

文章编号: 1000-4750(2013)10-0219-08

# 结构二次二阶矩可靠度指标的回归分析预测算法

白 冰, 张清华, 李 乔

(西南交通大学桥梁工程系, 成都 610031)

**摘 要:** 针对具有强非线性结构功能函数的可靠度指标计算问题, 通过数值抽样及回归分析方法对改进的功能函数二阶展开形式进行了系统研究, 揭示了二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{SORM}}$  与一次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{FORM}}$  之间的关系规律。根据上述规律结合线抽样 Monte Carlo 法, 建立了基于回归分析预测算法的可靠度分析方法。该方法通过对若干基本抽样点的回归分析, 确定了  $\beta_{\text{SORM}}$  与  $\beta_{\text{FORM}}$  之间一般关系规律的具体表达式, 从而实现了强非线性可靠度问题的高精度求解。研究表明: 所建立的方法能够有效改善传统二阶可靠度算法计算过程繁琐、求解效率低下的问题; 在求解精度、适用范围及算法稳定性等方面具有优势; 且计算直观简便, 易于为一般设计人员掌握, 更适用于实际工程应用。

**关键词:** 结构可靠度; 分析方法; 二次二阶矩法; 回归分析预测; 线抽样

**中图分类号:** O213.2; TU311.2 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.07.0501

## REGRESSION ANALYSIS-PREDICTION ALGORITHM FOR STRUCTURAL SECOND-ORDER SECOND-MOMENT RELIABILITY INDEX EVALUATION

BAI Bing, ZHANG Qing-hua, LI Qiao

(Department of Bridge Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** Aiming at the reliability index calculation of a strong nonlinear structural performance function, the numerical sampling and regression analysis methods are introduced to analyze the second-order expansion of a modified performance function. Thereby the form of general law between SOSM reliability index  $\beta_{\text{SORM}}$  and FOSM reliability index  $\beta_{\text{FORM}}$  is obtained. On the basis of a regression analysis-prediction algorithm, a new reliability analysis method is presented according to the general law above and the application of a line sampling Monte Carlo method. Through the regression analysis of certain sampling points, the proposed algorithm can establish the specific expression of a general law between  $\beta_{\text{SORM}}$  and  $\beta_{\text{FORM}}$ . And the high precision solution of a strong nonlinear performance function reliability index can be achieved. The study results show that a cumbersome calculation and an inefficient iteration can be alleviated effectively by the present algorithm. The advantages of the present method in accuracy, application scope and calculation stability are obvious. Because of its convenience and intuition, the present algorithm is easy to be mastered by general designers and applied to an actual engineering analysis.

**Key words:** structural reliability; analysis method; SOSM; regression analysis prediction; line sampling

收稿日期: 2012-07-09; 修改日期: 2012-12-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(50908192); 西南交通大学“踏实之星——新世纪优秀人才后备人选培养项目”

通讯作者: 白冰(1989—), 男, 山东菏泽人, 博士生, 主要从事大跨度斜拉桥结构施工可靠度研究(E-mail: bbai89@126.com).

作者简介: 张清华(1975—), 男, 河南虞城人, 副教授, 博士, 主要从事大跨度斜拉桥结构可靠度及钢结构与钢-混组合结构研究(E-mail: swjtuzqh@126.com);

李乔(1954—), 男, 黑龙江铁力人, 教授, 博士, 主要从事桥梁结构空间行为及桥梁结构健全性评估研究(E-mail: ql-ql@home.swjtu.edu.cn).

结构可靠性理论是结构可靠度分析的基础,它对于相关规范的制定、结构设计和安全评定均具有重要意义。当前计算结构可靠度的主要方法包括一次二阶矩法(FORM)、二次二阶矩法(SORM)、响应面法(RSM)以及 Monte Carlo 数值算法。其中一次二阶矩法(FORM)与二次二阶矩法(SORM)均属于矩法范畴,可统称为快速概率积分(Fast Probability Integration, FPI)算法。

虽然 Monte Carlo 法(MCS)计算精度高、适用范围广,尤其在与响应面法联合求解大型复杂结构时具有独特的优势。但当结构失效概率较小时,为达到要求的计算精度,其抽样次数会急剧增多,从而使得计算效率大幅降低。因而,目前结构可靠度分析中应用最为广泛的仍是国际安全度联合委员会(JCSS)推荐的一次二阶矩方法(FORM)<sup>[1-4]</sup>。但限于一阶可靠度分析方法的先天缺陷,当功能函数在验算点处的非线性程度较强时,其计算结果将与精确值出现较大的偏差。而一些特别重要的结构,如核电站保护壳和生命线工程等,对可靠度计算精度的要求较高。为实现可靠度的精确计算,国内外学者相继发展了计算结构可靠度指标的二次二阶矩法,由于该方法不仅保留有一次二阶矩法的全部信息,还考虑了功能函数中非线性项的影响,故而其计算精度较一次二阶矩法显著提高。文献[5]构造了一个近似计算结构失效概率的三项表达式,该方法可实现失效概率的直接代数求解,在实际工程应用方面具有一定优势。但计算中需要进行复数运算,且适用范围及计算精度均较为有限。文献[6]应用数学逼近中的拉普拉斯(Laplace)渐进方法求解结构的失效概率进而计算结构的可靠度指标,取得了较为满意的结果。但限于方法本身的数学基础,其计算过程繁杂,不便于工程应用。文献[7]和文献[8]结合结构功能函数在设计验算点处的平均主曲率,发展了二次二阶矩可靠度指标的实用计算方法,该方法在推动二次二阶矩法的工程应用方面进行了有益的探索。

为满足二次二阶矩法可靠度指标计算的便捷性和精度要求,并利用 Monte Carlo 法在较大失效概率条件下抽样代价小的固有优点,在文献[7]所提出的功能函数处理方法的基础上发展了一种更为高效简便的计算方法。该方法利用回归分析获得改进后功能函数二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{SORM}}$  与一次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{FORM}}$  之间的关系规律,并据此

结合 Monte Carlo 法实现了对二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{SORM}}$  的高精度求解。在此基础上,结合典型算例对该方法的应用问题进行了深入探讨。研究成果可为结构的可靠性设计提供理论依据,对于促进可靠度理论的工程应用具有积极意义。

## 1 极限状态方程的完全二阶展开

结构的极限状态一般通过其极限状态方程进行描述。若某一结构的功能函数为  $g(\mathbf{V})$ ,其中  $\mathbf{V}=(V_1, V_2, \dots, V_n)$ ,则其对应的极限状态方程  $g(\mathbf{V})=0$  表征的即为该结构的极限状态曲面。为便于通用分析,一般需将随机向量  $\mathbf{V}$  转化至  $n$  维标准正态空间中,其步骤如下:

- 1) 将  $\mathbf{V}$  中非正态随机变量进行当量正态化,得到正态随机向量  $\mathbf{V}'$ ;
- 2) 采用线性变换方法将  $\mathbf{V}'$  转化为线性无关(统计独立)的正态随机向量  $\mathbf{V}''$ ;
- 3) 对正态随机向量  $\mathbf{V}''$  进行正则化变换,将其转化为线性无关的标准正态随机向量  $\mathbf{Z}=(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ 。

经上述变换后,即可得到  $n$  维标准正态空间下结构的极限状态方程  $g(\mathbf{Z})=0$ 。

通常情况下,实际结构的极限状态方程表达式往往极为复杂,难以实现可靠度指标的直接高精度求解。为解决这一问题,传统的二次二阶矩方法一般首先运用一次二阶矩方法求解结构的一次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{FORM}}$  及验算点  $\mathbf{Z}^*(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ ;在此基础上,利用泰勒级数将极限状态方程  $g(\mathbf{Z})=0$  在验算点处展开至二阶项,即:

$$g(\mathbf{Z}) = g(\mathbf{Z}^*) + \sum_{i=1}^n (Z_i - z_i^*) \left\{ \frac{\partial g}{\partial z_i^*} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Z_i - z_i^*) (Z_j - z_j^*) \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial z_i^* \partial z_j^*} \right\} = 0 \quad (1)$$

由于验算点  $\mathbf{Z}^*(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$  位于极限状态曲面上,则有  $g(\mathbf{Z}^*)=0$ , 式(1)变为:

$$g(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n (Z_i - z_i^*) \left\{ \frac{\partial g}{\partial z_i^*} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Z_i - z_i^*) (Z_j - z_j^*) \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial z_i^* \partial z_j^*} \right\} = 0 \quad (2)$$

对式(2)进行正交变换,确定转换矩阵  $\mathbf{H}$ : 将原有坐标系进行旋转,使得坐标变换为  $\mathbf{Z}'=\mathbf{H}\mathbf{Z}$  后,式中的

交叉二次项全部消去, 仅余下完全平方项、线性项和常数项, 即:

$$g(\mathbf{Z}') = \sum_{i=1}^n m_i Z'_i + \sum_{i=1}^n n_i Z'^2_i + t = 0 \quad (3)$$

进一步整理可得:

$$g(\mathbf{Z}') = \sum_{i=1}^n n_i \left( Z'_i + \frac{m_i}{2n_i} \right)^2 + t' = 0 \quad (4)$$

由式(4)可以看出, 极限状态方程在设计点处的泰勒二阶展开式所表征的失效曲面(极限状态曲面)实际上是由一族圆锥曲线所形成的曲面, 主要包括椭圆面(椭球面)、抛物面和双曲面三种情况。而椭圆面(椭球面)是一个封闭的曲面, 即此时的失效曲面已转化为闭合的形式, 如图 1 所示。而文献[9]指出, 失效曲面实际上是不闭合的: 若失效曲面闭合, 则失效域和可靠域二者之中必有一个是闭合的空间。不妨假设失效域为闭合空间, 则在可靠域内可找到荷载类变量值为无穷大而抗力类变量值为无穷小的一点, 依据常识, 这一点是不可能存在于可靠域之内的, 即失效曲面闭合的情况是不存在的。

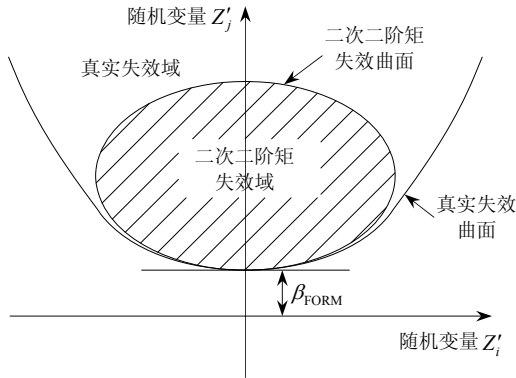


图 1 椭圆形失效曲面闭合示意图

Fig.1 Illustration of ellipsoidal closed failure surface

而实际结构中, 极限状态方程的二阶展开式往往会蜕变为椭圆(椭球)方程, 造成二次二阶矩失效曲面发生闭合。这样就会导致求解方法本身与失效曲面不闭合相矛盾, 致使其丧失适用性。

## 2 结构功能函数的改进

为了克服完全二阶展开方法的上述固有弊端, 避免出现闭合形式的失效曲面, 在结合文献[7]所提出方法的基础上对结构功能函数的完全二阶展开式进行改进以更好地模拟真实失效曲面, 以期获得更好的求解精度。

由 HL-RF 法知  $\mathbf{Z}^* = \alpha \beta_{\text{FORM}}$ , 将其代入式(2)中功

能函数并写为矩阵形式:

$$g(\mathbf{Z}) = \nabla \mathbf{g}^T \mathbf{Z} - \nabla \mathbf{g}^T \alpha \beta_{\text{FORM}} + \frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*)^T \nabla^2 \mathbf{g} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*) \quad (5)$$

式中:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{g} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_1^*}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_2^*}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_n^*} \right\}^T \\ \alpha = \frac{-\nabla \mathbf{g}}{|\nabla \mathbf{g}|} \\ \mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T \end{cases} \quad (6)$$

由于  $-\nabla \mathbf{g}^T \alpha = |\nabla \mathbf{g}| > 0$ , 式(5)经变换可得:

$$g(\mathbf{Z}) = \beta_{\text{FORM}} - \alpha^T \mathbf{Z} + \frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*)^T \mathbf{B} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*) \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{B} = \frac{\nabla^2 \mathbf{g}}{|\nabla \mathbf{g}|}$ 。

将坐标系进行旋转, 得到一组新的相互独立的标准正态随机变量  $\mathbf{X} = \mathbf{H}^T \mathbf{Z}$ , 其中  $\mathbf{H}$  为一标准正交阵。由于旋转方向的任意性, 可令旋转矩阵  $\mathbf{H}$  的第  $n$  列为向量  $\alpha$  (几何上即使新坐标系下的  $X_n$  坐标轴指向验算点, 故有  $X_n = \alpha^T \mathbf{Z}$ ), 则式(7)变为:

$$g'(\mathbf{X}) = -(X_n - \beta_{\text{FORM}}) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ X_n - \beta_{\text{FORM}} \end{bmatrix}^T \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ X_n - \beta_{\text{FORM}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_{n-1})^T$ ;  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H}$ 。

为满足失效曲面不闭合的要求, 将式(8)近似为<sup>[10]</sup>:

$$g'(\mathbf{X}) = -(X_n - \beta_{\text{FORM}}) + \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbf{A} \mathbf{X}' \quad (9)$$

由于新坐标系下各坐标轴的正交关系, 矩阵  $\mathbf{X}'$  的变换将不受  $X_n$  影响。此时可再次仿照前述做法将坐标系统  $X_n$  轴进行旋转:  $\mathbf{Y}' = \mathbf{K}^T \mathbf{X}'$ , 其中  $\mathbf{K}$  为一个  $(n-1) \times (n-1)$  阶标准正交矩阵。在此基础上即可将式(9)最后一项化为不含交叉项的标准二次型:

$$g(\mathbf{Y}) = -(Y_n - \beta_{\text{FORM}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_j Y_j^2 \quad (10)$$

其中  $Y_n = X_n$ , 对应的极限状态方程为:

$$g(\mathbf{Y}) = -(Y_n - \beta_{\text{FORM}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_j Y_j^2 = 0 \quad (11)$$

事实上, 简化的  $\mathbf{X}'$  矩阵是略去了  $g'(\mathbf{X})$  对  $X_n$  的二阶偏导, 从而得到一个近似的极限状态方程, 该方程示意图如图 2 所示。此时的破坏曲面是一个二次抛物面, 因而它总是开口的, 满足之前失效曲面不闭合的要求。

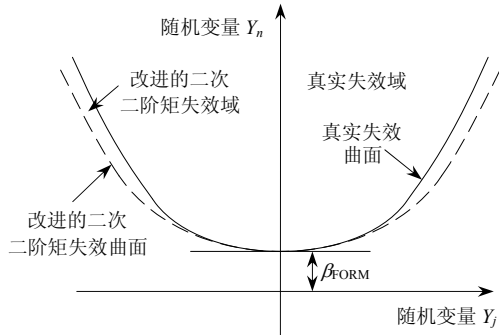


图2 改进的二次二阶矩失效曲面示意图  
Fig.2 Illustration of modified SORM failure surface

### 3 基于回归分析预测的结构可靠度指标算法

根据所构造出的上述结构极限状态方程式(11),理论上已可以通过卷积积分方法求解结构的失效概率:

$$P_f = \iiint_{g(\mathbf{Y}) \geq 0} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [ \int_{\beta_{FORM}}^{+\infty} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}_n ] d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_{n-1} \quad (12)$$

但事实上由于极限状态方程的维度  $n$  事前难以预料,且限于多维积分本身的难度,上述积分实质上往往是难以进行求解的。

为此,在对大量结构可靠度指标数据进行分析的基础上,提出解决这一问题的新思路:在功能函数二阶展开形式一定的情况下,通过回归分析探寻一次二阶矩可靠度指标  $\beta_{FORM}$  与二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{SORM}$  之间存在的关系规律,进而实现结构二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{SORM}$  的求解。

基于上述思路,为探寻两类可靠度指标之间关系的规律性,取式(10)为结构功能函数的二阶展开形式,利用 Monte Carlo 法计算结构的二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{SORM}$ 。不失一般性,式(10)中所有系数  $k_j$  均为随机选取。为方便表述,各功能函数以其随机变量个数(维度)  $n$  及平均主曲率半径  $R$  进行标示<sup>[7]</sup>:

$$R = \frac{n-1}{K_s} \quad (13)$$

式中,  $K_s$  为极限状态曲面在设计验算点  $\mathbf{Z}^*$  处的主曲率之和:

$$K_s = \sum_{j=1}^{n-1} k_j \quad (14)$$

各随机生成的功能函数二次二阶矩可靠度指

标  $\beta_{SORM}$  随  $\beta_{FORM}$  的变化结果如图 3 所示。

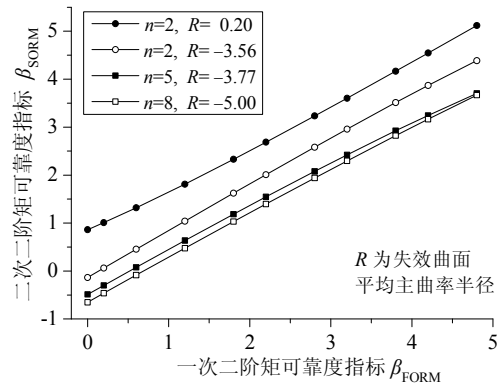


图3  $\beta_{SORM}$  随  $\beta_{FORM}$  变化示意图  
Fig.3 Variation of Second-Order Reliability Index with respect to First-Order Reliability Index

由图 3 可以看出,  $\beta_{SORM}$  与  $\beta_{FORM}$  基本呈线性分布。为此对二者进行线性回归分析,以考察其线性相关程度,回归分析结果如图 4 及表 1 所示。

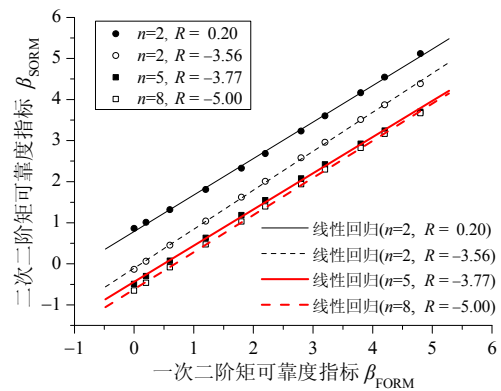


图4  $\beta_{SORM}$  相对  $\beta_{FORM}$  线性回归结果示意图  
Fig.4 Linear regression of Second-Order Reliability Index with respect to First-Order Reliability Index

表 1 各功能函数回归分析结果  
Table 1 Result of linear regression for each performance function

$g(\mathbf{Y})$ 编号	维度 $n$	平均主曲率半径 $R$	回归公式	可决系数 $R^2$
1	2	0.2	$\beta_{SORM}=0.8884\beta_{FORM}+0.786$	0.9988
2	2	-3.56	$\beta_{SORM}=0.9487\beta_{FORM}-0.106$	0.9996
3	5	-3.77	$\beta_{SORM}=0.8814\beta_{FORM}-0.439$	0.9990
4	8	-5	$\beta_{SORM}=0.9042\beta_{FORM}-0.621$	0.9997

由回归分析结果可以看出,对于所有功能函数,回归直线的可决系数  $R^2$  均超过了 0.998,可见其拟合优度较为理想,所建立的回归模型是显著的。据此可以说明,  $\beta_{FORM}$  可以解释  $\beta_{SORM}$  变动的绝大部分,二者之间存在有十分显著的线性关系。

但进一步观察图 4 所示的回归结果,可以发现,

在一次二阶矩可靠度指标 $\beta_{FORM}$ 取较小值时,  $\beta_{SORM}$ 实际点与回归直线的偏差较大, 且 $\beta_{FORM}$ 值愈小偏差愈加明显。这一点对于在无法获取较大范围 $\beta_{SORM}$ 值的情况下进行回归分析预测 $\beta_{SORM}$ 是殊为不利的。图5给出了功能函数1( $n=2, R=0.2$ )在利用 $\beta_{FORM}=0\sim 16$ 个抽样样本点后所获得的回归直线与 $\beta_{SORM}$ 数值抽样值之间的偏差。由该图结果可以看出, 由于仅利用了部分 $\beta_{SORM}$ 样本点信息, 回归直线无法对全局实现最优预测。且随着 $\beta_{FORM}$ 增大, 二者的偏差越来越大, 其拟合优度虽然理想, 但预测性能却较差。回归预测的精度已难以满足相关要求。因此, 需对其非线性影响展开分析, 以修正原回归方程, 提高预测精度。

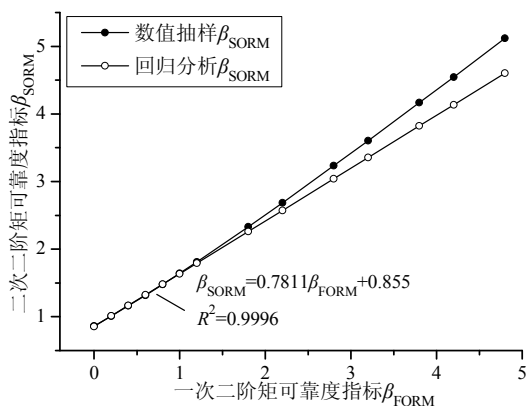


图5 功能函数1回归直线与数值抽样样本点之间偏差示意图  
Fig.5 Illustration of deviation between regression analysis line and numerical sampling  $\beta_{SORM}$

为实现非线性影响的修正, 首先需确定回归分析的函数模型。根据经验及各随机变量的分布特征, 对于多种函数形式进行了系统研究。限于篇幅, 此处仅给出以下四种典型函数模型的分析结果, 如表2所示。

表2 拟选取考察的回归函数模型

Table 2 Selected forms of nonlinear regression function model

编号	回归函数形式
1	$\beta_{SORM} = p_1 \beta_{FORM}^2 + p_2 \beta_{FORM} + p_3$
2	$\beta_{SORM} = p_1 \beta_{FORM}^3 + p_2 \beta_{FORM}^2 + p_3 \beta_{FORM} + p_4$
3	$\beta_{SORM} = p_1 / (\beta_{FORM} + p_2) + p_3 + p_4 \beta_{FORM}$
4	$\beta_{SORM} = p_1 e^{-\beta_{FORM}/p_2} + p_3 + p_4 \beta_{FORM}$

与之前线性回归做法相同, 任取一随机生成的功能函数, 选定 $\beta_{FORM}=0\sim 1$ 中的6个抽样样本点对各函数模型进行回归分析, 并预测 $\beta_{FORM}=1\sim 4.8$ 时所对应的 $\beta_{SORM}$ , 其分析结果如表3所示。

表3 各类函数模型回归分析统计特征值

Table 3 Regression statistical result of each function model

函数模型编号	可决系数 $R^2$	残差平方和	预测最大偏差
1	1	$5.37 \times 10^{-7}$	0.484
2	1	$1.75 \times 10^{-10}$	-0.291
3	1	$1.96 \times 10^{-11}$	0.040
4	1	$1.57 \times 10^{-11}$	0.007

各函数模型回归统计分析结果表明: 无论是拟合优度(可决系数  $R^2$  及残差平方和)还是预测性能(预测最大偏差), 回归函数模型4均具有较为明显的优势, 尤其是其预测性能显著优于其他3类模型, 即函数模型4能够较为精确真实地反映 $\beta_{SORM}$ 与 $\beta_{FORM}$ 之间的关系。大量回归函数模型的分析结果同时表明该函数模型在所有函数模型中的性能最为优良。因此, 可以认为在统计范畴内二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ 与一次二阶矩可靠度指标 $\beta_{FORM}$ 之间存在如下关系:

$$\beta_{SORM} = p_1 e^{-\beta_{FORM}/p_2} + p_3 + p_4 \beta_{FORM} \quad (15)$$

为验证该关系的真实性及适用性, 对图3中各功能函数采用式(15)进行回归预测分析。与前述一致, 对每一功能函数选取 $\beta_{FORM}=0\sim 1$ 中的6个样本点作为回归分析的初始样本点, 并选定 $\beta_{FORM}=1\sim 4.8$ 所对应的 $\beta_{SORM}$ 为预测域, 各函数回归分析结果如图6所示。可见, 对于图中所有功能函数, 该规律的符合精度均能令人满意。

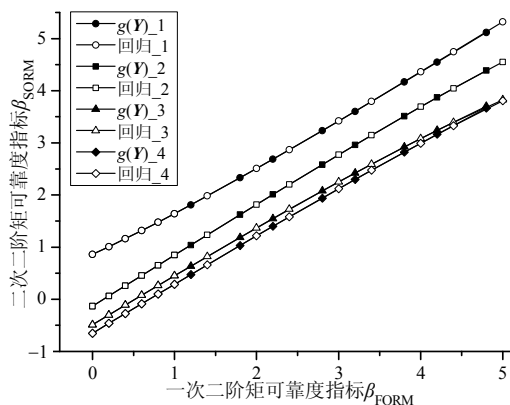


图6  $\beta_{SORM}$  相对 $\beta_{FORM}$ 非线性回归结果

Fig.6 Nonlinear regression of Second-Order Reliability Index with respect to First-Order Reliability Index

由于式(15)具有良好的精度和适用性, 因此可利用其实现二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ 的高精度计算。但由于其系数尚无法事前确定而依赖于回归分析, 因此需要利用 Monte Carlo 法抽样确定若干精确的 $\beta_{SORM}$ 样本点, 进而实现对 $\beta_{SORM}$ 的预测求解。而传统 Monte Carlo 法的主要缺点是当 $\beta_{SORM}$ 值较大

时，其抽样工作量会急剧增大，从而导致其效率大幅降低。但对于本文所提出的算法，这一缺点并不突出：由于二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ 可在 $\beta_{FORM}$ 取较小值处进行抽样，而此处失效概率 $P_f$ 相对较大，因此可实现较小抽样代价下失效概率 $P_f$ 的高精度模拟。

为进一步提高抽样效率并缩减抽样方差，引入线抽样方法<sup>[11-13]</sup>进行 Monte Carlo 抽样：对于极限状态方程式(11)，移项可得：

$$Y_n = \beta_{FORM} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_j Y_j^2 \quad (16)$$

对 $Y_j(j=1,2,\dots,n-1)$ 进行随机抽样，经式(16)可得 $Y_n$ 抽样值 $y_n$ 。设共有 $N$ 个 $y_n$ 样本点，则二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ 可按式(17)计算为：

$$\beta_{SORM} = \Phi^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(-y_n) \right) \quad (17)$$

结合之前求解思路，上述算法的主要步骤可概括如下：

步骤 1：改进功能函数。将原问题的功能函数修正改进为式(10)的抛物曲面形式；

步骤 2：获取抽样样本点。利用线抽样方法对改进的功能函数进行抽样，以获取较大失效概率情况下二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ 的若干精确样本点；

步骤 3：确定 $\beta_{SORM}$ 随 $\beta_{FORM}$ 变化的规律。利用步骤 2 中所获取的 $\beta_{SORM}$ 样本点，采用函数模型式(15)进行非线性回归分析，获取回归关系式；

步骤 4：预测 $\beta_{SORM}$ 。利用步骤 3 所得到的规律关系式，预测计算所求问题的二次二阶矩可靠度指标 $\beta_{SORM}$ ，求解结束。

### 4 算法验证及数值算例应用

#### 4.1 算法的验证和比较

为验证方法的有效性，采用多个算例对算法进行了系统验证。限于篇幅，此处仅给出两个具有代表性的参数化问题验证结果，并与文献[7]中提出的经验公式算法进行比较。

对于实际工程问题，其改进后的极限状态方程式(11)主要包括如表 4 所示的 4 种情况。

针对所示实际出现的 4 种情况，分别采用两个代表性算例对其进行验证。前两种情况可由问题 1 进行验证，后两种情况则可由问题 2 进行验证。

表 4 实际结构极限状态方程取值类型

Table 4 Different limit state equation type in actual structure

编号	各系数 $k_j$ 取值	各系数 $k_j$ 互等与否
1	均为正值	是
2	均为负值	是
3	均为同号	否
4	出现反号	否

问题 1：

已知待求解问题的极限状态方程为一抛物曲面，即式(11)形式：

$$g(\mathbf{Y}) = -(Y_n - \beta_{FORM}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_j Y_j^2 = 0 \quad (18)$$

分别考虑如表 5 所示的情况。

表 5 问题 1 各情况极限状态方程取值特征

Table 5 Factor characteristics of limit state equation in question 1

编号	随机变量个数 $n$	方程系数 $k_j$	主曲率半径 $R$
1	5	互相相等	5
2	5	互相相等	-5
3	8	互相相等	5
4	8	互相相等	-5

注：各系数具体值可由式(13)和式(14)计算得出。

可以看出，此时的实效曲面实际上是一个旋转抛物面。同时利用本文方法及文献[7]方法计算该极限状态方程所对应的可靠度指标 $\beta_{SORM}$ ，并与数值抽样值进行对比。各方法相应的计算结果如图 7 所示，其中数值抽样值为采用直接 Monte Carlo 法抽样 $10^7$ 次获得。

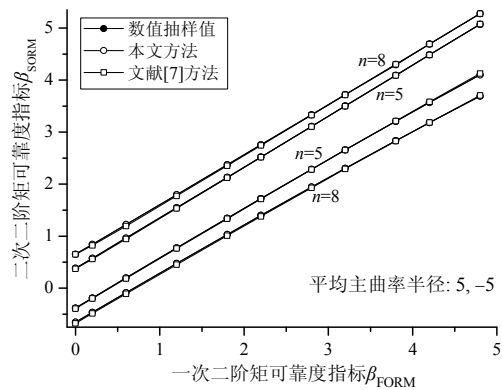


图 7 问题 1 各计算方法比较

Fig.7 Results comparison of Question1 using different methods

由图 7 可以看出，在失效曲面为旋转抛物面的情况下，对于问题中所要求的各种参数化变化情况，所提出的方法和文献[7]方法均与抽样值吻合良好，两种方法的精度均令人满意。

问题 2:

已知待求解问题存在 8 个随机变量, 其极限状态方程如下式所示:

$$g(\mathbf{Y}) = -(Y_8 - \beta_{\text{FORM}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^7 k_j Y_j^2 = 0 \quad (19)$$

考虑如下 2 种系数取值情况:

表 6 极限状态方程各系数取值

Table 6 Factor values of limit state equation

	$k_j$ 系数取值		$k_j$ 系数取值	
	问题 1	问题 2	问题 1	问题 2
$k_1$	-0.24	-1.3	$k_5$	-0.2
$k_2$	-0.16	1.0	$k_6$	-0.26
$k_3$	-0.2	-1.1	$k_7$	-0.16
$k_4$	-0.18	0.9		-1

注: 问题 1 和问题 2 平均主曲率半径  $R$  均为 -5。

由极限状态方程可以看出, 此时的失效曲面是一个八维抛物曲面, 且各系数互不相同, 问题 2 中更有反号的情况出现。因此对于这样的一个高维复杂情况, 其可靠度指标的计算是极为困难的。下面分别利用本文方法及文献[7]方法计算两种情况下该极限状态方程所对应的可靠度指标  $\beta_{\text{SORM}}$ , 并与数值抽样解进行对比。各方法的可靠度计算结果如图 8 所示。其中数值抽样值为采用直接 Monte Carlo 法抽样  $10^7$  次获得。

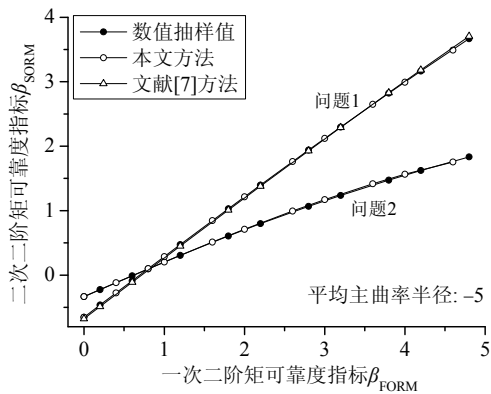


图 8 问题 2 各计算方法比较

Fig.8 Results comparison of Question 2 using different methods

问题 2 的分析结果表明, 对于问题 1, 所提出的方法与文献[7]方法的求解精度均令人满意, 求解结果与文献[7]的结论基本相符。但对于问题 2 这种更为复杂的失效曲面, 由于文献[7]方法仅考虑了极限状态方程的平均主曲率半径  $R$ 、主曲率之和  $K_s$  及随机变量个数  $n$  这 3 个因素的影响, 而忽略了各系数  $k_j$  自身的取值变化, 因此该方法无法应对诸如本题之类的复杂情况, 其求解结果与数值抽样值相

比偏差较大。而所提出的方法是根据每一问题的具体情况进行回归预测求解, 上述所有因素均已考虑在内, 因此该方法在这种复杂情况下仍可实现  $\beta_{\text{SORM}}$  的高精度求解。图 8 表明, 对于问题 1 和问题 2 两种情况, 所提出的方法均与数值抽样结果符合良好, 求解精度令人满意。

综合对比问题 1 和问题 2, 可以发现: 所提出方法的精度较文献[7]方法更高, 其应用范围更为广泛。对于高维小失效概率、复杂失效曲面等问题, 所提出方法的优势更为显著。

4.2 数值算例应用

为进一步考察所提出算法的精度和解决实际问题的能力, 分别针对可靠度分析中的经典算例, 进行了可靠度指标分析和验证。

算例 1.

设某结构的功能函数<sup>[6]</sup>为:  $g(Z_1, Z_2) = 6.6485 + \ln(\Phi(-Z_1)) + \ln(\Phi(-Z_2))$ , 其中  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ 。依据极限状态方程求得结构的设计验算点为 (1.797, 1.797); 要求计算结构的二次二阶矩可靠度指标。

首先利用本文方法对原始功能函数进行改写, 可得:

$$g(Z'_1, Z'_2) = \beta_{\text{FORM}} - Z'_2 - 0.1406Z'_1{}^2$$

在  $\beta_{\text{FORM}} = 0 \sim 1$  内选取 6 个基本样本点各进行 50 次线抽样计算, 经回归预测分析, 可得其最终分析结果如表 7 所示。

表 7 各分析方法  $\beta$  和  $P_f$  值

Table 7 Result of  $\beta$  and  $P_f$  with different methods

	$\beta$	$P_f$	相对误差/(%)
Monte Carlo <sup>[6]</sup>	2.327	$9.746 \times 10^{-3}$	
FORM	2.541	$5.527 \times 10^{-3}$	44.64
文献[6]方法	2.314	$1.033 \times 10^{-2}$	3.52
本文方法	2.336	$9.983 \times 10^{-3}$	2.37
回归关系式	$\beta_{\text{SORM}} = -0.0104e^{-\beta_{\text{FORM}}^{1.529}} - 0.1248 + 0.99\beta_{\text{FORM}}$		

由于算例 1 中结构功能函数呈现高度非线性, 一次二阶矩方法的精度不够理想。而所提出的基于回归分析预测算法的可靠度分析方法的求解精度令人满意。

算例 2.

已知某结构的极限状态方程<sup>[14]</sup>为:  $g(Z_1, Z_2) = 3.2 + 0.3Z_1^2 + 0.06Z_1^6 - Z_2 = 0$ , 式中:  $Z_1$  和  $Z_2$  相互独立, 且  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ , 试求其可靠度指标。

对于本题, 易于通过一次二阶矩方法获得其设计验算点为 (0, 3.2), 基于此, 对原极限状态方程进行改写, 可得:

$$g(Z'_1, Z'_2) = \beta_{\text{FORM}} - Z'_2 + 0.3Z'_1{}^2$$

分别采用所提出的方法和文献[14]方法对其进行可靠度分析, 各方法的计算结果如表 8 所示。表中 Monte Carlo 解为采用直接 Monte Carlo 法抽样  $10^7$  次获得。

表 8 不同方法计算结果对比

Table 8 Comparison of result in different methods

	$\beta$	$P_f$	相对误差/(%)
Monte Carlo	3.374	$3.704 \times 10^{-4}$	
HL-RF 法	3.2	$6.872 \times 10^{-4}$	85.50
文献[14]方法	3.424	$3.085 \times 10^{-4}$	16.71
本文方法	3.361	$3.883 \times 10^{-4}$	4.83
回归关系式	$\beta_{\text{SORM}} = 0.07e^{-\beta_{\text{FORM}}^{11.706}} + 0.1916 + 0.9872\beta_{\text{FORM}}$		

由算例 2 分析结果可以看出, 相对于文献[14]方法而言, 所提出方法的精度更高, 且其计算过程更为明确简便。进一步的研究分析表明, 所提出的方法与 Monte Carlo 解之间的差异主要是由于前者极限状态方程展开改写时略去了高阶非线性项造成的, 而这也是二次二阶矩方法所无法避免的一个固有问题。因为归根结底来说, 二次二阶矩方法在很大程度上也只是由近似解向精确解靠拢的一个良好逼近。而在逼近过程中所做出的若干简化和假定则正是导致最终结果差异的最根本原因。

## 5 结论

(1) 利用非线性回归分析手段, 揭示了一次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{FORM}}$  与二次二阶矩可靠度指标  $\beta_{\text{SORM}}$  之间的变化规律。大量数值分析计算表明: 这一规律与数值抽样结果符合良好, 具有普遍意义。

(2) 基于非线性回归分析预测的可靠度算法具有较高的精度和可靠性, 在高维度、小曲率半径、复杂失效曲面等各种情况下均具有良好的精度。且计算直观简便, 易于应用于工程实际。数值算例表明: 该方法的精度高于 FORM 及其他多种 SORM 算法, 且适用范围广泛, 是一种值得推广的新型算法。

(3) 由于回归表达式中各参数的求解仍需依赖 Monte Carlo 法经回归分析确定, 故而各参数的物理意义及计算方法仍需进一步探究。结合理论分析和数值算法发展参数  $p_1 \sim p_4$  的实用计算方法, 有助于所提出算法自身的进一步完善和其计算精度的提高;

(4) 所提出的方法本质上仍属于二阶可靠度分析方法, 限于二阶可靠度分析方法的固有弊端, 该

算法对于高阶非线性项的影响仍无法进行周全考虑。结合该项效应开展对本文算法的进一步修正则是下一阶段应当研究的重点。

## 参考文献:

- [1] Andrzej S Nowak, Kevin R Collins. 结构可靠度[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2005: 101—127.  
Andrzej S Nowak, Kevin R Collins. Reliability of structures [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 2005: 101—127. (in Chinese)
- [2] 蒋友宝, 冯健, 孟少平. 求解结构可靠指标的线性可行方向算法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, 36(2): 312—315.  
Jiang Youbao, Feng Jian, Meng Shaoping. Linear feasible direction algorithm for calculation of reliability index of structure [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2006, 36(2): 312—315. (in Chinese)
- [3] 李刚, 程耿东. 基于性能的结构抗震设计—理论、方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 140—147.  
Li Gang, Cheng Gengdong. The performance-based seismic design—Theory, method and application [M]. Beijing: Science Press, 2004: 140—147. (in Chinese)
- [4] 张清华, 卜一之, 李乔. 斜拉桥结构可靠度分析的混沌混合算法[J]. 中国公路学报, 2008, 21(3): 48—52.  
Zhang Qinghua, Bu Yizhi, Li Qiao. Hybrid chaos algorithm of structural reliability analysis of cable-stayed bridge [J]. China Journal of Highway and Transport, 2008, 21(3): 48—52. (in Chinese)
- [5] Tvedt L. Distribution of quadratic forms in normal space—Application to structural reliability [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, 116(6): 1183—1197.
- [6] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000: 53—64.  
Zhao Guofan, Jin Weiliang, Gong Jinxin. Structural reliability theory [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2000: 53—64. (in Chinese)
- [7] Zhao Yangang, Ono Tetsuro. New approximations for SORM: Part 1 [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(1): 79—85.
- [8] Zhao Yangang, Ono Tetsuro. New approximations for SORM: Part 2 [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(1): 86—93.
- [9] 蒋友宝. 斜拉双层柱面网壳结构可靠度计算及设计方法探讨[D]. 南京: 东南大学, 2006.  
Jiang Youbao. Reliability calculation and discussion of design method of cable-stayed double-layer cylindrical latticed shells [D]. Nanjing: Southeast University, 2006. (in Chinese)
- [10] Cai G Q, Elishakoff I. Refined second-order reliability analysis [J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 267—276.
- [11] Schuller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A comparative study of reliability estimation procedures for high dimension [C]// 16th ASCE Engineering Mechanics Conference. Seattle: University of Washington, American Society of Civil Engineers, 2003, 777: 1—10.

(参考文献[12]—[14]转第 235 页)



- [4] Wong L N Y, Einstein H H. Crack coalescence in molded gypsum and Carrara marble: part I-macroscopic observations and interpretation [J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2009, 42(3): 475—511.
- [5] 陈新, 廖志红, 李德建. 节理倾角及连通率对岩体强度、变形影响的单轴压缩试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, 30(4): 781—789.  
Chen Xin, Liao Zhihong, Li Dejian. Experimental study on the effect of joint orientation and persistence on the strength and deformation properties of rock masses under uniaxial compression [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, 30(4): 781—789. (in Chinese)
- [6] Lin P, Wong R H C, Chau K T, Tang C A. Multi-crack coalescence in rock-like material under uniaxial and biaxial loading [J]. *Key Engineering Materials*, 2000, 183(1): 809—814.
- [7] Prudencio M, Jan M V S. Strength and failure modes of rock mass models with non-persistent joints [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2007, 44(6): 890—902.
- [8] Lajtai E Z. Strength of discontinuous rocks in direct shear [J]. *Geotechnique*, 1969, 19(2): 218—233.
- [9] Gehle C, Kutter H K. Breakage and shear behaviour of intermittent rock joints [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2003, 40(5): 687—700.
- [10] 白世伟, 任伟中, 丰定祥, 周少怀. 共面闭合断续节理岩体强度特性直剪试验研究[J]. *岩土力学*, 1999, 20(2): 10—16.  
Bai Shiwei, Ren Weizhong, Feng Dingxiang, Zhou Shaohuai. Research on the strength behavior of rock containing coplanar close intermittent joints by direct shear test [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1999, 20(2): 10—16. (in Chinese)
- [11] Inglis C E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners [J]. *Institution of Naval Architects, London*, 1913, 55: 219—230.
- [12] Muskhelishvili N I. Some Basic problems of the mathematical theory of elasticity [M]. 4th ed. Noordhoff, Groningen, 1953: 361.
- [13] Jaeger J C, Cook N G W, Zimmerman R W. *Fundamentals of rock mechanics* [M]. 4th ed. Blackwell Publishing Ltd., Malden, 2007: 231.
- [14] Griffith A A. The theory of rupture [J]. *Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft*, 1924: 55—63.
- [15] Hoek E, Bieniawski Z T. Brittle fracture propagation in rock under compression [J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1965, 1(3): 137—155. (注: 这篇文章在 1984 年重新印刷在 1984, 26: 276—296)
- [16] Hoek E, Brown E T. Empirical strength criterion for rock masses [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 1980, 106(GT9): 1013—1035.
- [17] Lajtai E Z. A theoretical and experimental evaluation of the Griffith theory of brittle fracture [J]. *Tectonophysics*, 1971, 11(2): 129—156.
- [18] Kawakata H, Shimada M. Theoretical approach to dependence of crack growth mechanism on confining pressure [J]. *Earth Planets Space*, 2000, 52(5): 315—320.
- [19] 张敦福, 朱维申, 李术才, 郭彦双. 围压和裂隙水压力对岩石中椭圆裂纹初始开裂的影响[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(增刊 2): 4721—4725.  
Zhang Dunfu, Zhu Weishen, Li Shucai, Guo Yanshuang. Influence of confining pressure and fissure water pressure on initial opening for ellipse fracture [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(Suppl 2): 4721—4725. (in Chinese)
- [20] 郭少华, 孙宗旗. 压应力下脆性椭圆型裂纹的断裂规律[J]. *中南工业大学学报*, 2001, 32(5): 457—460.  
Guo Shaohua, Sun Zongqi. Fracture law of an elliptical brittle crack under compressive loading [J]. *Journal of Central South University*, 2001, 32(5): 457—460. (in Chinese)

(上接第 226 页)

- [12] Schuller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimension [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19(4): 463—474.
- [13] 秦权, 林道锦. 基于 FORM 的 Monte Carlo 精度修正可靠度算法[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2004, 44(9): 1249—1252.  
Qin Quan, Lin Daojin. Monte carlo updating reliability algorithm based on FORM [J]. *Journal of Tsinghua University (Science & Technology Edition)*, 2004, 44(9): 1249—1252. (in Chinese)
- [14] 赵维涛, 安伟光, 严心池. 二阶二次矩可靠性指标[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2004, 25(2): 240—242.  
Zhao Weitao, An Weiguang, Yan Xinchu. Second-order second-moment reliability index [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2004, 25(2): 240—242. (in Chinese)