

文章编号: 1000-4750(2013)11-0272-05

# 经典式 Spar 平台垂荡-纵摇耦合混沌运动研究

刘利琴, 王 宾, 张若瑜, 唐友刚

(天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室, 天津 300072)

**摘 要:** 该文基于 Lyapunov 指数研究经典式 Spar 平台主体垂荡-纵摇非线性耦合的混沌运动。建立了规则波浪中平台主体垂荡-纵摇耦合非线性微分方程, 以经典式 Spar 平台为例, 数值计算了响应的最大 Lyapunov 指数谱及分岔图, 在波高和波浪频率构成的平面上, 计算了平台不稳定纵摇运动的参数域。结果表明, 平台运动形式对波浪激励频率非常敏感, 随着波浪频率的改变, Spar 平台发生 1/2 亚谐运动、概周期运动, 当波浪频率接近垂荡固有频率时, 发生混沌运动。

**关键词:** 经典式 Spar 平台; 垂荡-纵摇耦合; 分岔; 混沌; Lyapunov 指数

**中图分类号:** U661.3    **文献标志码:** A    **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.07.0530

## STUDY ON THE CHAOTIC MOTION OF COUPLED HEAVE AND PITCH OF CLASSIC SPAR PLATFORM

LIU Li-qin, WANG Bin, ZHANG Ruo-yu, TANG You-gang

(State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Simulation and Safety, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The chaotic motion of nonlinear coupled heave-pitch of the classic Spar platform hull is studied by the Lyapunov exponent in this paper. The nonlinear differential equation of the coupled heave-pitch of the platform hull is established in the regular wave. Taking the classic Spar as an example, the maximum Lyapunov exponent spectrum and the bifurcation diagrams are calculated and the parameter domain for unstable pitch motion is calculated. The results show that the platform motion is sensitive to wave frequency. With changing of wave frequency the platform exhibits 1/2 sub-harmonic motion and quasi-periodic motion. When the wave frequency approaches the natural frequency of heave, the platform exhibits chaotic motion.

**Key words:** classic Spar platform; coupled heave-pitch motion; bifurcation; chaos; Lyapunov exponent

深海平台吃水较深, 平台特征周期较长, 其垂荡和纵摇特征频率的比值接近于 2:1。当波浪周期较长或者遭遇涌浪时, 平台运动存在响应跳跃、超谐波分岔、亚谐波分岔等非线性运动形式<sup>[1-3]</sup>。Rho 和 Choi 研究了波浪激励频率接近平台固有频率时 Truss Spar 平台的纵摇稳定性<sup>[1]</sup>, 结果表明, 大幅垂荡运动最终导致不稳定纵摇运动, 当波浪频率接近垂荡固有频率时平台响应发生跳跃。Tao 等研究了经典式 Spar 平台的垂荡运动<sup>[2]</sup>, 结果表明, 在长周期波浪作用下, 平台响应发生垂荡共振及锁定现

象, 这将导致纵摇幅值大幅增加。赵晶瑞针对经典式 Spar 平台, 采用多尺度法研究了垂荡固有频率接近 2 倍纵摇固有频率时的垂荡-纵摇耦合运动; 考虑垂荡主共振, 基于 Floquet 理论研究了系统的稳定性, 计算了不稳定运动的参数域<sup>[3-4]</sup>。混沌是海洋平台可能发生的复杂运动形式之一, 发生混沌后, 无法确切的预测平台的运动轨迹。Liaw 研究了铰接塔平台的非线性混沌运动, 结果表明, 当波浪激励频率接近平台固有频率和系泊油轮横摇固有频率之和时, 系统发生混沌运动<sup>[5]</sup>。谢文会等研究了规

收稿日期: 2012-07-18; 修改日期: 2013-01-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51179125; 51279130)

通讯作者: 刘利琴(1977—), 女, 河北人, 副教授, 博士, 硕导, 从事船舶与海洋工程结构动力学(E-mail: liuliqintj@yahoo.com.cn).

作者简介: 王 宾(1988—), 女, 天津人, 硕士生, 从事船舶与海洋工程动力学研究(E-mail: tju2011wb@tju.edu.cn);

张若瑜(1981—), 女, 天津人, 讲师, 博士, 从事系泊浮体运动研究(E-mail: zryu@163.com);

唐友刚(1952—), 男, 河北人, 教授, 博士, 从事海洋浮体运动研究(E-mail: tangyougang\_td@163.com).

则波浪中铰接塔-油轮系统的分岔和混沌,跟踪了响应曲线及通向混沌的道路,计算了最大 Lyapunov 指数谱<sup>[6]</sup>。Chen 等基于最大 Lyapunov 指数研究了张力腿平台的运动稳定性,分析了波浪频率对系统运动的影响<sup>[7]</sup>。

本文基于数值模拟的方法研究深海 Spar 平台主体垂荡-纵摇耦合混沌运动,分析平台的不稳定运动形式,确定平台纵摇不稳定运动参数域。

### 1 平台垂荡-纵摇耦合运动方程建立

考虑回复力(矩)、阻尼力(矩)和规则波浪激励力(矩), Spar 平台主体垂荡-纵摇耦合的非线性运动方程如下<sup>[8]</sup>:

$$(m + \Delta m)\ddot{\xi}_3(t) + c_1\dot{\xi}_3(t) + \rho g A_w \xi_3(t) - \frac{1}{2}\rho g A_w H_g \xi_5^2(t) = F \cos \Omega t \quad (1)$$

$$(I + \Delta I)\ddot{\xi}_5(t) + c_3\dot{\xi}_5(t) + \rho g \nabla \overline{GM} \xi_5(t) - \frac{1}{2}\rho g (\nabla + 2A_w \overline{GM}) \xi_3(t) \xi_5(t) = M \cos \Omega t \quad (2)$$

其中:  $\xi_3$  为垂荡位移;  $\xi_5$  为纵摇角;  $m$  和  $\Delta m$  分别表示平台主体质量和附加质量;  $I$  和  $\Delta I$  分别表示纵摇惯性矩和附加惯性矩;  $c_i (i=1,3)$  为辐射阻尼;  $\rho$  为海水密度;  $\nabla$  为总排水量;  $A_w$  为平台主体的水线面面积;  $\overline{GM}$  为纵摇初稳性高;  $H_g$  为静水面到平台主体重心的垂直距离;  $F$  和  $M$  分别为垂荡波浪激励力和纵摇波浪激励力矩;  $\Omega$  为波浪激励频率。

式(1)两边同时除以  $(m + \Delta m)$ , 式(2)两边同时除以  $(I + \Delta I)$ , 有:

$$\ddot{\xi}_3(t) + \mu_1 \dot{\xi}_3(t) + \omega_3^2 \xi_3(t) - \mu_2 \xi_5^2(t) = f \cos \Omega t \quad (3)$$

$$\ddot{\xi}_5(t) + \mu_3 \dot{\xi}_5(t) + \omega_5^2 \xi_5(t) - \mu_4 \xi_3(t) \xi_5(t) = h \cos \Omega t \quad (4)$$

其中:  $\mu_1 = \frac{c_1}{(m + \Delta m)}$ ;  $\omega_3^2 = \frac{\rho g A_w}{(m + \Delta m)}$ ;

$\mu_2 = \frac{\rho g A_w H_g}{2(m + \Delta m)}$ ;  $f = \frac{F}{(m + \Delta m)}$ ;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\omega_3^2}{\Omega^2}\right) & -\frac{2u_1}{\Omega} & \frac{2u_2}{\Omega^2} y_3 & 0 & -\frac{f}{\Omega^2} \sin(y_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u_4}{\Omega^2} y_3 & 0 & -\left(\frac{\omega_5}{\Omega}\right)^2 + \frac{u_4}{\Omega^2} y_1 & -\frac{2u_3}{\Omega} & -\frac{h}{\Omega^2} \sin(y_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mu_3 = \frac{c_3}{(I + \Delta I)}$$
;  $\omega_5^2 = \frac{\rho g \nabla \overline{GM}}{(I + \Delta I)}$ ;  
 $\mu_4 = \frac{\rho g (\nabla + 2A_w \overline{GM})}{2(I + \Delta I)}$ ;  $h = \frac{M}{(I + \Delta I)}$ 。

式(3)和式(4)可进一步写为如下的一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_3^2 x_1 - 2u_1 x_2 + u_2 x_3^2 + f \cos(\Omega t) \\ \dot{x}_3 = y_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega_5^2 x_3 - 2u_3 x_4 + u_4 x_1 x_3 + h \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $x_1 = \xi_3$ ;  $x_2 = d\xi_3 / dt$ ;  $x_3 = \xi_5$ ;  $x_4 = d\xi_5 / dt$ 。

### 2 Lyapunov 指数计算

Lyapunov 指数谱是衡量动力系统稳定性和混沌的一个重要工具,它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率,负的 Lyapunov 指数意味着周期运动,正的 Lyapunov 指数意味着非周期运动<sup>[9]</sup>。本文基于 Wolf 提出的 QR 分解方法计算最大 Lyapunov 指数<sup>[10]</sup>,即基于相空间系统运动方程的切向量增长进行计算。式(5)写成如下的五维自治系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\left(\frac{\omega_3}{\Omega}\right)^2 y_1 - \frac{2u_1}{\Omega} y_2 + \frac{u_2}{\Omega^2} y_3^2 + \frac{f}{\Omega^2} \cos(y_5) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -\left(\frac{\omega_5}{\Omega}\right)^2 y_3 - \frac{2u_3}{\Omega} y_4 + \frac{u_4}{\Omega^2} y_1 y_3 + \frac{h}{\Omega^2} \cos(y_5) \\ \dot{y}_5 = 1 \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $y_1 = x_1$ ;  $y_2 = x_2 / \Omega$ ;  $y_3 = x_3$ ;  $y_4 = x_4 / \Omega$ ;  $y_5 = \tau$ ,  $\tau = \Omega t$ 。

式(6)对应的切空间流为:

$$\dot{U} = J(Y) \cdot U \quad (7)$$

其中:  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_5\}$ ;  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_5\}$ 。

$J$  为式(6)对应的 Jacobi 矩阵,具体形式如下:

对应式(6)的 Lyapunov 特性指数谱为:

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|U_j\|}{\|U_j^0\|}, \quad j=1,2,\dots,5 \quad (9)$$

其中  $U^0 = \{U_1^0, U_2^0, \dots, U_5^0\}$  为初始切向量。将 Lyapunov 指数沿系统相轨作平均, 有:

$$\lambda_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{t} \log \frac{\|U_j^k\|}{\|U_j^{0k}\|}, \quad j=1,2,\dots,5 \quad (10)$$

实际计算中, 每一次迭代后采用 Gram-Schmidt 方法将切向量  $U$  正交化, 并将正交化后的切向量作为下一次迭代的初始向量。由于 Jacobi 矩阵的作用, 必将导致切向量  $U$  趋于最大 Lyapunov 指数的方向。本文仅计算最大 Lyapunov 指数, 并采用四阶 Runge-Kutta 方法进行数值积分。

### 3 算例分析

Hong 等在 Samsung 船舶模型实验水池中进行了规则波浪中某 Spar 平台<sup>[11]</sup>的运动测试, 该平台垂荡、纵摇固有频率之比接近 2:1<sup>[12]</sup>。本文采用该平台模型, 主要参数见表 1。

表 1 平台主要参数<sup>[11]</sup>

Table 1 Main parameters of platform

名称	单位	取值
长度	m	212.9
$(m+\Delta m)$	t	221269
平台直径	m	37.2
平台吃水	m	198.1
水深	m	1018
GM	m	10.08
垂荡固有频率	rad/s	0.214
纵摇固有频率	rad/s	0.113

考虑线性波浪力(力矩), 基于势流理论编制水动力计算程序, 本文应用已有的计算程序<sup>[13]</sup>, 求得单位波高作用下垂荡激励力和纵摇激励力矩随波浪频率变化的关系曲线, 如图 1 和图 2 所示。

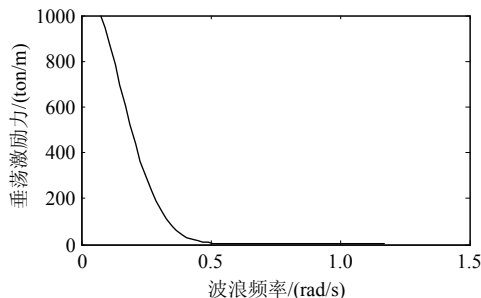


图 1 垂荡激励力

Fig.1 Exciting force for heave

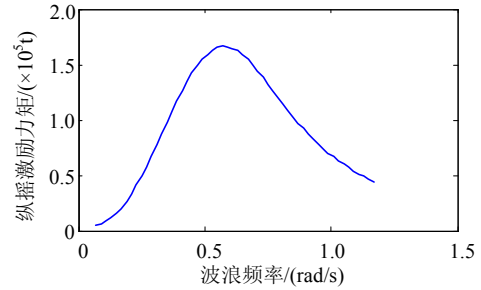
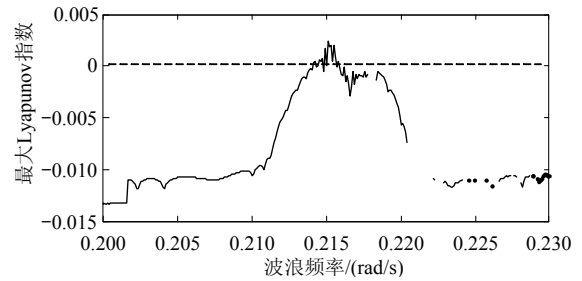


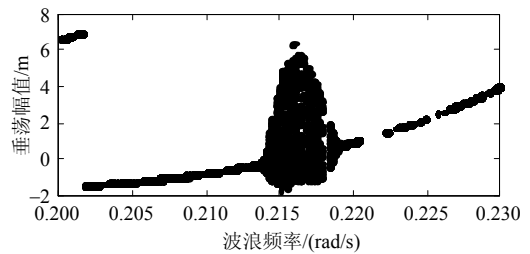
图 2 纵摇激励力矩

Fig.2 Exciting moment for pitch

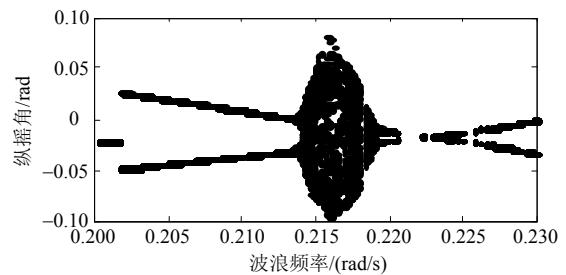
以下计算平台垂荡-纵摇耦合响应的最大 Lyapunov 指数及分岔图。取波高  $H=3m$ , 改变波浪激励频率, 在平台垂荡固有频率附近计算得到响应的最大 Lyapunov 指数谱图及分岔图如图 3 所示。



(a) 最大 Lyapunov 指数



(b) 垂荡分岔图



(c) 纵摇分岔图

图 3 最大 Lyapunov 指数谱图和分岔图

$(H = 3m, \Omega \in [0.2, 0.23] \text{ rad/s})$

Fig.3 Maximum Lyapunov exponent and bifurcation diagram

$(H = 3m, \Omega \in [0.2, 0.23] \text{ rad/s})$

计算过程中, 如果  $\Omega$  对应的响应幅值超过某一临界值, 则停止对该频率的计算, 对下一个频率  $\Omega_{i+1}$  进行计算, 同时将  $\Omega$  对应的最大 Lyapunov 指数及

响应值设为 NaN(空值), 对应于图 3(a)中的不连续部分及图 3(b)和图 3(c)中随频率变化的空缺部分。

以下进一步计算响应的庞加莱截面、功率谱及历程曲线, 分析不同波浪频率时平台的响应特性, 结果如图 4~图 6 所示。

对图 4~图 6 分析如下:  $\Omega = 0.210 \text{ rad/s}$  时, 垂荡、纵摇响应的庞加莱截面均为两个相点, 垂荡、

纵摇运动频率均存在 1/2 亚谐波成份, 其中垂荡频率以波浪激励频率为主, 纵摇频率以 1/2 亚谐波频率为主, 如图 4 所示; 当  $\Omega = 0.215 \text{ rad/s}$  时, 庞加莱截面为一系列不规则分布的点, 平台发生混沌运动, 如图 5 所示。当  $\Omega = 0.217 \text{ rad/s}$  时, 庞加莱截面为一条封闭曲线, 平台运动为概周期运动, 如图 6 所示。进一步概括平台响应特性如表 2 所示。

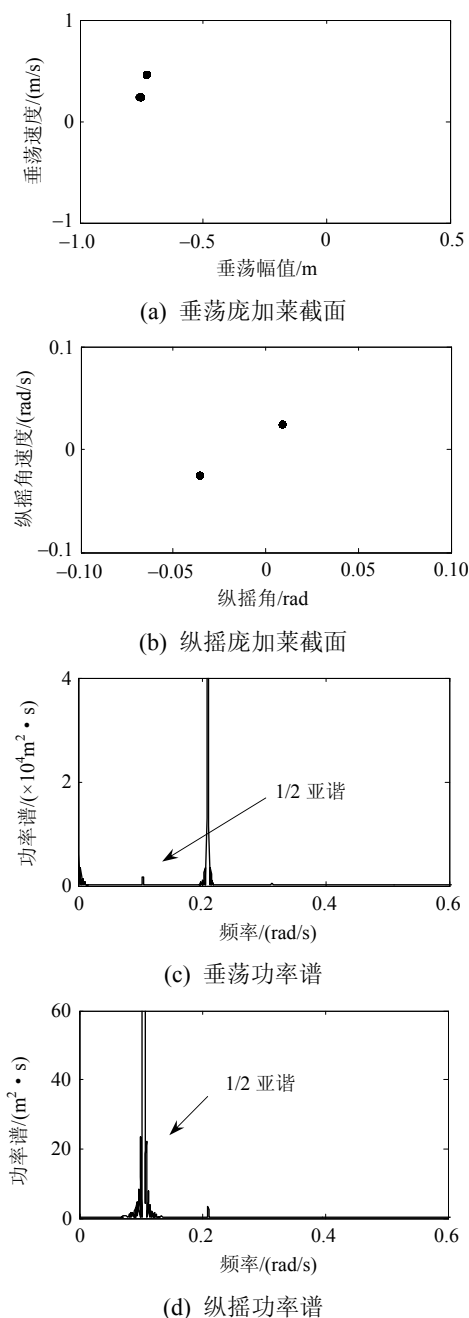


图 4 庞加莱截面及功率谱 ( $\Omega = 0.210 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )  
 Fig.4 Poincaré maps and power spectrums ( $\Omega = 0.210 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )

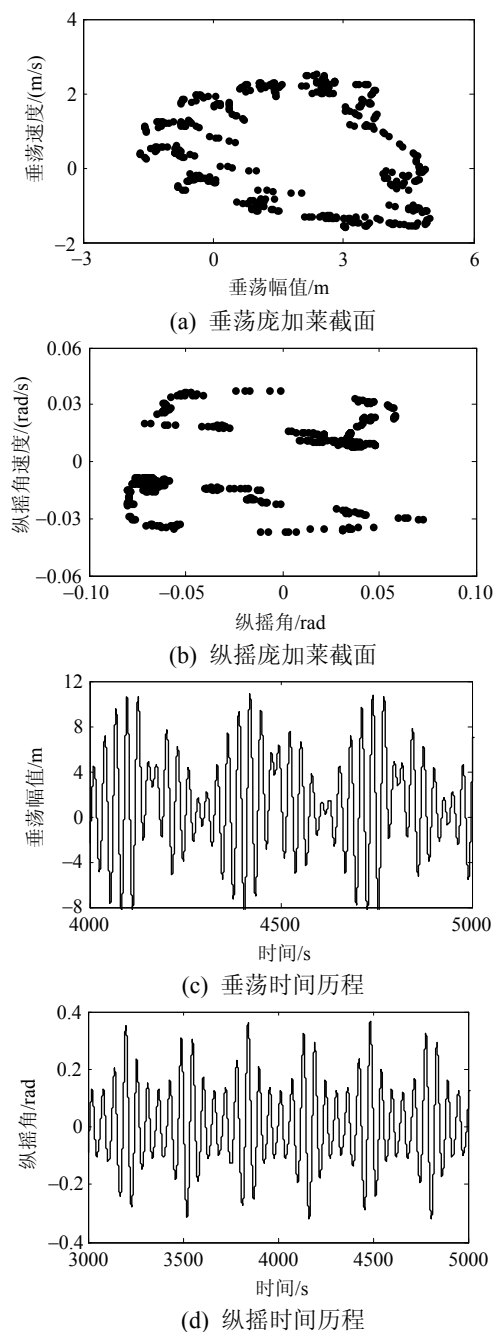


图 5 庞加莱截面及时间历程 ( $\Omega = 0.215 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )  
 Fig.5 Poincaré maps and time histories ( $\Omega = 0.215 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )

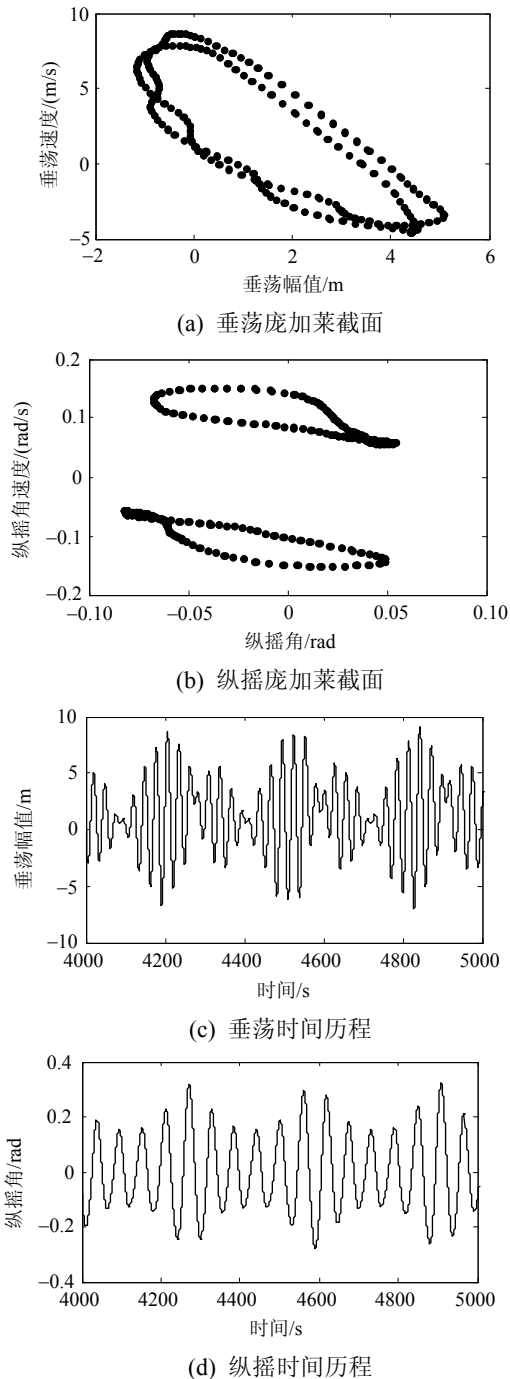


图6 庞加莱截面及时间历程( $\Omega = 0.217 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )

Fig.6 Poincaré maps and time histories ( $\Omega = 0.217 \text{ rad/s}$ ,  $H = 3\text{m}$ )

表2 平台运动分析( $H = 3\text{m}$ ,  $\Omega \in [0.2, 0.23] \text{ rad/s}$ )

Table 2 Platform motion analysis ( $H = 3\text{m}$ ,  $\Omega \in [0.2, 0.23] \text{ rad/s}$ )

波浪频率/(rad/s)	平台运动
0.202~0.213	1/2 亚谐运动, 其中垂荡频率以波浪激励频率为主, 纵摇频率以 1/2 亚谐频率为主。
0.214~0.217	混沌运动和概周期运动。
0.218~0.23	1/2 亚谐运动, 垂荡频率以波浪激励频率为主, 纵摇频率以 1/2 亚谐频率为主。

由表 2 可以看出, 平台运动形式对波浪频率非常敏感, 改变波浪频率, 平台发生 1/2 亚谐运动及概周期运动, 在波浪频率接近垂荡固有频率时, 平台发生混沌运动。进一步计算不同波浪参数时平台响应, 得到波高和波浪频率平面上平台纵摇不稳定运动的参数域如图 7 所示。

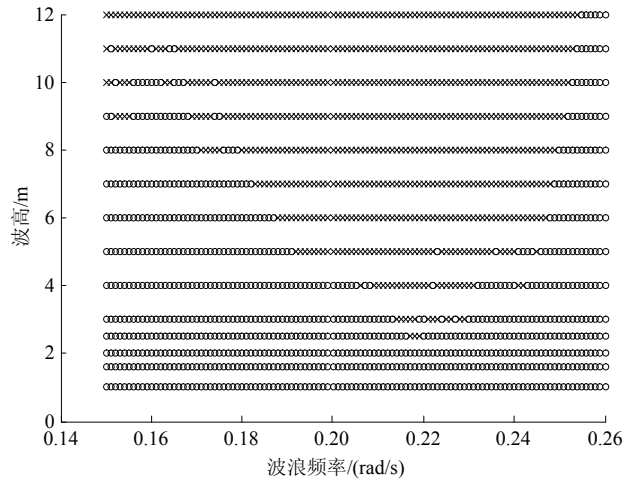


图7 纵摇稳定及不稳定运动参数域

Fig.7 The parameter domain for the unstable pitch motion

图 7 中, 符号“o”为稳定周期运动, 即简谐运动; 符号“x”表示不稳定运动, 即非简谐运动形式, 如超谐运动、亚谐运动等。图 7 表明, 随着波高的增加, 平台发生不稳定纵摇运动的波浪频率范围逐渐增大。

### 4 结论

本文建立了规则波浪中 Spar 平台主体垂荡-纵摇耦合的非线性运动方程, 计算了最大 Lyapunov 指数谱, 构造了响应的庞加莱截面及运动幅值随波浪频率变化的分岔图, 给出了纵摇不稳定运动的参数域。研究表明, 平台响应对波浪频率非常敏感, 随着波浪频率的改变, 平台运动发生 1/2 亚谐运动、概周期运动及混沌运动; 发生 1/2 亚谐运动时, 垂荡频率以波浪激励频率为主, 纵摇频率以 1/2 亚谐频率为主; 在波浪频率接近垂荡固有频率的某些规则波浪作用下, 平台发生混沌运动。

平台发生混沌运动时, 运动轨迹非常复杂, 对初始条件和系统参数的微小变化极端敏感, 造成平台运动不规则的偏离周期轨迹, 危及平台正常作业。实际中, 可通过调整系统参数避免混沌运动的发生, 如, 调整平台固有周期, 使平台垂荡固有周期远离平台作业环境海浪能量集中的周期范围。

(参考文献转第 304 页)

- Yang Quan. Study on the cold rolled strip buckling and the target shape in the automatic flatness control [D]. Beijing: University of Science and Technology, 1992. (in Chinese)
- [5] 杨荃, 陈先霖. 轧制带材的瓢曲生成路径[J]. 北京科技大学学报, 1994, 16(1): 53—57.  
Yang Quan, Chen Xianlin. The deforming route of buckled waves of rolled strip [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 1994, 16(1): 53—57. (in Chinese)
- [6] 林振波. 冷带轧机板形判别模型的有限条分析[D]. 河北: 燕山大学, 1993.  
Lin Zhenbo. Finite strip method analysis on shape discrimination model in cold strip rolling mill [D]. Hebei: Yanshan University, 1993. (in Chinese)
- [7] 边宇虹, 刘宏民. 求解带材轧后大挠度屈曲变形的一个通用方法[J]. 机械工程学报, 1994, 30(增刊): 21—27.  
Bian Yuhong, Liu Hongmin. Universal method analysing the large deflection buckling deformation of rolled strip [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1994, 30(Suppl): 21—27. (in Chinese)
- [8] Tarnopolskaya T, Gates D J. Analysis of the effect of strip buckling on stability of strip lateral motion with application to cold rolling of steel [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2008, 130(1): 1—7.
- [9] 戴杰涛, 张清东, 秦剑. 薄宽冷轧带钢局部板形屈曲行为解析研究[J]. 工程力学, 2011, 28(10): 236—242.  
Dai Jietao, Zhang Qingdong, Qin Jian. Analysis of local buckling for thin cold-rolled strip [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(10): 236—242. (in Chinese)
- [10] 白振华, 李东兴, 连家创, 等. 局部浪形对冷轧钢卷起筋的影响[J]. 机械工程学报, 2006, 42(9): 229—232.  
Bai Zhenhua, Li Dongxing, Lian Jiachuang, et al. Influence of local shape wave on ribbing of cold-rolled coil [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(9): 229—232. (in Chinese)
- [11] 张清东, 刘赞赞, 周晓敏, 等. 高温带钢的局部宽度内压屈曲及后屈曲分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(3): 102—106.  
Zhang Qingdong, Liu Yunyun, Zhou Xiaomin, et al. Part width compressive buckling and post buckling analysis of steel strip under high temperature [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(3): 102—106. (in Chinese)
- [12] 梁靖波, 韦爱凤, 胡新丽. 刚性介质接触条件下钢板的局部屈曲分析[J]. 科学技术与工程, 2009, 9(7): 1778—1781.  
Liang Jingbo, Wei Aifeng, Hu Xinli. Analysis of local buckling of steel plate in contact with rigid medium [J]. Science Technology and Engineering, 2009, 9(7): 1778—1781. (in Chinese)
- [13] 卿伟杰, 杨荃. 冷轧带钢整体和局部屈曲及后屈曲的有限元分析[J]. 北京科技大学学报, 2000, 22(4): 377—380.  
Qing Weijie, Yang Quan. Study on cold rolled strip global and local buckling, post-buckling using the finite element method [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2000, 22(4): 377—380. (in Chinese)
- [14] 秦剑, 张清东. 带钢屈曲分析的非线性样条有限元法计算软件 (SBANSFM)V1.0: 中国 BJ34170[CP]. 2011-05-25.  
Qin Jian, Zhang Qingdong. Spline finite element method for strip buckling analysis (SBANSFM) V1.0: China BJ34170 [CP]. 2011-05-25. (in Chinese)

(上接第 276 页)

#### 参考文献:

- [1] Rho J B, Choi H S. Vertical motion characteristics of truss Spars in waves [C]// Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference. France: International Society of Offshore and Polar Engineers Press, 2004: 662—665.
- [2] Tao L B, Lim K Y, Thiagarajan K. Heave response of classic Spar with variable geometry [J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2004, 126(2): 90—95.
- [3] 赵晶瑞, 唐立志, 唐友刚. 传统 Spar 平台垂荡-纵摇耦合内共振响应[J]. 天津大学学报, 2009, 42(3): 201—207.  
Zhao Jingrui, Tang Lizhi, Tang Yougang. Internal resonant responses of heave-pitch coupled motions of classic Spar platform [J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2009, 42(3): 201—207. (in Chinese)
- [4] Zhao J R, Tang Y G, Shen W J. A study on the combination resonance response of a classic Spar platform [J]. Journal of Vibration and Control, 2010, 16(14): 2083—2107.
- [5] Liaw C Y. Bifurcations of sub-harmonic and chaotic motions of articulated towers [J]. Engineering Structures, 1988, 10(2): 117—124.
- [6] 谢文会, 唐友刚, 陈予恕. 考虑平方阻尼及分段线性刚度铰接塔-油轮系统的分岔与混沌特性[J]. 工程力学, 2007, 24(8): 163—167.  
Xie Wenhui, Tang Yougang, Chen Yushu. Bifurcation and chaos of alt-tanker with square damping and piecewise linear stiffness [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(8): 163—167. (in Chinese)
- [7] Chen C W, Shen C W, Chen C Y, et al. Stability analysis of an oceanic structure using the Lyapunov method [J]. Engineering Computations, 2010, 27(2): 186—204.
- [8] 刘利琴, 唐友刚. Spar 平台垂荡-纵摇耦合运动的不稳定性[J]. 船舶力学, 2009, 13(4): 551—556.  
Liu Liqin, Tang Yougang. Unstability of coupled heave-pitch motions for Spar platform [J]. Journal of Ship Mechanics, 2009, 13(4): 551—556. (in Chinese)
- [9] Andrea R Zeni, Gallas Jason A C. Lyapunov exponents for a Duffing oscillator [J]. Physica D, 1995, 89(1/2): 71—82.
- [10] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D, 1985, 16: 285—317.
- [11] Hong Y P, Lee D Y, Choi Y H. An experiment study on the extreme motion responses of a Spar platform in the heave resonant waves [C]// Proceedings of the 15th International Offshore and Polar Engineering Conference. Seoul: International Society of Offshore and Polar Engineers Press, 2005: 225—232.
- [12] 赵晶瑞, 唐友刚, 王文杰. 传统 Spar 平台参数激励 Mathieu 不稳定性的研究[J]. 工程力学, 2010, 27(3): 222—227.  
Zhao Jingrui, Tang Yougang, Wang Wenjie. Study on the parametrically excited Mathieu instability of a classic Spar platform [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(3): 222—227. (in Chinese)
- [13] 赵文斌. Spar 平台水动力载荷及垂荡-纵摇耦合运动分析[D]. 天津: 天津大学, 2007.  
Zhao Wenbin. Analysis of hydrodynamic loads and coupled heave-pitch motion for Spar platform [D]. Tianjin: Tianjin University, 2007. (in Chinese)