

文章编号: 1000-4750(2013)10-0128-05

不同离散化方法在正冻土水热耦合模型中的应用

毛卫南, 刘建坤

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘 要: 为了研究土体冻结过程中温度传导与水分迁移的变化, 在不饱和土理查德斯方程的基础上考虑相变作用建立了一维土体冻结过程的水热耦合模型。分别应用有限差分与有限元方法对模型进行离散化, 得到两种方法各自的数值计算程序。同时对土体室内单向冻结实验进行模拟, 将两种数值方法得到的土体冻结深度、冻结速率与温度变化分别与实验结果进行对比。结果表明: 对于一维冻结问题, 有限差分模拟更接近实验结果, 有限元模拟具有更高的计算稳定性。

关键词: 正冻土; 水热耦合; 有限差分; 有限元; 冻结实验模拟

中图分类号: TU43 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0452

DIFFERENT DISCRETIZATION METHOD USING IN COUPLED WATER AND HEAT TRANSPORT MODE FOR SOIL UNDER FREEZING CONDITIONS

MAO Wei-nan, LIU Jian-kun

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A coupled water and heat transport mode is established, based on the Richards equation to study the water flow and heat transport in soil during a freezing process. Both the finite difference and finite element method are used in the discretization respectively. Two different computer programs are written and employed to simulate an indoor unidirectional frozen test. The freezing depth, freezing rate and temperature variation are compared among the real test, the finite difference calculation model simulation and the finite element calculation model simulation. The result shows that: the finite difference method has a better performance in freezing depth simulation and the finite element method has a better performance in one-dimensional freezing stability simulation.

Key words: freezing soil; coupled water and heat; finite difference; finite element; freezing test simulation

土体的冻结过程是温度场、水分场及应力场相互作用的极其复杂的热力学、物理化学和力学的综合问题。在土体冻结的过程中, 其中最主要的三种现象: 一是水分的迁移及水的相变(冰晶的形成); 二是热量的传输; 三是溶质含量的变化。这三者的变化并不是独立的, 而是相互制约、相互影响的, 是耦合变化的过程^[1-2]。用于描述冻结过程中土壤水热耦合运移的模型主要有两类^[3]: 基于多孔介质

中液态水分的粘性流动、热平衡原理的机理模型和应用不可逆热力学原理描述土壤水热通量的热力学模型。

对于冻结过程中的温度场和水分场耦合分析问题, 早在 20 世纪 70 年代 Harlan 就提出水热耦合的概念并给出了耦合数学计算模型^[4], 其研究成果至今仍被大量学者引用, 并加以更近一步的研究。Celia 等^[5]提出了一种基于理查德斯方程的不饱和

收稿日期: 2012-06-26; 修改日期: 2012-11-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(41171064); 国家基础研究计划 973 项目(2012CB026104); 北京交大基础科研项目(2011YJS252)

通讯作者: 刘建坤(1965—), 男, 山东人, 教授, 博士, 博导, 从事特殊路基工程研究(E-mail: jkliu@bjtu.edu.cn).

作者简介: 毛卫南(1987—), 男, 吉林人, 博士生, 从事冻土工程研究(E-mail: 09115302@bjtu.edu.cn).

水热流动方程。刘晓燕和郭琳^[6]分析了冻土地区土壤水热迁移的影响因素,探讨了冻土水热迁移的研究方法及成果。建立了考虑相变潜热及土壤冻结后含冰量的土壤水热耦合温度场模型,并进行了数值求解。另外,诸多学者在对土体冻结的现象的各种研究中,也得到了大量的冻结土体中水热耦合迁移的实验数据^[7],这为理论研究提供了良好的基础。

在诸多有关计算一维土体冻结过程中的模型的应用中,大多数学者都采用已有的计算软件对土体的水热耦合变化过程进行计算。一个更适用于冻土计算的数值程序还有待于提出。本文在深入研究正冻土水热耦合迁移的机理及有限差分与有限元数值算法的基础上,提出了一种基于不饱和土理查德斯方程的一维水热耦合模型,同时应用有限元与有限差分方法对其进行数值计算。应用两种数值模型对土体的冻结实验进行了模拟。

1 冻结过程中土体的水热耦合模型

对于冻结土体中水分的迁移,假定土壤介质不可压缩、均质各向同性,土中水分迁移规律与非饱和土壤水运动规律类似。考虑微元体内在 Δt 时间内未冻水含量的变化,采用含有相变项的理查德斯方程表示^[8-9](z 取向为下):

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta_u, z) \frac{\partial \theta_u}{\partial z} - K(\theta_u, z) \right] - \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (1)$$

式中: θ_i (cm^3/cm^3) 为含冰率; ρ_i 为冰密度 ($0.917\text{g}/\text{cm}^3$); ρ_w 为水密度 ($1\text{g}/\text{cm}^3$); D (cm^2/s) 为土壤水分扩散系数; K (cm/s) 为土壤导水系数。

对于冻结土体中温度的传导,考虑热量平衡,采用将相变潜热作为内热源的传导方程:

$$C(\theta_u, z) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(\theta_u, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + L\rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (2)$$

式中: C ($\text{J}/\text{cm}^3 \cdot \text{K}$) 为土壤的热容量; T/K 为温度; λ ($\text{W}/\text{cm} \cdot \text{K}$) 为土壤热传导系数; L (J/cm^3) 为冰的溶解潜热。其中, C 、 λ 的影响因素不仅为土中未冻水含量,冰的含量也存在一定的影响,根据文献^[6]的研究,在这里可以只考虑未冻水的部分。

在式(1)、式(2)中各系数均为未冻水含量的函数,要对方程进行求解需要提供另一联系关系,即土壤中未冻水含量 θ_u 和温度 T 的关系。对这一关系,有很多学者做出了大量的研究。提出了许多关系式^[10]。有些学者给出了经验曲线。作者在参与砂质粉土的大量冻结实验^[7]的基础上,提出了正冻土

未冻水含量与温度值的一种经验关系模型。其中未冻水的含量上限为目前诸多学者所公认,其下限为根据大量实验^[7]结果的分布,所给出的经验值。

$$\frac{1}{3} \theta_{\max}(T) \leq \theta_u \leq \theta_{\max}(T) \quad (3)$$

2 有限差分数值模型

由于土壤冻结过程中水热耦合运动方程的非线性及初始条件、边界条件的复杂性,用解析法或半解析法推求是非常困难的,目前常用的方法是数值计算方法。雷志栋等^[11]提出过一种差分格式对类似形式的方程组进行了求解。但其采用的隐式差分方法较为复杂,且在温度与水力梯度上对时间进行差分没有明确的物理意义,而在计算精度上并没有太大的提高。因此,本文在对式(1)、式(2)采取必要的基本变形后,对空间、时间分别采用了不同的差分方法进行离散化,得到了一种比较简单的差分方程的形式。

以温度传导方程为例,由于热传导系数 λ 与其位置 x 有关。可以将式(2)改写成如下形式:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + L\rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (4)$$

在空间坐标上采用中心差分,在时间坐标上采用向前差分,对于任意点 i 在任意时间点 k , 式(4)可以写为:

$$C \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{\lambda_{i+1}^k - \lambda_{i-1}^k}{2h} \cdot \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h} + \lambda_i^k \cdot \frac{T_{i+1}^k + T_{i-1}^k - 2T_i^k}{h^2} + L\rho_i \cdot \frac{\theta_{ii}^{k+1} - \theta_{ii}^k}{\Delta t} \quad (5)$$

其中: h 为相邻节点间的距离; Δt 为每个间隔的时间步长。

从而可以得到下一时刻的温度为:

$$T_i^{k+1} = P \cdot T_{i+1}^k + Q \cdot T_i^k + R \cdot T_{i-1}^k + \frac{L \cdot \rho_i}{C} \cdot \Delta \theta_i \quad (6)$$

其中:

$$P = \frac{\Delta t \cdot \lambda_i^k}{C \cdot h^2} + \Delta t \cdot \frac{\lambda_{i+1}^k - \lambda_{i-1}^k}{4C \cdot h^2} \quad (7)$$

$$Q = C - \frac{2\Delta t \cdot \lambda_i^k}{C \cdot h^2} \quad (8)$$

$$R = \frac{\Delta t \cdot \lambda_i^k}{C \cdot h^2} - \Delta t \cdot \frac{\lambda_{i+1}^k - \lambda_{i-1}^k}{4C \cdot h^2} \quad (9)$$

$\Delta \theta_i$ 为对应 k 时刻冰含量的变化大小。

同理,可以得到下一时刻未冻水含量为:

$$w_{ui}^{k+1} = M \cdot w_{ui+1}^k + N \cdot T_i^k + S \cdot w_{ui-1}^k - \Delta t \frac{k_{i+1}^k - k_{i-1}^k}{2h} - \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot \Delta \theta_i \quad (10)$$

其中:

$$M = \frac{\Delta t \cdot D_i^k}{h^2} + \Delta t \cdot \frac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{4h^2} \quad (11)$$

$$N = 1 - \frac{2\Delta t \cdot D_i^k}{h^2} \quad (12)$$

$$S = \frac{\Delta t \cdot D_i^k}{h^2} - \Delta t \cdot \frac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{4h^2} \quad (13)$$

$\Delta \theta_i$ 为对应 k 时刻冰含量的变化大小。

应用式(6)、式(10)还不能完全求出冻结过程中的水热耦合变化,为此求解时需要补充一个条件,即联系方程式(3)。每一时段迭代计算步骤可以按下程序:

1) 先预报时段末的温度 T^{k+1} ,可近似取时段初的值 T^k 。

2) 由联系方程式(3)进行未冻水含水率校正。若未冻水含量超过式(3)的允许值,超过部分即为本时段末增加的结冰量。

3) 求解水流方程组式(10),得出时段末各结点未冻水含水率。

4) 求解热流方程组,得出时段末各结点的温度值 T^{k+1} 。此即本次迭代计算的校正值,下一次迭代计算的预报值。

5) 重复步骤 1)~步骤 4),直至前后两次计算所得含水率之差和温度之差均小于规定的允许误差为止。

在得到下一个时间步的温度及含水量的值后重新计算各个参数的值,然后重复进行步骤 1)~步骤 5)。直到得到需要的时间点为止。

3 有限元数值模型

在一维条件下,有限单元为线性单元,对于任意点,温度值 T_x 可以用形函数与节点值来表示:

$$T_x = \{N\} \cdot \{T\} \quad (14)$$

将式(14)代入式(2)中:

$$C \cdot \{N\} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{T\} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{N\} \cdot \{T\} \right] + L \rho_i \cdot \{N\} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{\theta_i\} \quad (15)$$

采用 Galerkin 法对式(15)进行离散,可得:

$$\left(C \cdot \int_0^L \{N\}^T \cdot \{N\} \cdot dx \right) \cdot \{T\}^{k+1} - \left(C \cdot \int_0^L \{N\}^T \cdot \{N\} \cdot dx \right) \cdot \{T\}^k - \Delta t \cdot \int_0^L \{N^T\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{N\} \cdot \{T\}^k \right] \cdot dx - \left(\Delta t \cdot \int_0^L L \rho_i \cdot \{N\}^T \cdot \{N\} \cdot dx \right) \cdot \{\theta_i\}_t = 0 \quad (16)$$

其中, Δt 为计算的时间间隔。

对式(16)整理后可得:

$$[K] \cdot \{T\}^{k+1} = \{M\} \quad (17)$$

其中:

$$[K] = C \cdot \int_0^L \{N\}^T \cdot \{N\} \cdot dx = \sum_{k=1}^{nel} C_k \cdot \int_0^L \{N\}_k^T \cdot \{N\}_k \cdot dx$$

$$\{M\} = [P] \cdot \{T\}^k + [Q] \cdot \{\theta_i\}_t$$

$$[P] = (C \cdot \{N\}^T \cdot \{N\} - \Delta t \cdot \lambda \cdot \{N\}_{,x}^T \cdot \{N\}_{,x}) \cdot dx$$

$$[Q] = \int_0^L \Delta t L \rho_i \cdot \{N\}^T \cdot \{N\} \cdot dx$$

求解式(17)即可得到下一时刻的每个节点的温度值。

同理:可以得到有关水分计算的方程为:

$$[K_w] \cdot \{\theta_u\}^{k+1} = \{M_w\} \quad (18)$$

结合式(17)、式(18)、式(3)即可进行每个时间步内的迭代计算。整体计算可以采用第 2 部分中相同的流程。

4 实验模拟结果

分别对两个计算模型编写各自的 fortran 语言程序,对于粉质粘土的室内单向冻结实验^[7]进行模拟。

实验采用直径为 150mm,高度为 100mm 的土柱进行单向冻结,实验初始试样温度为 1℃。进行冻结后顶端施加温度为 -2.5℃,底端温度为 1℃。试验用粉质粘土的初始含水率为 0.15,在试样底部再用马氏补水瓶进行补水。

根据在未冻时土的各个参数值可以得到土体的导水系数与扩散系数^[11]:

$$D = 226.4 \left(\frac{\theta_u}{\theta} \right)^{8.4}$$

$$K = 0.9 \left(\frac{\theta_u}{\theta} \right)^{10.87}$$

其中, θ 为总的含水量。

土的热参数^[11]:

$$C = 0.46 \times 0.38 + 0.6 \times 0.12 + w_u + 0.5 \times w_i,$$

$$\lambda = 0.42 \times 0.38 + 0.036 \times 0.12 + 0.852 \times w_u,$$

$$\rho_i = 0.917 \text{g/cm}^3, \rho_w = 1 \text{g/cm}^3, L = 335 \text{J/cm}^3.$$

考虑到补水瓶通过联通试样底部的透水石与滤纸对试样进行补水,下边界采用实验测得的最靠近底端测量点的平均含水量(0.1)。

冻结深度随时间的变化如图 1,在最终冻结深度上(见图 1),应用有限元方法模型得到的结果误差比有限差分模型得到的结果大 0.5cm,差分结果与试验值相差不到 0.3cm。在冻结速率方面(见图 2)两种不同的方法得到的曲线基本相同在图 2 中趋于重合,可以很好的模拟实验结果。

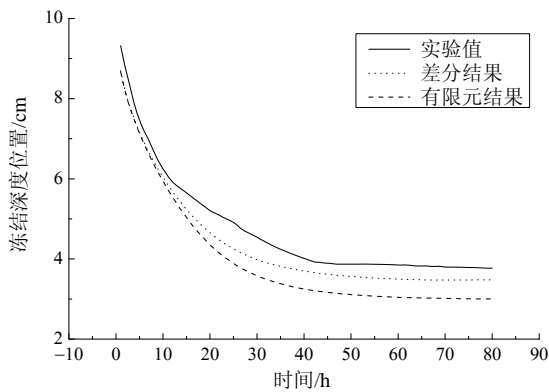


图 1 冻结深度变化

Fig.1 Variation of freezing depth

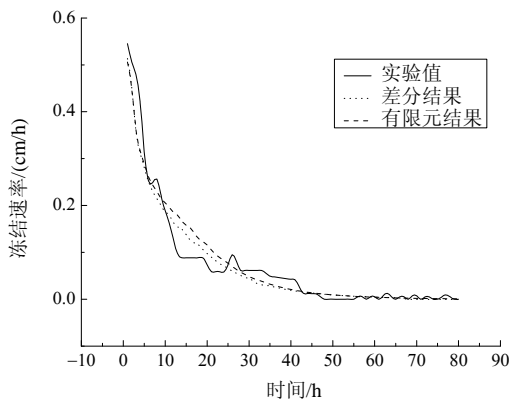


图 2 冻结速率变化

Fig.2 Variation of freezing rate

图 3 为不同时刻温度随深度的变化,对于两种不同的离散化方法得到的曲线大体相同,在图 3 中重合。从模拟结果与实验结果的对比中可以看到土样中温度在不同时刻的分布情况,分布曲线从实验

初期的指数型逐渐向二次抛物线过渡,实验后期温度分布趋于稳定,接近于直线型。模拟结果在初期(10h 内)较实验值小,试样在 20h 左右模拟结果与实验基本重合,在这一时段得到的结果最为准确。在实验后期模拟值比实验值较大,这与之前得到的偏大的最终冻结深度的结果相吻合。

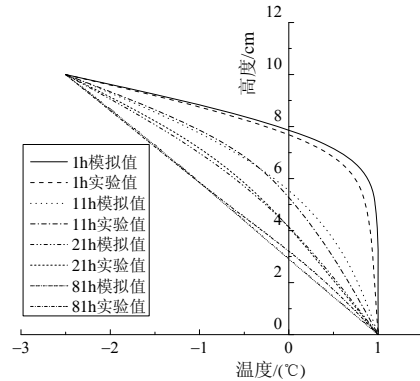


图 3 温度随深度变化图

Fig.3 Variation of temperature

5 结论

土体冻结过程中,温度、水分之间的相互作用是一个极其复杂的热力学、物理化学和力学的综合问题。在充分考虑土体冻结过程中水分、温度之间相互耦合作用的基础上建立了土壤水热耦合温度场物理模型,利用不同的数值方法对模型进行离散化,可以得到不同的土体冻结水热耦合计算程序。

针对于模拟,对一维模型的研究结果为之后二维模型建立提供了参考。对于不封闭系统的总吸水量,还有待于提出边界条件的进一步取值方法,并应用到相应的数值方法中以得到更精确的结果。在模拟的准确度上,通过对土体单向冻结实验的模拟结果表明,有限元与差分两种方法拥有各自的特点,有限元方法在最终状态上偏差稍大,但在总体的变化趋势上却能更好的反映实际变化,而且在对于单元变形,不确定因素的处理方面,更加适合模型后继的推广应用。

参考文献:

- [1] 毛雪松, 李宁, 王秉刚, 等. 多年冻土路基水-热-力耦合理论模型及数值模拟[J]. 长安大学学报, 1999, 26(4): 16-21.
- Mao Xuesong, Li Ning, Wang Binggang, et al. Coupling model and numerical simulation of moisture-heat-stress fields in permafrost embankment [J]. Journal of Chang'an University (Nature Science Edition), 1999, 26(4): 16-21. (in Chinese)

- [2] 刘畅, 陈晓飞, 苑杰, 等. 冻结条件下土壤水热耦合迁移的数值模拟[J]. 水电能源科学, 2010, 28(5): 94—96, 119.
Liu Chang, Chen Xiaofei, Yuan Jie, et al. Numerical simulation of coupled water and heat transportation in soil under freezing conditions [J]. *Water Resources and Power*, 2010, 28(5): 94—96, 119. (in Chinese)
- [3] 朱炎, 陈晓飞, 马巍, 等. 非饱和和土壤冻融过程中水、热耦合运移数值模拟研究[J]. 安徽农业科学, 2007, 35(17): 5216—5217, 5282.
Zhu Yan, Chen Xiaofei, Ma Wei, et al. Numerical simulation of water and heat transfer during unsaturated soil freezing [J]. *Anhui Agricultural Science*, 2007, 35(17): 5216—5217, 5282. (in Chinese)
- [4] Harlan R L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil [J]. *Journal Water Resources Research*, 1973, 19(5): 1314—1323.
- [5] Celia M A, Bouloutas E T, Zarba R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation [J]. *Water Resources Research*, 1990, 26(7): 1483—1496.
- [6] 刘晓燕, 郭琳. 冻土地区土壤水热耦合温度场的分析[J]. 低温建筑技术, 2011(11): 87—88.
Liu Xiaoyan, Guo Lin. Analysis of the coupled water-heat soil temperature field in frozen sediment areas [J]. *Low Temperature Architecture Technology*, 2011(11): 87—88. (in Chinese)
- [7] 杜艳. 动荷载作用下 109 国道砂质粉土路基填料变形特性研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
Du Yan. Study on the deformation characteristics of 109 national superhighway's sandy silt roadbed fillings un-der dynamic load action [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012. (in Chinese)
- [8] Van Genuchten, M Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils [J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, 44(5): 892—898.
- [9] Spaans E J A, Baker J M. The soil freezing characteristic: Its measurement and similarity to the soil moisture characteristic [J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1996, 60: 13—19.
- [10] 陈肖柏, 刘建坤, 刘鸿绪, 等. 土的冻结作用与地基[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 78—158.
Cen Xiaobo, Liu Jiankun, Liu Hongxu, et al. Frost action of soil and foundation engineering [M]. Beijing: Sciences Press, 2006: 78—158. (in Chinese)
- [11] 雷志栋, 杨秀诗, 谢森传, 等. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988: 196—400.
Lei Zhidong, Yang Xiushi, Xie Senchuan, et al. Soil hydrodynamic [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988: 196—400. (in Chinese)

(上接第 121 页)

- [12] JGJ 138-2001, 型钢混凝土组合结构技术规程[S]. 2001.
JGJ 138-2001, Technical specification for steel reinforced concrete composite structures [S]. 2001. (in Chinese)
- [13] YB 9082-2006, 钢骨混凝土结构设计规程[S]. 2006.
YB 9082-2006, Technical specification of steel-reinforced concrete structures [S]. 2006. (in Chinese)
- [14] Munoz P R, Hsu C T. Behavior of biaxially loaded concrete-encased composite columns [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1997, 123(9): 1163—1171.
- [15] Mirza S, Lacroix E. Comparative strength analyses of concrete-encased steel composite columns [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2004, 130(12): 1941—1953.
- [16] Cengiz Dundar, Serkan Tokgoz. Behaviour of reinforced and concrete-encased composite columns subjected to biaxial bending and axial load [J]. *Building and Environment*, 2008, 43(6): 1109—1120.