

文章编号: 1000-4750(2013)10-0272-05

基于失效概率偏导数的局部与全局混合灵敏度分析

程 蕾, 吕震宙, 李璐祎

(西北工业大学航空学院, 西安 710072)

摘 要: 基于失效概率偏导数的局部灵敏度与矩独立的全局灵敏度定义了一种新的混合灵敏度指标, 该灵敏度指标不仅继承了传统的矩独立灵敏度的优点, 而且反映了矩独立灵敏度和基于方差的灵敏度之间的内在联系。针对该矩独立的混合灵敏度指标计算量大的问题, 该文首先将其转化为基于方差的混合灵敏度指标, 然后利用能够高效计算条件矩的态相关参数(SDP)法进行求解。为了进一步提高计算效率, 该文建立了基于重要抽样和截断重要抽样的 SDP 方法。算例结果验证了该文所提指标的合理性及所提方法的准确性。

关键词: 失效概率偏导数; 矩独立全局灵敏度; 混合灵敏度; 态相关参数法; 重要抽样法; 截断重要抽样法

中图分类号: TB114.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.07.0507

A MIXTURE OF LOCAL AND GLOBAL SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON THE DERIVATIVE OF FAILURE PROBABILITY

CHENG Lei, LÜ Zhen-zhou, LI Lu-yi

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new mixed-sensitivity index is proposed by combining the derivative based the local sensitivity of failure probability with the moment independent global sensitivity. The mixed-sensitivity index inherits the advantages of the traditional moment independent sensitivity, and it reflects the intrinsic relationship between the moment independent sensitivity and the variance based one. For solving the large computational cost, the proposed index is first transformed into the variance based mixed-sensitivity, then the high efficient state dependent parameter (SDP) method for the calculation of the conditional moments can be employed to calculate it efficiently. To further improve the computational efficiency, the importance sampling based SDP method and the truncated importance sampling based SDP method are proposed respectively. Several examples are employed to illustrate the reasonability of the proposed index and the accuracy of the proposed method.

Key words: derivative based local sensitivity; moment independent global sensitivity; mixed-sensitivity index; SDP method; importance sampling method; truncated importance sampling method

研究与分析一个系统或模型的状态或输出响应量对系统输入参数和周围条件的敏感程度称为灵敏度分析^[1], 通常包括局部灵敏度分析和全局灵敏度分析^[2-3]。局部灵敏度以各个输入变量取名义值时的偏导数作为该变量的灵敏度, 而全局灵敏度

则考察输入变量在其整个取值范围内变化时, 对模型输出响应不确定性的影响程度。目前对于随机不确定性的全局灵敏度分析已经发展得比较成熟, 如 Helton、Saltelli 等分别提出的非参数方法 (nonparametric technique)^[4-5], Sobol、Iman 和 Saltelli

收稿日期: 2012-07-11; 修改日期: 2012-11-03

基金项目: 航空基金项目(2011ZA53015); 国家自然科学基金项目(51175425); 博士学科点专项科研基金项目(20116102110003)

通讯作者: 吕震宙(1966—), 女, 湖北人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构可靠性研究(E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn).

作者简介: 程蕾(1990—), 女, 河北人, 博士生, 主要从事结构可靠性研究(E-mail: mangoclei@mail.nwpu.edu.cn);

李璐祎(1987—), 女, 陕西人, 博士生, 主要从事结构可靠性研究(E-mail: luyili@mail.nwpu.edu.cn).

等分别提出的各自基于方差的全局灵敏度指标 (variance based global sensitivity) 和求解方法^[6], Chun、Liu 和 Borgonovo 等各自提出的相应的矩独立的全局灵敏度指标(基于密度的重要性测度指标)(moment independent global sensitivity)^[7-9]。其中文献[9]中的矩独立重要性测度指标能够比较全面地反映各输入变量的重要性差别, 应用较多。但在可靠性问题中, 小失效概率的计算大多牵涉到功能响应函数分布尾部的问题, 因而输入变量对功能响应函数分布的影响程度并不能完全等同于输入变量对模型失效概率的影响程度。文献[10]建立了一种矩独立的输入变量对失效概率的重要性测度指标, 以衡量各个输入随机变量对失效概率的影响程度, 可以直接为可靠性设计提供有用信息。但其中对于矩独立重要性测度指标的求解还是依赖于相应的概率密度函数求解方法, 并且计算量依赖于变量的维数。文献[11]在其基础上, 建立了新的度量输入变量对失效概率影响的矩独立重要性测度指标, 并将失效概率的矩独立重要性测度指标进行扩展, 定义了度量输入变量对响应量分布函数影响的矩独立重要性测度指标。

基于失效概率偏导数的局部可靠性灵敏度能够有效地反映出输入变量分布参数对结构或者系统可靠性影响的信息, 在可靠性工程中应用广泛, 但其仍然存在局部性的限制。为了能够充分利用基于失效概率偏导数的局部可靠性灵敏度所反映出来的有效信息, 并克服其局部性的缺陷, 本文在已有基于失效概率矩独立重要性测度指标的基础上提出了一种新的衡量输入变量对失效概率偏导数影响的矩独立全局灵敏度指标, 即局部与全局混合的灵敏度指标, 并将其进行转化成基于方差的混合灵敏度指标, 建立了所提混合灵敏度求解的态相关参数法(SDP)^[12-14]。此外, 针对小失效概率情况下抽样效率低的问题, 本文还将态相关参数法与重要抽样法、截断重要抽样法相结合, 从本质上提高了抽样效率, 也使得计算量不再依赖于变量维数, 大大提高了计算效率。

1 基于失效概率偏导数的局部与全局混合灵敏度指标

对可靠性模型 $Y=g(\mathbf{x})$, Y 为功能函数响应量, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为输入变量。局部灵敏度定义为失效概率 P_f 对随机变量 x_j 的分布参数 $\theta_{x_j}^{(k)}$ ($j=1, 2, \dots,$

$n; k=1, 2, \dots, m_j$, 其中 m_j 为第 j 个变量 x_j 的分布参数的总数)的偏导数, 记 Y 的无条件局部灵敏度为 $\partial P_f / \partial \theta_{x_j}^{(k)}$, 记输入变量 x_i 取其实实现值时 Y 的条件局部灵敏度为 $\partial P_f / \partial \theta_{x_j}^{(k)} | x_i$ 。为了研究随机变量 x_i 对局部灵敏度(即失效概率偏导数)的影响程度, 定义了如下矩独立的局部与全局混合灵敏度:

$$\delta_{I_f}^{P_f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} - \frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i \right]^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

其中, $\delta_{I_f}^{P_f}$ 反映了不确定随机变量对局部灵敏度的影响程度。若随机变量 x_i 对某失效概率偏导数影响较大, 则 $\delta_{I_f}^{P_f}$ 较大, 反之则较小。

由于失效概率可以改写成下式所示的失效域指示函数 $I_F(\mathbf{x})$ 的数学期望形式:

$$P_f = \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E(I_F) \quad (2)$$

式中: $I_F(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in F \\ 0 & \mathbf{x} \notin F \end{cases}$ 为失效域的指示函数; R^n

为 n 维变量空间; $E(\cdot)$ 为数学期望算子。

则失效概率偏导数也可以表示成数学期望的表达式:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} = \int \dots \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \frac{1}{f_X(\mathbf{x})} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E \left[\frac{I_F(\mathbf{x})}{f_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \right] \quad (3)$$

同样, 条件失效概率偏导数也可以写成如下所示的数学期望的形式:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i = E \left[\frac{I_F(\mathbf{x})}{f_X(\mathbf{x})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i \right] \quad (4)$$

将式(3)的局部灵敏度和式(4)的条件局部灵敏度的表达式分别代入式(1)中, 便可以得到矩独立的混合灵敏度与相应的基于方差的混合灵敏度之间的关系:

$$\delta_{I_f}^{P_f} = E \left[\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} - \frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i \right]^2 = V \left(E \left[\frac{I_F(\mathbf{x})}{f_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i \right] \right) \quad (5)$$

其中, $V(\cdot)$ 为方差算子。由式(5)可以看出, 式(1)定义的矩独立的混合灵敏度可以转化为相应的基于方差的混合灵敏度。这样, 就可以用基于方差的

全局灵敏度分析方法来求解基于失效概率偏导数的局部与全局混合灵敏度,也为矩独立的混合灵敏度求解提供了一种新途径。

2 混合灵敏度的求解方法

2.1 传统的SDP方法

用传统的 Monte Carlo 方法求解式(5)中的基于方差的混合灵敏度需要双层抽样,而且该方法所需样本量大,计算效率低,多用于理论方面作为检验其他新方法的标准解。态相关参数(State Dependent Parameter)法是一种基于递归滤波和平滑估计的非参数光滑方法,首先由 Young^[15]提出, Ratto 等将其应用到基于方差的全局灵敏度分析中,大大提高了计算效率。SDP 方法实际上是一种代理模型法,通过一定的排序将随机输入样本与相应的输出看作时间序列模型中的信号输入输出,从而借助函数的高维模型表示(High Dimensional Model Representation, HDMR)建立起状态空间中的重要性分析模型。其求解过程可简述如下:

根据输入变量的联合概率密度函数采用一定的抽样策略随机抽取 N 个样本点 $\mathbf{x}_i (i=1, 2, \dots, N)$, 并计算得到响应量 Y 相应的输出值 $Y_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。

考虑函数的一阶截断 HDMR,

$$Y_i - f_0 = f_1(x_{1,i}) + \dots + f_n(x_{n,i}) + o(\mathbf{x}\mathbf{x}') \quad (6)$$

其中: $f_0 = E(Y)$, $f_i(x_{i,t}) = E(Y | x_i) - f_0$; $o(\mathbf{x}\mathbf{x}')$ 表示高阶截断误差; $t=1, 2, \dots, N$ 表示样本标号。

近似式(6)中一阶项 $f_i(x_{i,t}) (i=1, 2, \dots, n)$, 也即响应量条件期望 $E(Y | x_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 的态相关模型可以表示为如下的形式:

$$Y_i - f_0 = \mathbf{x}_i^T \mathbf{p}_i + e_i = p_{1,t}x_{1,t} + \dots + p_{n,t}x_{n,t} + e_i; e_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (7)$$

其中: e_i 为观测噪声; $p_{i,t} (i=1, 2, \dots, n)$ 为随相应的状态变量 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 而变化的态相关参数; Y_i 为相应的有序输出。

当采用 IRW(Integrated Random Walk)时,式(7)可表示为状态空间的形式:

观测方程:

$$Y_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{p}_i + e_i \quad (8)$$

状态方程:

$$p_{i,t} = p_{i,t-1} + d_{i,t-1}, d_{i,t} = d_{i,t-1} + \eta_{i,t} \quad (9)$$

其中: $e_{i,t}$ (观测噪声)和 $\eta_{i,t} (i=1, 2, \dots, n)$ (系统扰动)分别为均值为零; 方差为 σ_e^2 和 σ_η^2 的高斯白噪声

输入。

有了式(8)和式(9)所示的 SDP 关系,应用递归卡尔曼滤波(KF)以及相应的固定区间平滑(FIS)法则来估计相应的状态相关参数 $p_{i,t}$, 接着利用 $f_i(x_{i,t}) = p_{i,t}x_{i,t}$ 得到响应量函数的一阶 HDMR 模型,即可以求解基于方差的混合灵敏度。

2.2 基于重要抽样法的 SDP 方法

针对 Monte Carlo 方法抽样效率低,且对小概率问题需要抽取大量样本才能收敛的问题,可以采用重要抽样法来提高抽样效率。因此,为了提高本文混合灵敏度指标求解的 SDP 方法的计算效率,本文将基于重要抽样法对所提的混合灵敏度指标进行转化。

重要抽样法通过引入重要抽样密度函数,可将失效概率积分变化成为如下形式:

$$P_f = \int \dots \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} h_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E \left[I_F(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \right] \quad (10)$$

其中: R^n 为 n 维变量空间; $f_X(\mathbf{x})$ 为随机变量的联合概率密度函数; $h_X(\mathbf{x})$ 为重要抽样密度函数。因此结合重要抽样法的基于方差的局部与全局混合灵敏度 $\delta_i^{P_i}$ 为:

$$\delta_i^{P_i} = V \left(E \left(\left. \frac{I_F(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \right| x_i \right) \right) \quad (11)$$

在重要抽样法的基础上结合 SDP 法进行混合灵敏度的求解,提高了抽样效率,减小了计算方差,同时也减少了计算成本。

2.3 基于截断重要抽样法的 SDP 方法

同样,我们也可以基于截断重要抽样法对所提的混合灵敏度指标进行转化。与重要抽样法相比,截断重要抽样法可以在保证计算精度的同时更进一步提高抽样效率。截断重要抽样法是通过建立 β 球,并构造样本点落在球外的截断重要抽样函数,就可以在传统重要抽样法的基础上进一步减少在结构安全域内的抽样,提高抽样效率。

截断重要抽样法可将失效概率的计算公式写成如下形式:

$$P_f = \int \dots \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) I_\beta(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} h_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E \left[I_F(\mathbf{x}) I_\beta(\mathbf{x}) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \right] \quad (12)$$

其中, $I_\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{x}\|^2 < \beta^2 \\ 1, & \|\mathbf{x}\|^2 \geq \beta^2 \end{cases}$ 为 β 超球区域内的指示函数 $I_\beta(\mathbf{x})$ 。类似于式(11), 结合截断重要抽样法的基于方差的局部与全局混合灵敏度 δ_i^P 可以表示为如下形式:

$$\delta_i^P = V \left(E \left(\frac{I_F(\mathbf{x}) I_\beta(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_j}^{(k)}} \Big| x_i \right) \right) \quad (13)$$

在截断重要抽样法进行抽样的基础上结合 SDP 法进行混合灵敏度的求解, 比传统的重要抽样

方法更进一步提高了计算效率。

SDP 方法仅需要一组模型输入输出, 就可以一次性求得给定输入条件下的条件期望, 进而求得本文所建立的基于方差的混合灵敏度。该方法计算量不依赖于变量维数, 大大减少了矩独立灵敏度分析的计算成本, 简单灵活易于实现。此外, 文中采用重要抽样法、截断重要抽样法进行抽样, 使得样本更容易收敛, 与传统的抽样方法相比大大提高了抽样效率, 与高效的 SDP 方法相结合, 更进一步提高了计算效率。表 1 对文中涉及的 6 种方法进行简述。

表 1 几种方法的特性对比

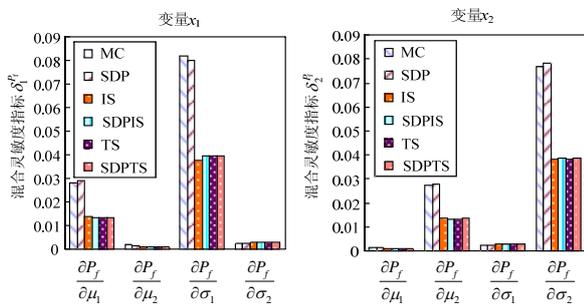
Table 1 A contrast of the characteristics of various methods

| 方法 | MC | SDP+MC | IS | SDP+IS | TS | SDP+TS |
|--------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 抽样密度函数 | $f_X(\mathbf{x})$ | $f_X(\mathbf{x})$ | $h_X(\mathbf{x})$ | $h_X(\mathbf{x})$ | $I_\beta(\mathbf{x})/h_X(\mathbf{x})$ | $I_\beta(\mathbf{x})/h_X(\mathbf{x})$ |
| 样本数量级 | 10^4 | 10^4 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 |
| 计算成本 | $N \times N \times k$ | N | $N \times N \times k$ | N | $N \times N \times k$ | N |

3 算例

3.1 数值算例

线性极限状态函数 $g(\mathbf{x}) = 4 - x_1 - x_2$, 其中基本变量 x_1 和 x_2 均服从独立的正态分布, 即 $x_i \sim N(1, 3^2) (i=1, 2)$ 。其混合灵敏度指标如图 1 所示。



(图中 MC 表示 Monte Carlo 方法, SDP 表示态相关参数法, IS 表示重要抽样法, SDPIS 表示重要抽样法与 SDP 法相结合, TS 表示截断重要抽样法, SDPTS 表示截断重要抽样法与 SDP 法相结合)

图 1 算例 1 的混合灵敏度结果

Fig.1 Mixed sensitivity results for Example 1

通过图 1 的结果可以看出, 由于基于不同的样本类型, 基于 IS 和 TS 转化的混合灵敏度结果与基于 MC 的混合灵敏度结果并不相同, 但得到的输入变量的排序却是一致的。采用基于 MC、IS 和 TS 的 SDP 方法求解的混合灵敏度结果分别与原 MC、IS 和 TS 法结果吻合的很好, 从而验证了 SDP 方法求解混合灵敏度的有效性。由于 IS 和 TS 方法本身可以提高抽样效率(本例中 MC 法抽样 20000 次收敛、IS 法抽样 2000 次收敛、TS 法抽样 1000 次收敛), 将其与 SDP 方法的高效性相结合, 能够使混

合灵敏度求解的计算量大大减小。为了更形象表示各种方法之间的差异, 如表 2 说明。

表 2 本例中 6 种方法的抽样次数及计算时间

Table 2 Function evaluation and time consuming of six methods

| 方法 | MC | SDP+MC | IS | SDP+IS | TS | SDP+TS |
|--------|-------|----------|---------|---------|---------|--------|
| 抽样次数 | 20000 | 10000 | 2000 | 2000 | 1000 | 1000 |
| 计算时间/s | 2034 | 179.4060 | 49.7486 | 16.6315 | 19.8589 | 5.7879 |

3.2 工程算例

某内压圆筒容器所用材料 15MnV, 基本随机变量取为内径 D 、内压强 P 、壁厚 t 及屈服极限 σ_s , 基本随机变量相互独立且服从正态分布, 其分布参数如表 3 所示。对于常见的内压圆筒形薄壁容器受二向应力, 即轴向应力 $S_L = \frac{PD}{4t}$, 周向应力

$S_t = \frac{PD}{2t}$, 径向应力 $S_r \approx 0$ 。建立内压圆筒的极限状态函数为: $g = \sigma_s - S_{eq}$ 。其中 S_{eq} 为等价应力, 选用第一强度理论确定的等价应力 $S_{eq} = \max\{S_L, S_t\} = \frac{PD}{2t}$ 。其混合灵敏度如图 2、图 3 所示。

表 3 基本随机变量的分布参数

Table 3 Distribution parameters of basic variables

| 随机变量 x | 均值 μ_x | 标准差 σ_x |
|-----------------------|------------|----------------|
| D/mm | 460 | 7 |
| P/MPa | 20 | 2.4 |
| t/mm | 19 | 0.8 |
| σ_s/MPa | 300 | 31.4 |

图 2 结果表明, 对于工程实际中的问题, 采用 Monte Carlo 方法抽样的 SDP 方法与单独使用 Monte Carlo 方法得到的混合灵敏度排序与 Monte Carlo 方法相一致, 同时, 由图 3 也可以很明显的看出, SDP 方法与 IS、TS 方法结合得到的混合灵敏度排序也分别与单独使用 IS、TS 方法得到的排序一致, 这就再次说明 SDP 方法的适用性。另外, 可以计算出内压强 P 、屈服极限 σ_s 对失效概率的影响较大, 壁厚 t 次之, 内径 D 最小。

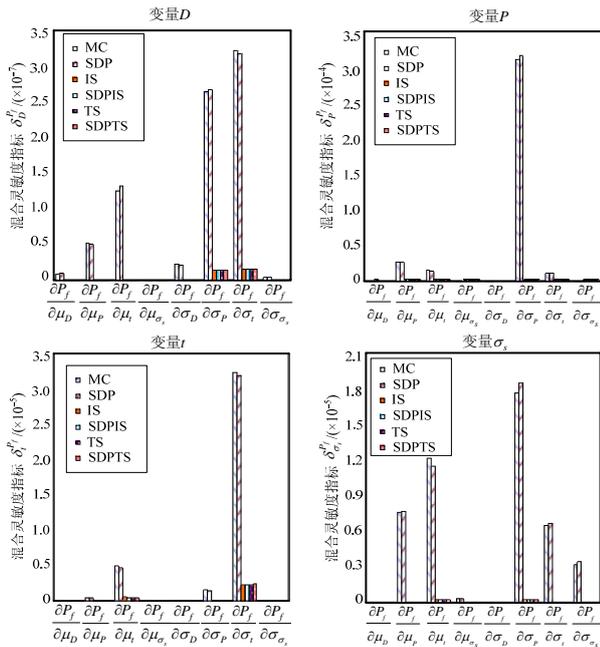


图 2 算例 2 的混合灵敏度结果

Fig.2 Mixed sensitivity results for Example 2

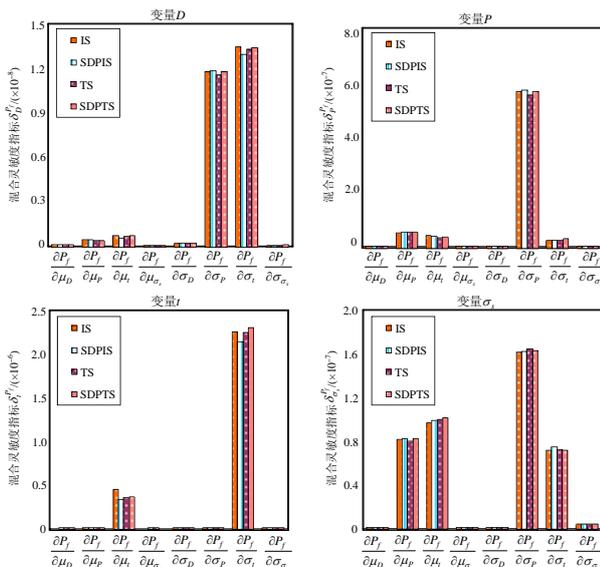


图 3 算例 2 中的 IS、SDPIS、TS、SDPTS 得到的结果

Fig.3 Mixed sensitivity results of IS、SDPIS、TS、SDPTS for Example 2

对于独立正态变量, 其混合灵敏度指标可以写为如下形式:

$$\delta_{\mu_j}^P = V \left(E \left[\frac{I_F(\mathbf{x})}{\sigma_{x_j}} \cdot \frac{x_j - \mu_{x_j}}{\sigma_{x_j}} \middle| x_i \right] \right) \quad (14)$$

$$\delta_{\sigma_j}^P = V \left(E \left[\frac{I_F(\mathbf{x})}{\sigma_{x_j}} \cdot \left[\left(\frac{x_j - \mu_{x_j}}{\sigma_{x_j}} \right)^2 - 1 \right] \middle| x_i \right] \right) \quad (15)$$

由上式可知, 所有变量对壁厚 t 、内压强 P 的混合灵敏度应该较大, 在图 2 中可以看到每个变量对这两个变量参数的混合灵敏度都比较大, 从而反映了本文基于失效概率偏导数的混合灵敏度的有效性。可见, 在工程应用中, 本文得到的随机变量对失效概率偏导数的混合灵敏度可以对工程实际提供有用的信息。

4 结论

本文建立了输入变量对失效概率偏导数的矩独立的混合灵敏度指标, 它可以有效分析输入变量对失效概率偏导数的影响程度, 从而得到有效的重要性排序, 为工程实践提供一定的指导作用。在得到矩独立的混合灵敏度指标与基于方差的混合灵敏度指标之间的关系后, 本文建立的 SDP 方法, 仅需要一组输入输出, 就可以一次性求得所有随机变量基于失效概率偏导数的混合灵敏度, 在保证计算精度的同时大大提高了计算效率。同时, 又将 SDP 方法与重要抽样法、截断重要抽样法相结合, 使得落入失效域的样本点增多, 进一步提高了抽样效率, 大大节约了计算成本, 对线性、非线性、单模式、多模式等的功能函数均适用。因此, 具有广泛的适用性。

参考文献:

[1] Castillo E, Minguez R, Castillo C. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems[J]. Reliab Eng Sys Saf, 2008, 93(12): 1788—1800.
 [2] 张峰, 吕震宙. 可靠性灵敏度分析的自适应重要抽样法[J]. 工程力学, 2008, 25(4): 80—84.
 Zhang Feng, Lü Zhenzhou. An adaptive importance sampling method for estimation of reliability sensitivity [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(4): 80—84. (in Chinese)

- comparative study of ventilated supercavity shape in watwe tunnel and infinite flowfield [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2010, 22(5): 689—696.
- [3] 贾彩娟, 张宇文. 回转体局部空泡流的数值分析[J]. *西北工业大学学报*, 2003, 21(3): 273—276.
Jia Caijuan, Zhang Yuwen. A numerical nonlinear analysis of the flow around partially cavitating axisymmetric body [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2003, 21(3): 273—276. (in Chinese)
- [4] Hu Chao, Yang Honglan. Unsteady supercavitating flow past cones [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2006, 18(3): 262—272.
- [5] 张学伟, 张亮, 张嘉钟, 魏英杰, 王聪. 通气超空泡稳定性分析的一种数值算法[J]. *力学学报*, 2008, 40(6): 820—824.
Zhang Xuewei, Zhang Liang, Zhang Jiazhong, Wei Yingjie, Wang Cong. A numerical method for the stability analysis of ventilated supercavity [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(6): 820—824. (in Chinese)
- [6] 金大桥, 王聪, 魏英杰. 通气超空泡水下射弹实验研究[J]. *工程力学*, 2011, 28(9): 214—222.
Jin Daqiao, Wang Cong, Wei Yingjie. Experimental study of ventilated supercavity by underwater projectile [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(9): 214—222. (in Chinese)
- [7] 隗喜斌, 魏英杰, 黄庆新. 通气超空泡临界通气率的水洞试验分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(5): 797—799.
Wei Xibin, Wei Yingjie, Huang Qingxin. Experimental investigation of critical ventilating coefficient of ventilated supercavity in water tunnel [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2007, 39(5): 797—799. (in Chinese)
- [8] Logvinovich, G V, Syeryebryakov V V. On methods of calculations of clender asisymmetric cavitites [M]. *Gidromehnika*, 1975, 32: 64—69.
- [9] Semenenko V N. Dynamic processes of supercavitation and computer simulation [C]// VKI special Course on Supercavitating Flows. Brussels: RTO-AVT and VKI, 2001: RTO-EN- 010(11): 205—237.
- [10] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 30—60.
Li Xing. Integral equation [M]. Beijing: Science Publishing House, 2008: 30—60. (in Chinese)
- [11] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 70—90.
Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear vibrations [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 70—90. (in Chinese)
- [12] Jiang Weihua, Wang Hongbin. Hopf-transcritical bifurcation in retarded functional differential equations [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2010, 73(11): 3626—3640.

(上接第 276 页)

- [3] 陈磊, 吕震宙, 宋述芳. 模糊可靠度灵敏度分析的线抽样方法[J]. *工程力学*, 2008, 25(7): 45—51.
Chen Lei, Lü Zhenzhou, Song Shufang. Line sampling algorithm for fuzzy reliability sensitivity analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(7): 45—51. (in Chinese)
- [4] Helton J C, Davis F J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003, 81(1): 23—69.
- [5] Saltelli A, Marivoet J. Non-parametric statistics in sensitivity analysis for model output: A comparison of selected techniques [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 1990, 28(2): 229—253.
- [6] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 55(1): 221—280.
- [7] Chun M H, Han S J, Tak N I. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in acumulative distribution function [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2000, 70(3): 313—321.
- [8] Liu H B, Chen W, Sudjianto A. Relative entropy based method for probabilistic sensitivity analysis in engineering design [J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, 128(3): 326—333.
- [9] Boronovo E. A new uncertainty importance measure [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771—784.
- [10] Cui L J, Lu Z Z, Zhao X P. Moment-independent importance measure of basic random variable and its probability density evolution solution [J]. *Science China Technological Sciences*, 2010, 53(4): 1138—1145.
- [11] Li L Y, Lu Z Z, Feng J, Wang B T. Moment-independent importance measure of basic variable and its state dependent parameter solution [J]. *Structural Safety*, 2012, 38: 40—47.
- [12] Ratto M, Pagano A, Young P C. Non-parametric estimation of conditional moments for sensitivity analysis [J]. *Reliab Eng Syst Saf*, 2009, 94(2): 237—243.
- [13] Ratto M, Tarantola S, Saltelli A, Young P C. Accelerated estimation of sensitivity indices using state dependent parameter models [M]. Hanson K M, Hemez F M, ed. *Sensitivity Analysis of Model Output, Proceedings of the 4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO 2004)*, Santa Fe, New Mexico, March 8—11, 2004: 61—70.
- [14] Ratto M, Pagano A, Young P C. State dependent parameter meta-modelling and sensitivity analysis [J]. *Computer Physics Communications*, 2007, 177(11): 863—876.
- [15] Young P C. Stochastic, dynamic modelling and signal processing: Time variable and state dependent parameter estimation [M]. In: Fitzgerald W J, Smith R L, Walden A T, Young P C, editors. *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 74—114.