r}_i\omega:=L_i. \tag{8}$$

另一方面，由式(6)又有

$$\bar{r}_i\omega\leqslant\omega\exp\{\theta^{\mu}y_i(\eta_i)\}\Big(\sum_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}+(\overline{r_i/a_i})\Big),\qquad\theta^{\mu}=\max\{1,\theta\},$$

从而有

$$y_i(\eta_i)\geqslant\frac{1}{\theta^{\mu}}\ln\left\{\frac{\bar{r}_i}{\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}+(\overline{r_i/a_i})}\right\}.$$

同理，结合式(7)和引理 3，有

$$y_i(k)\geqslant y_i(\eta_i)-\sum_{s=0}^{\omega-1}|y_i(s+1)-y_i(s)|\geqslant\frac{1}{\theta^{\mu}}\ln\left\{\frac{\bar{r}_i}{\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}+(\overline{r_i/a_i})}\right\}-2\bar{r}_i\omega:=l_i. \tag{9}$$

于是，由式(8),(9)可得

$$|y_i(k)|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|l_i|,|L_i|\}:=H_i,\qquad|y_i|=\max_{k\in I_\omega}|y_i(k)|\leqslant H_i, \tag{10}$$

$$\|\boldsymbol{y}\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}H_i^2\Big)^{1/2}:=M. \tag{11}$$

显然，M 与 λ 的选取无关. 令 $B>\max\{M_0,M\}$，$\Omega=\{\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in X\mid\|\boldsymbol{y}\|<B\}$. 对于 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$和$\lambda\in(0,1)$，有 $L\boldsymbol{y}\neq\lambda N\boldsymbol{y}$，即 Ω 满足引理 2 的条件 1). 当 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L=\partial\Omega\cap\mathbb{R}^n$ 时，$\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的常值向量，且 $\|\boldsymbol{y}\|=B$，由引理 4 知

$$QN\boldsymbol{y}=\left((\omega)^{-1}\sum_{k=0}^{\omega-1}r_i(k)\left[1-\sum_{j=1}^{m}c_{ij}(k)\exp\{\theta y_i\}-\frac{\exp\{y_i\}}{a_i(k)+\sum\limits_{s=1,\,s\neq i}^{n}b_{is}(k)\exp\{y_s\}}\right]\right)_{n\times1}\neq0.$$

构造同伦映射 $h_\mu(\boldsymbol{y})=\mu QN\boldsymbol{y}+(1-\mu)G\boldsymbol{y}$，$\mu\in[0,1]$，其中

$$G\boldsymbol{y}=\Big((\omega)^{-1}\sum_{k=0}^{\omega-1}r_i(k)\Big[1-\sum_{j=1}^{m}c_{ij}(k)\exp\{\theta y_i\}\Big]\Big)_{n\times1}.$$

又由引理 4 可知，对于 $\mu\in[0,1]$，$h_\mu(\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L)\neq0$，注意 $J=I$ 及代数方程组 $\bar{r}_i-v_i^{\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}=0$ 有唯一正解$(v_1^*,\cdots,v_n^*)^{\mathrm{T}}$，根据同伦不变性知

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\deg\{G,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\operatorname{sign}\left\{(-1)^n\theta^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{r_ic_{ij}}(v_i^*)^\theta\right\}\neq 0,$$

即 Ω 满足引理2的条件2). 从而方程 $L\boldsymbol{y}=N\boldsymbol{y}$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\bar{\Omega}$ 内至少有一个解 $(y_1^*(k),\cdots,y_n^*(k))^{\mathrm{T}}$，由使用的变换知，$(\exp\{y_1^*(t)\},\cdots,\exp\{y_n^*(t)\})^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的 ω 周期正解. 证毕.

注1 由上述讨论可知，如果差分互惠系统(1)中的常数时滞改为时变时滞，则定理1的结论仍然成立，表明时滞对系统是无害的.

注2 定理1的结论表明，差分互惠系统(1)一定会产生周期性生物振荡现象，且时滞对系统正周期解的存在性无影响.

参 考 文 献

[1] ZHAO Ming, CHENG Rong-fu. Existence of Periodic Solution of a Food Chain System with Biocontrol and Ratio Functional Response [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2009, 47(4): 730-736. (赵明，程荣福. 一类具生物控制和比率型功能反应的食物链系统周期解的存在性 [J]. 吉林大学学报：理学版，2009，47(4)：730-736.)

[2] WEN Shao-xiong, FAN Meng. Existence of Periodic Solution of Apredator-Prey System with Hassell-Varley Functional Response [J]. Journal of Northeast Normal University: Natural Science Edition, 2011, 43(1): 10-15. (温绍雄，范猛. 具有 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者-食饵系统周期解的存在性 [J]. 东北师大学报：自然科学版，2011，43(1)：10-15.)

[3] CHENG Rong-fu, CHANG Liang. Multiple Periodic Solution of a Predator-Prey System with Infinite Delay and Non-monotonic Functional Response [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(5): 761-765. (程荣福，常亮. 具无限时滞和非单调功能性反应的捕食系统的多周期解 [J]. 吉林大学学报：理学版，2010，48(5)：761-765.)

[4] CHENG Rong-fu. Existence of Positive Periodic Solution for a Predator-Prey Model with Bio-controls and Several Delays [J]. Journal of Beihua University: Natural Science, 2010, 11(1): 1-6. (程荣福. 一类具生物控制的多滞量捕食模型正周期解的存在性 [J]. 北华大学学报：自然科学版，2010，11(1)：1-6.)

[5] May R M. Theoretical Ecology: Principles and Applications [M]. Oxford: Blackwell Scientific, 1976.

[6] BAI Ling, FAN Meng, WANG Ke. Existence of Periodic Solutions for Difference Equations of a Cooperative Systems [J]. Journal of Biomathematics, 2004, 19(3): 271-279. (柏灵，范猛，王克. 离散时间的互惠系统的正周期解的存在性 [J]. 生物数学学报，2004，19(3)：271-279.)

[7] YU Li-ying. Existence of Periodic Solutions for a Discrete Time of Many Species Cooperative Systems [J]. Journal of Beihua University: Natural Science, 2011, 12(6): 627-631. (于丽颖. 离散时间的多种群互惠系统正周期解的存在性 [J]. 北华大学学报：自然科学版，2011，12(6)：627-631.)

[8] FAN Meng, WANG Ke. Periodic Solutions of a Discrete Time Nonautonomous Ratio-Dependent Predator-Prey Systems [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 35: 951-961. (范猛，王克. 离散时间的非自治比率依赖的捕食者-食饵系统的周期解 [J]. 数学与计算机模拟，2002，35：951-961.)

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997: 56-69.

[10] ZHANG Rui-yang. Periodic Solutions of a Single Species Discrete Population Model with Periodic Harvest/Stock [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 39(1): 77-90. (张瑞阳. 具有周期收获或存放的单种群不连续的人口模型的周期解 [J]. 计算机与数学及其应用，2002，39(1)：77-90.)

(责任编辑：赵立芹)