

文章编号: 1000-4750(2013)10-0019-09

考虑节点转动刚度的圆管杆件结构 自适应有限元分析方法

刘海锋, 韩军科, 李清华, 高 渊, 杨靖波

(中国电力科学研究院, 北京 100055)

摘 要: 为了判断杆件结构的有限元分析精度对节点转动刚度是否敏感, 并据此调整杆件结构的离散方式, 根据 Zienkiewicz-Zhu 后验误差估计理论, 定义了正应力范数来衡量有限元的计算精度, 推导了考虑节点刚度的梁单元节点力-位移公式, 并以试算得到的梁/杆单元的两节点位移作为边界条件, 根据半刚性节点位移-力的公式, 给出了杆件需要采用梁单元、杆单元、梁+弹簧单元离散的节点刚度范围, 然后通过试算确定杆件结构的合理离散方式。在 ANSYS 中用 APDL 语言实现以上算法, 并以 2 个简单结构为例说明了该算法的流程并验证了它的正确性。

关键词: 转动刚度; 自适应分析; 能量范数; 杆件结构; Zienkiewicz-Zhu; ANSYS

中图分类号: TU20 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0426

ADAPTIVE FINITE ELEMENT PROCEDURE FOR CIRCULAR BAR STRUCTURES CONSIDERING ROTATING STIFFNESS OF JOINTS

LIU Hai-feng, HAN Jun-ke, LI Qing-hua, GAO Yuan, YANG Jing-bo

(China Electricity Power Research Institute, Beijing 100055, China)

Abstract: A method is derived to judge whether the calculation precision of the finite element model of bar element structures is sensitive to the rotating stiffness of the joints so as to adjust its discrete method. based on the Zienkiewicz-Zhu error post-processing technique, a stress norm is defined to judge the calculation precision, and the equations between displacements and forces are derived by considering the rotation stiffness of the joints. Taking the nodal displacements resulting from the trial calculations of the beam/truss element model as boundary conditions, this method gives the scopes of rotating stiffness suitable to be discreted by truss elements, beam elements, and beam-spring elements. A case study on an 32-legged structures is conducted to illustrate the feasibility and validity of the method in ANSYS.

Key words: rotating stiffness; adaptive analysis; stress norm; bar structures; Zienkiewicz-Zhu; ANSYS

圆管杆件结构是采用横截面为圆环的杆件相互连接而成的几何不变体系, 如网架、网壳、钢管输电铁塔等^[1]。杆件结构中各杆件需要采用节点来连接, 常见的节点有螺栓球节点、焊接球节点、板节点等。

随着节点转动刚度的变化, 杆件之间的连接方式可分为 3 类: 1) 铰接, 即转动刚度为 0, 通常采用杆单元模型模拟; 2) 半刚性连接, 即转动刚度介于 0 与无穷大之间, 通常采用半刚性模型模拟^[2-5], 3) 刚接, 即转动刚度为无穷大, 通常采用梁单元模

收稿日期: 2012-06-14; 修改日期: 2012-12-15

基金项目: 国家电网公司科技项目资助项目(GC-10-006)

通讯作者: 刘海锋(1980—), 男, 陕西礼泉人, 工程师, 博士, 从事有限元软件研发(E-mail: oceanlhf@163.com).

作者简介: 韩军科(1979—), 男, 山东威海人, 工程师, 博士生, 从事杆塔结构研究(E-mail: hjk@epri.sgcc.com.cn);

李清华(1977—), 男, 湖北宜昌人, 工程师, 硕士, 从事杆塔结构研究(E-mail: lqh@epri.sgcc.com.cn);

高 渊(1982—), 男, 湖南益阳人, 工程师, 硕士, 从事杆塔结构研究(E-mail: gaoyuan2010@epri.sgcc.com.cn);

杨靖波(1975—), 男, 陕西礼泉人, 高工, 博士, 从事杆塔结构研究(E-mail: yib@epri.sgcc.com.cn).

型模拟。

即使对于同一个杆件结构,在不同的载荷作用下,节点转动刚度对杆件结构有限元模型求解精度的影响可能不同,需要采用的有限元模型也可能不同。

以图1所示的杆件结构为例。在 F_1 的作用下,如图1所示,梁单元模型、杆单元模型或者半刚性模型得到的计算结果差别很大;而在 F_2 的作用下,如图2所示,3种模型的计算结果是相同的。可见:在误差允许的范围内,梁/杆单元模型有可能很好地模拟半刚性连接的杆件结构,甚至杆单元模型也有可能很好地模拟刚接的杆件结构。

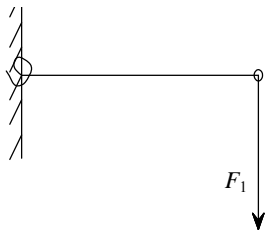


图1 工况1
Fig.1 Case 1

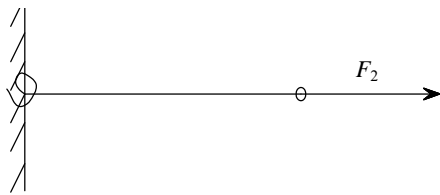


图2 工况2
Fig.2 Case 2

对于常见的杆件结构,可以通过规范来确定合适的离散方式。规范^[6]规定:采用螺栓球节点和焊接球节点连接的平板网架,虽然分别为半刚性连接的杆件结构和刚性连接的杆件结构,但都可以采用杆单元离散。相关的研究表明,这种简化带来的误差很小。正确运用这些简化方法,尽可能采用梁单元模型或杆单元模型来分析半刚性连接的杆件结构,不仅能减少建模时间和计算量,还能避免测量节点的转动刚度,而测量节点转动刚度所需的工作量是很大的^[4,7-8]。

对于某些新型结构,如钢管输电塔等,规范没有明确规定采用何种有限元模型,在工程设计中,通常采用杆单元来离散钢管输电塔^[9]。而杨建平、韩军科等学者发现,采用梁单元、杆单元、半刚性模型得到的钢管输电塔主材最大正应力有明显的差异^[10-11]。这就需要提出一个可以判断杆件结构求解精度对节点转动刚度是否敏感,并据此调整杆件

结构离散方式的有限元分析方法。

Zienkiewicz、Babuska 等学者提出了自适应有限元分析方法,简称 Z^2 法,为该问题的解决提供了很好的思路^[12-14]。该方法首先利用有限元试算的结果估计误差分布,然后根据误差分布调整离散方式,再试算,直到误差小于允许值。对于实体单元有限元模型而言, Z^2 法将修匀有限元应力解后得到一个光滑应力场作为相对精确解来衡量有限元解的求解精度。目前,基于 Z^2 法的实体结构自适应有限元法的研究比较成熟,在水坝、边坡等工程中得到了广泛的应用^[15-16],刘海锋将该方法推广到不考虑节点半刚性的梁单元模型中^[17]。

杆件结构中各杆件在节点处的应力场是不连续的,无法通过构造修匀应力场来获得相对精确解,因此,本文根据 Zienkiewicz-Zhu 后验误差估计理论,定义了正应力范数为来衡量有限元的计算精度,推导了考虑节点刚度的梁单元节点力-位移公式,给出了杆件需要采用梁单元、杆单元、梁+弹簧单元离散的节点刚度范围,然后据此调整杆系结构的离散方式。以2个简单的杆件结构为例说明了该算法的流程并验证了其正确性。

1 正应力范数的定义

设 f 和 f^* 分别为圆管杆件结构有限元模型梁单元某截面上的广义力精确解和广义力有限元解。定义 f^* 的误差为:

$$e = f^* - f \quad (1)$$

其中: $f = |N \quad Q_y \quad Q_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z|$;

$$f^* = |N^* \quad Q_y^* \quad Q_z^* \quad M_x^* \quad M_y^* \quad M_z^*|。$$

f 、 f^* 、 e 均为场函数,需要采用合适的范数来衡量它的大小。

圆管杆件结构在受力时,杆件横截面上的应力可分解为垂直于截面的正应力和平行于截面的剪应力。因为杆件的长细比一般较大,最大剪应力和最大正应力的比值很小,所以在进行杆件强度设计和稳定设计时,主要考虑最大正应力的影响。因此,本文根据杆件强度设计和稳定设计公式^[18-19],定义了正应力范数来衡量误差 e 的大小,如下式所示。

$$\|f\|_{\sigma} = \alpha \left| \frac{N}{A} \right| + \beta \left| \frac{M_x}{W} \right| + \gamma \left| \frac{M_y}{W} \right| \quad (2)$$

$$W = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{32}, \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

其中： D 为圆管的外径； d 为内径； A 为圆管的面积； α 、 β 、 γ 的取值可参考钢结构规范^[17]。

当 $\alpha=1$ 、 $\beta=\gamma_x^{-1}$ 、 $\gamma=\gamma_y^{-1}$ 时， $\|f\|_\sigma$ 相当于钢结构规范中拉弯/压弯构件的强度控制应力，本文称它为强度应力。其中： γ_x 、 γ_y 为构件截面的塑性发展系数。

在式(2)中， $\frac{N}{A}$ 为轴力引起的最大正应力，即轴向应力； $\frac{M_x}{W}$ 和 $\frac{M_y}{W}$ 均为弯矩引起的最大正应力，即弯曲正应力。因此， $\|f\|_\sigma$ 可视为弯曲正应力和轴向正应力绝对值的加权和。

显然，范数 $\|f\|_\sigma$ 符合范数的3个要素，如式(3)~式(5)所示，可以用来衡量向量 e 的大小。

$$\|f\|_\sigma > 0 \tag{3}$$

$$\|\alpha f\|_\sigma = \alpha \|f\|_\sigma \tag{4}$$

$$\|f_1 + f_2\|_\sigma < \|f_1\|_\sigma + \|f_2\|_\sigma \tag{5}$$

同时，定义 f^* 的相对误差为：

$$S = \frac{\|e\|_\sigma}{\|f\|_\sigma} \tag{6}$$

2 相对精确解的选择

除了简单的问题，结构的广义力精确解 f 无法求出，否则也不必要进行有限元分析了。Zienkiewicz-Zhu 法采用相对精确解来近似替代精确解。在实体单元模型的自适应分析中，相对精确解为有限元应力解修匀后得到的一个光滑应力场。然而，在杆件结构中，各杆件的应力解在节点处的大小和方向都是不连续的。因此，无法像实体单元、壳单元有限元模型那样，通过修匀应力解的方法来获得相对精确解。

显然，对位移边界条件确定的杆件而言，考虑节点转动刚度得到的应力解，比不考虑杆端刚度得到的应力解要精确。因此，可以用前者作为相对精确解，来检验后者的精度。

如果杆件结构中每个杆件的有限元解 f^* 和它的相对精确解的差别都很小，即相对误差 S 的值很小，那么有限元解也就收敛于精确解。因此，该应力解符合 Zienkiewicz-Zhu 后验误差估计方法对相对精确解的规定，可以将它作为相对精确解。

3 相对精确解的计算

为了和 ANSYS 兼容，本文采用的坐标系、力和位移的正方向均与 ANSYS 相同。

3.1 梁*i-j*的轴力位移方程

考虑杆端弹簧刚度的梁*i-j*的轴力方程为^[18]：

$$u_i - u_j = \frac{F}{EA}L \tag{7}$$

$$F = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) \tag{8}$$

其中： E 、 A 和 L 分别为杆件的弹性模量、横截面积和长度； u_i 、 u_j 为杆件两端节点的 x 向位移。

3.2 梁*i-j*的转角位移方程

当梁*i-j*在两端力偶 M_i 、 M_j 作用下产生的杆端转角见图3所示，可表示为下式：

$$\beta_i = \frac{M_i}{3\omega} - \frac{M_j}{6\omega}, \quad \beta_j = \frac{M_j}{3\omega} - \frac{M_i}{6\omega} \tag{9}$$

其中， $\omega = \frac{EI}{L}$ 为杆件的线刚度。

当简支梁支座两端有相对竖向位移 $v_j - v_i$ 时，杆端转角为：

$$\alpha_i = \frac{v_j - v_i}{L}, \quad \alpha_j = \frac{v_j - v_i}{L} \tag{10}$$

由杆端弹簧引起的转角为：

$$\gamma_i = M_i / k, \quad \gamma_j = M_j / k \tag{11}$$

其中， k 为节点的转动刚度。

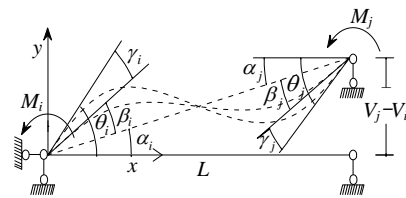


图3 考虑节点转动刚度的梁单元
Fig.3 Beam element with spring element

将式(9)~式(11)相加得：

$$\theta_i = \frac{v_j - v_i}{L} + \frac{M_i}{3\omega} - \frac{M_j}{6\omega} + \frac{M_i}{k} \tag{12}$$

$$\theta_j = \frac{v_j - v_i}{L} + \frac{M_j}{3\omega} - \frac{M_i}{6\omega} + \frac{M_j}{k} \tag{13}$$

求解式(12)、式(13)得：

$$M_i = \frac{12w(k^2 + 3k\omega)}{4(k + 3\omega)^2 - k^2} \theta_i + \frac{6k^2\omega}{4(k + 3\omega)^2 - k^2} \theta_j - \frac{18w(k^2 + 2k\omega)}{L[4(k + 3\omega)^2 - 1]} (v_j - v_i) \tag{14}$$

$$M_j = \frac{6k^2\omega}{4(k+3\omega)^2 - k^2}\theta_i + \frac{12w(k^2+3k\omega)}{4(k+3\omega)^2 - k^2}\theta_j - \frac{18w(k^2+2k\omega)}{L[4(k+3\omega)^2 - k^2]}(v_j - v_i) \quad (15)$$

根据平衡条件还可求出杆端剪力如下:

$$Q_{ij} = -\frac{1}{L}(M_i + M_j)$$

即:

$$\bar{K} = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{36C}{L^2B} & 0 & 0 & 0 & \frac{18C}{LB} & 0 & -\frac{36C}{L^2B} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18C}{LB} \\ & \frac{36C}{L^2B} & 0 & -\frac{18C}{LB} & 0 & 0 & 0 & -\frac{36C}{L^2B} & 0 & -\frac{18C}{LB} & 0 & 0 \\ & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{12C}{LB} & 0 & 0 & 0 & \frac{18C}{LB} & 0 & \frac{6w}{B} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12C}{LB} & 0 & -\frac{18C}{LB} & 0 & 0 & 0 & \frac{6w}{B} & 0 \\ & & & & & \frac{EA}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{36C}{L^2B} & 0 & 0 & 0 & -\frac{18C}{LB} & 0 \\ & & & & & & & \frac{36C}{L^2B} & 0 & \frac{18C}{LB} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{12C}{LB} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{12C}{LB} & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

对 称

其中: $B = 4(1+3\omega/k)^2 - 1$; $C = \omega(1+3\omega/k)$ 。

当 $k=0$ 时, 半刚性模型转变为杆单元模型, 位移转角关系式(14)变为下式:

$$M_i = 0 \quad (17)$$

当刚度 $k=+\infty$ 时, 半刚性模型变成为梁单元模型, 位移转角关系式(15)变为下式:

$$M_i = 4\omega\theta_i + 2\omega\theta_j - \frac{6\omega}{L}(v_j - v_i) \quad (18)$$

可见, 式(16)所示的单元刚度矩阵可以模拟杆件 $i-j$ 转动刚度从 0 到无穷大之间的行为。

$$Q_{ij} = Q_{ji} = -\left(\frac{18\omega(k^2+3k\omega)}{L[4(k+3\omega)^2 - k^2]}\right)\theta_i - \frac{18w(k^2+3k\omega)}{L[4(1+3\omega)^2 - k^2]}\theta_j + \frac{18(2k^2+6k\omega)}{L^2[4(1+3\omega)^2 - k^2]}(v_j - v_i)$$

同理, 求出梁 $i-j$ 在 $y-z$ 平面中的转角弯矩方程, 并结合式(7)、式(8)即可得到考虑杆端弹簧刚度的梁 $i-j$ 的单元刚度矩阵为:

3.3 相对精确解和有限元解的差别

根据 3.1, 考虑节点转动刚度前后, 杆件轴力-位移关系不变; 因此, 需要调整的只是杆件 $i-j$ 的转角位移方程式(14)、式(15)。

在杆端位移 θ_i 、 θ_j 、 v_i 、 v_j 确定的情况下, 将式(14)与式(17)相减, 并对 θ_i 、 θ_j 和 $-(v_i - v_j)$ 取绝对值, 即可得到: 和半刚性模型相比, 采用杆单元模拟杆件 $i-j$ 时, i 端弯矩最大误差的绝对值为 Δm 时的公式, 如式(19)所示。求解刚度 k , 得到两个解 k_{t1} 、 k_{t2} , 如式(21)、式(22)所示。

同理, 将式(14)与式(18)相减, 得到式(20), 求解刚度 k , 得到两个解 k_{ib1} 、 k_{ib2} , 如式(23)、式(24)所示。

将式(21)、式(24)的角标 i 、 j 互换, 即可得到 k_{ji1} 、 k_{ji2} 、 k_{jb1} 、 k_{jb2} 。

$$\Delta m = \frac{12\omega(k^2 + 3k\omega)}{4(k+3\omega)^2 - k^2} |\theta_i| + \frac{6k^2\omega}{4(k+3\omega)^2 - k^2} |\theta_j| + \frac{18w(k^2 + 3k\omega)}{L^2[4(k+3\omega)^2 - k^2]} |v_i - v_j| \quad (19)$$

$$\Delta m = \left[\frac{4\omega}{L} - \frac{12w(k^2 + 3k\omega)}{4(k+3\omega)^2 - k^2} \right] |\theta_i| + \left[\frac{2\omega}{L} - \frac{6k^2\omega}{4(k+3\omega)^2 - k^2} \right] |\theta_j| + \left[\frac{6\omega}{L^2} - \frac{18\omega(k^2 + 3k\omega)}{L^2[4(k+3\omega)^2 - k^2]} \right] |v_i - v_j| \quad (20)$$

$$k_{ii1} = [18v\omega - 12l\Delta m + 6(l^2\Delta m^2 + 6|\theta_j|l^2\omega\Delta m + 9l^2\theta_i^2w^2 + 6l\Delta m\omega v + 18l|\theta_i|\omega^2v + 9v^2\omega^2)^{0.5} + 3l|\theta_i|\omega]^{-1} l\Delta m\omega \quad (21)$$

$$k_{ii2} = [-12v\omega - 18l\Delta m + 6(l^2\Delta m^2 + 6|\theta_j|l^2\omega\Delta m + 9l^2\theta_i^2w^2 + 6l\Delta m\omega v + 18l|\theta_i|\omega^2v + 9v^2\omega^2)^{0.5} - 3l|\theta_i|\omega]^{-1} l\Delta m\omega \quad (22)$$

$$k_{ib1} = [2l\Delta m - 9v\omega - (l^2\Delta m^2 - 8l^2\Delta m|\theta_i|\omega - 10l^2\Delta m|\theta_j|\omega + 25l^2\theta_i^2\omega^2 + 40l^2|\theta_i\theta_j|\omega^2 + 16l^2\theta_j^2\omega^2 - 18l\Delta mv\omega + 90l|\theta_i|v\omega^2 + 72l|\theta_j|v\omega^2 + 81v^2\omega^2)^{0.5} + 5l\omega|\theta_i| + 4l\omega|\theta_j|]^{-1} (36v\omega^2 + 24l|\theta_i|\omega^2 + 12l|\theta_j|\omega^2 - 6l\Delta m\omega) \quad (23)$$

$$k_{ib2} = [2l\Delta m - 9v\omega - (l^2\Delta m^2 - 8l^2\Delta m|\theta_i|\omega - 10l^2\Delta m|\theta_j|\omega + 25l^2\theta_i^2\omega^2 + 40l^2|\theta_i\theta_j|\omega^2 + 16l^2\theta_j^2\omega^2 - 18l\Delta mv\omega + 90l|\theta_i|v\omega^2 + 72l|\theta_j|v\omega^2 + 81v^2\omega^2)^{0.5} + 5l\omega|\theta_i| + 4l\omega|\theta_j|]^{-1} (36v\omega^2 + 24l|\theta_i|\omega^2 + 12l|\theta_j|\omega^2 - 6l\Delta m\omega) \quad (24)$$

其中: $v = |v_j - v_i|$; 对式(21)、式(22)而言, 根据图 3, 当节点 i 、 j 位置相同时, 如果梁单元模型和杆单元的位形相同, 则 $\theta_j = \theta_i = \frac{v}{l}$ 。

在式(19)中, Δm 为 k 的增函数, 而在式(20)中,

Δm 为 k 的减函数(证明见附录)。因此, 可以得到:

1) 当 k_{ii1} 、 k_{ii2} 、 k_{ji1} 、 k_{ji2} 均小于 0 时, 表明: 无论杆件节点 i 、 j 的转动刚度 k 如何变化, 将杆件图 4 所示的杆件视为铰接模型, 采用杆单元离散, 误差都不会超过 Δm 。

2) 当 k_{ib1} 、 k_{ib2} 、 k_{jb1} 、 k_{jb2} 均小于 0 时, 无论节点刚度如何变化, 将其视为刚接模型, 采用梁单元离散, 误差都不会超过 Δm 。

3) 当 k_{ii1} 、 k_{ii2} 、 k_{ji1} 、 k_{ji2} 至少有一个值大于 0 时, 最小的正数解为有效解 k_t 。说明当节点刚度小于 k_t 时, 杆件可以采用杆单元离散, 误差不会超过 Δm_t 。

4) 当 k_{ib1} 、 k_{ib2} 、 k_{jb1} 、 k_{jb2} 至少有一个值大于 0 时, 最大的正数解为有效解 k_b 。说明当节点刚度大于 k_b 时, 杆件可以采用梁单元离散。

综合 1)~4), 只有当节点的转动刚度介于 k_t 和 k_b 之间时, 采用梁单元或者杆单元离散图 4 所示的杆件 i - j 才会导致弯矩误差大于 Δm , 应当该采用如图 3 所示的半刚性模型, 其余情况均可视为铰接或者刚接模型。

作为一个特例: 当 $\theta_j = 0$ 、 $\theta_i = 0$ 、 $v_i = v_j$ 、 $\Delta m = 0$ 时, 可以得到:

$$k_{ii1} = k_{ji1} = -6\omega \quad (25)$$

$$k_{ii2} = k_{ji2} = -2\omega \quad (26)$$

可见, 在图 2 所示的工况中, k_{ii1} 、 k_{ii2} 、 k_{ji1} 、 k_{ji2} 均小于 0, 如式(25)、式(26)所示。根据本节中的分析, 对图 2 中的结构来说, 无论节点刚度如何变化, 采用杆单元模型来模拟, 误差均为 0。

3.4 弯矩误差允许值 Δm 的确定

根据第 1 节中正应力范数的定义, 正应力范数反映的是最大正应力误差。而式(21)到式(24)反映的是弯矩、转角和侧移之间关系。因此, 式(6)所示相对误差需等价于弯矩误差 Δm , 即下式:

$$\Delta m = S \| f^* \| W \quad (27)$$

4 自适应分析的流程

当节点的转动刚度介于 k_t 和 k_b 之间时, 可以采用式(16)中的单元刚度矩阵来模拟节点的半刚性, 也可以采用弹簧+梁单元来模拟。鉴于 ANSYS 等大型商业有限元软件没有单元刚度矩阵如式(16)所示的单元, 但都有弹簧单元。因此, 第 2 种方法比较

适合在已有的商业有限元软件中进行 2 次开发，本文推荐第 2 种方法。

随着杆件结构有限元模型离散方式的调整，当所有杆件的相对误差 S 都满足求解精度时，即可终止试算，输出计算结果。这样，考虑节点转动刚度的杆件结构自适应有限元法的分析流程可表示为图 4。其中： K_0 为节点的转动刚度， $elem$ 为梁/杆单元的个数。

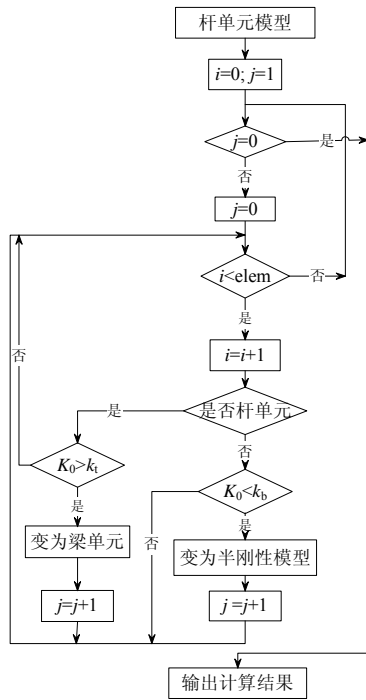


图 4 自适应分析流程图

Fig.4 Flow process diagram of adaptive finite element analysis

5 数值算例

图 5 和图 6 所示的 2 个结构各由两根钢管组成，钢管外径 88mm，厚度 4mm，节点刚度为 $1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ 。相对误差 S 设为 0.05， α 取值为 1.15。这时， $\|f\|_\sigma$ 的物理意义为杆件的强度应力。利用该结构的受力分析来说明考虑节点刚度的杆件结构自适应有限元分析方法的过程并检验它的求解精度。

本文选择第 4 节中的第 2 种方法，即采用 APDL 语言将流程图 5 输入 ANSYS 中进行 2 次开发。梁单元采用 BEAM188 单元，弹簧单元采用 COMBIN14 单元。

2 种结构的初始有限元模型均为杆单元模型，根据图 4，它们的分析过程为：

1) 结构 1。在第 1 次试算中，结构 1 中杆件 1

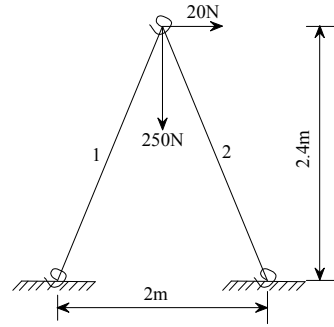


图 5 结构 1

Fig.5 Structure 1

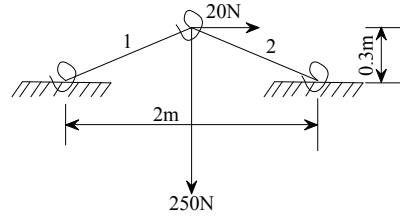


图 6 结构 2

Fig.6 Structure 2

的 k_t 为 $1.301 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}$ ，小于节点刚度的实际值 $1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ ，不能采用杆单元离散，将其变为梁单元；杆件 2 的 k_t 不存在，可以采用杆单元离散，计算结果见表 1。在第 2 次试算中，得到杆件 1 的 k_b 值为 4.135×10^5 ，小于 $1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ ，仍可采用梁单元离散；杆件 2 的 k_t 值不存在，仍可采用杆单元离散，计算结果如表 2 所示。在第 2 次试算中没有变动结构 1 的离散方式，即试算结束后 $j=0$ ，可以终止试算输出计算结果。可见，结构 1 中的杆件 1 和杆件 2 分别需要采用梁单元和杆单元离散。

2) 结构 2。在第 1 次试算中，分别求出杆件 1、杆件 2 的 k_t 分别为 $3.275 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}$ 和 $4.048 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}$ ，均小于节点的转动刚度 $1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ ，于是将杆件 1、杆件 2 变为梁单元离散，计算结果见表 1；在第 2 次试算中，得到杆件 1、杆件 2 的 k_b 分别为 $9.549 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{m}$ 和 $9.148 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{m}$ ，均大于 $1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ ，说明两根杆件都不能采用梁单元离散，需要变为半刚性模型，计算结果见表 2；在第 3 次试算后输出计算结果，计算结果见表 3。

将结构 1、结构 2 均采用弹簧+梁单元来离散，来验证该算法的正确性，计算结果见表 3。可以看出：

1) 结构 1。在第 1 次试算时，由于杆件 1 的 $k_t > 0 < 1.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$ ，所以杆件 1 的强度应力与半刚性模型相差 7.04%，大于误差允许值 5%，如表 1 和表 3 所示。在第 2 次试算中，将结构 1 的杆件 1

和杆件 2 分别采用梁单元离散和杆单元离散, 因为杆件 1 的 $k_t < 0$, 杆件 2 的 $k_b < 1.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, 所以杆件 1、杆件 2 的强度应力与半刚性模型仅差 1.037% 和 1.096%, 均小于 5%, 如表 2、表 3 所示。

结构 2。在第 1 次试算中, 由于杆件 1、杆件 2 的 k_t 值均小于 $1.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, 所以杆件 1 和杆件 2 的强度应力与半刚性模型分别相差 35.3% 和 33.7%, 如表 1、表 2 所示; 在第 2 次试算中, 将两个杆件都采用梁单元离散, 得到的 k_b 值均大于 $1.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, 所以杆件 1、杆件 2 的强度应力与半刚性模型相差 16.1% 和 16.7%, 均大于 5%, 如表 2、表 3 所示。因此, 结构 2 中的两个杆件都必须采用半刚性模型离散。

可见, 随着试算次数的增加, 当结构 1、结构 2 中每个杆件的 S 值都在允许范围内时, 杆件的强度应力也就逼近于相对精确解, 即每根杆件都采用半刚性模型离散后得到的强度应力。

因此, 该算法可以根据节点转动刚度对杆件弯曲正应力和轴向正应力的影响, 正确选择有限元离散方式。同时, 因为杆单元模型的自由度最少, 弹簧+梁单元模型需要设置重合节点^[18], 自由度最多, 而有限元模型的计算量随自由度的增长而指数增

长, 所以该算法可以在保证计算精度的前提下, 准确选择有限元模型, 从而有效降低计算量。

2) 从表 2、表 3 可以看出: 对结构 1 中的杆件 1 而言, 采用自适应模型得到的 m_i 和 m_j 和半刚性模型得到的结果相差很大, 但强度应力却相差不足 2%。这是因为: 在杆件 1 中, 弯曲正应力和轴向正应力的比值很小, 仅为 4.1%。这样, 尽管弯矩误差较大, 强度应力误差却很小。因此, 在进行杆件的稳定设计或强度设计时, 不宜直接采用弯矩的相对误差作为有限元分析精度的衡量标准。这就是本文定义正应力范数来误差大小的原因。

3) 在节点转动刚度相同、误差允许值 S 相同的情况下, 对结构 1 中的杆件 2 而言, 由于 k_t 没有有效值, 无论节点刚度如何变化, 都可视为铰接模型, 采用杆单元离散; 对结构 2 中的杆件 1 而言, 节点刚度 $k_t > 4.048 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}$ 时, 就不能视为铰接模型并采用杆单元离散; 可见, 当杆件的边界条件发生变化时, 杆件的应力解对节点转动刚度的敏感性有很大的差别。本文可以采用参数 k_t 或 k_b 来量化杆件结构的应力解对节点转动刚度的敏感性, 为杆件结构的设计和参考提供参考。

表 1 第 1 次试算(杆单元模型)

Table 1 The first calculation (truss models)

结构	杆件		$ \theta_i $	$ \theta_j $	V/m	$\Delta m / (\text{N} \cdot \text{m})$	强度应力/Pa	k_t	S/(%)
	编号	类型							
1	1	杆	5.466×10^{-7}	5.466×10^{-7}	1.422×10^{-6}	0.110	1.037×10^5	1.301×10^5	5
1	2	杆	2.750×10^{-8}	2.750×10^{-8}	7.150×10^{-8}	0.162	1.530×10^5	无限制	5
2	1	杆	6.713×10^{-6}	6.713×10^{-6}	6.981×10^{-6}	0.427	4.026×10^5	3.275×10^4	5
2	2	杆	6.121×10^{-6}	6.121×10^{-6}	6.366×10^{-6}	0.478	4.222×10^5	4.048×10^4	5

表 2 第 2 次试算

Table 2 The second calculation

结构	杆件		$ \theta_i $	$ \theta_j $	$ M_i / (\text{N} \cdot \text{m})$	$ M_j / (\text{N} \cdot \text{m})$	v/m	$\Delta m / (\text{N} \cdot \text{m})$	强度应力/Pa	$k_b / (\text{N} \cdot \text{m})$
	编号	类型								
1	1	梁	0	4.289×10^{-7}	0.172	0	1.420×10^{-6}	0.117	1.112×10^5	4.135×10^5
1	2	杆	4.071×10^{-8}	4.071×10^{-8}	0	0	7.002×10^{-8}	0.167	1.583×10^5	无限制
2	1	梁	0	2.135×10^{-8}	6.359	6.351	6.333×10^{-6}	0.662	6.254×10^5	1.018×10^7
2	2	梁	0	2.135×10^{-8}	6.343	6.351	6.303×10^{-6}	0.682	6.448×10^5	9.794×10^6

表 3 第 3 次试算(半刚性模型)

Table 3 The third calculation (semi-rigid model)

结构	杆件		$ \theta_i $	$ \theta_j $	$ M_i / (\text{N} \cdot \text{m})$	$ M_j / (\text{N} \cdot \text{m})$	v/m	强度应力/Pa
	编号	类型						
1	1	半刚性	1.350×10^{-7}	4.478×10^{-7}	0.116	8.886×10^{-2}	1.420×10^{-6}	1.110×10^5
1	2	半刚性	3.128×10^{-8}	3.589×10^{-7}	3.128×10^{-2}	8.886×10^{-2}	7.002×10^{-8}	1.566×10^5
2	1	半刚性	3.479×10^{-6}	2.025×10^{-6}	3.479	4.013	6.875×10^{-5}	5.447×10^5
2	2	半刚性	3.469×10^{-6}	1.988×10^{-6}	3.468	4.013	6.570×10^{-5}	5.645×10^5

6 结论

(1) 在规定的正应力误差范围内, 该算法可以判定节点转动刚度多大时, 杆件需要采用杆单元模型、梁单元模型及半刚性模型来模拟, 在保证计算精度的前提下, 尽可能减少计算量和避免测量节点的转动刚度。同时, 该算法还可以量化杆件正应力对节点转动刚度的敏感程度, 为杆件结构的设计和研究提供参考。估计节点刚度的最大最小值。

(2) 该算法可以在 ANSYS 中进行 2 次开发来实现, 编程工作量和新增的计算量都很小, 具有一定的实用价值。该算法应用于 ANSYS 以外的其他软件时, 应确保该软件中力和位移的正方向和 ANSYS 完全相同, 或完全相反。

参考文献:

- [1] 龙驭球, 包世华. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996: 12—24.
Long Yuqiu, Bao Shihua. Structure mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1996: 12—24. (in Chinese)
- [2] Lhaddoudene A N T, Saidani M, Chemrouk M. Mechanical model for the analysis of steel frames with semi-rigid joints [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2008, doi: 10.10.16.
- [3] Shiro kato, Itaru Mutoh, Masaaki Shomura. Collapse of semi-rigidly jointed reticulated domes with initial geometric imperfections [J]. Journal of Construction Steel Research, 1998, 48: 145—168.
- [4] 范锋, 马会环, 沈世钊. 半刚性型螺栓球节点单程 K8 型网壳弹塑性分析[J]. 土木工程学报, 2009, 42(2): 45—52.
Fan Feng, Ma Huihuan, Shen Shizhao. Elasto-plastic stability analysis of K8 single layer reticulated shells with bolt-ball joint system [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(2): 45—52. (in Chinese)
- [5] 苏玉红. 节点刚度对网壳结构稳定性的影响分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2005: 21—38.
Su Yuhong. Research on the effect of joints stiffness on the stability of reticulated shells [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005: 21—38. (in Chinese)
- [6] JGJ 7-2010, 空间网格结构技术规程[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
JGJ 7-2010, Specification for design and construction of trussed structure [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese)
- [7] 石永久, 施刚, 王元清. 钢结构半刚性端板连接弯矩转角曲线简化计算方法[J]. 土木工程学报, 2006, 39(3): 19—23.
Shi Yongjiu, Shi Gang, Wang Yuanqing. A simplified calculation method for moment-rotation curve of semi-rigid end-plate connections [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(3): 19—23. (in Chinese)
- [8] 黄翼卓, 王湛, 潘建荣. 钢结构梁柱连接节点刚度的半解析测试方法[J]. 工程力学, 2011, 28(1): 105—109.
Huang Yizhuo, Wang Zhan, Pan Jianrong. Semi-analytical method for beam-to-column connection rigidity of steel structures [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(1): 105—109. (in Chinese)
- [9] 张殿生. 电力工程高压送电线路设计手册[S]. 长春: 中国电力出版社, 2007.
Zhang Diansheng. Design handbook of high voltage transmission line about power engineering [S]. Beijing: China Electric Power Press, 2007. (in Chinese)
- [10] 杨建平, 李正, 程永锋, 杨靖波. 架空输电线路钢管塔结构[M]. 北京: 中国电力出版社, 2011: 1—21.
Yang Jianping, Li Zheng, Cheng Yongfeng, Yang Jingbo. Tabular transmission tower of overhead line [M]. Beijing: China Electric Power Press, 2011: 1—21. (in Chinese)
- [11] 韩军科, 杨靖波, 杨风利, 李峰, 李茂华. 特高压钢管塔主材长细比及径后比的取值[J]. 电网技术, 2009, 33(19): 17—20.
Han Junke, Yang Jingbo, Yang Fengli, Li Feng, Li Maohua. Value selection of slenderness ratio and diameter-thickness ratio of steel tube for 1000kv transmission steel tubular tower legs [J]. Power System Technology, 2009, 33(19): 17—20. (in Chinese)
- [12] Babuska I, Zienkiewicz O C. Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations [M]. John Wiley & Sons, 1986: 32—51.
- [13] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A simple error estimator and procedure for practical engineering analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(6): 337—357.
- [14] Babuska I, Strouboulis T, Upadhyay C S. A model study of the quality of a-posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimations in the interior of patchwise uniform grids of triangles [J]. Computational Engineering and Science Methodologies, 1994, 114(10): 307—540.
- [15] 杨令强, 马静, 陈祖坪. 自适应有限元在拱坝破坏追踪中的应用[J]. 水利发电学报, 2008, 27(3): 48—53.
Yang Lingqiang, Ma Jing, Chen Zuping. The application of adaptive FEM in cracking trace of arch dams [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2008, 27(3): 48—53. (in Chinese)
- [16] 杨强, 吴浩, 周维垣. h-型自适应有限元法分析中的大坝应力取值标准[J]. 水利学报, 2005, 36(3): 321—327.
Yang Qiang, Wu Hao, Zhou Weiyuan. Study on determination of dam stress based on h-version adaptive FEM [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(3): 321—327. (in Chinese)

- [17] 刘海锋, 罗尧治, 娄荣. 圆管网格结构的自适应有限元分析方法研究[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 46—51.
Liu Haifeng, Luo Yaoshi, Lou Rong. Adaptive finite element procedure for pipe section latticed shell structures [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(1): 46—51. (in Chinese)
- [18] GB 50017-2003, 钢结构设计规范[S]. 北京: 中国计划

- 出版社, 2003.
GB 50017-2003, Code for design of steel structures [S]. Beijing: China Planning Press, 2003. (in Chinese)
- [19] 范钦珊. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 52—61.
Fan Qinshan. Material mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 52—61. (in Chinese)

附录:

令:

$$y_1 = \frac{12\omega(k^2 + 3k\omega)}{4(k+3\omega)^2 - k^2}, \quad y_2 = \frac{6k^2\omega}{4(k+3\omega)^2 - k^2}$$

对 y_1 、 y_2 求关于 k 的导数为:

$$y_1' = \frac{252k^2\omega^2 + 1728\omega^3k + 2592\omega^4}{[4(k+3\omega)^2 - k^2]^2},$$

$$y_2' = \frac{432k\omega^3 + 32k^2\omega^2}{[4(k+3\omega)^2 - k^2]^2}.$$

因为 $k > 0$ 、 $\omega > 0$, 所以 $y_1' > 0$ 、 $y_2' > 0$ 。因此, y_1 、

y_2 为增函数。

式(14)、式(15)可改写为:

$$\Delta m = y_1 |\theta_i| + 0.5y_2 |\theta_j| + 1.5 \frac{y_1}{L^2} |v_i - v_j|,$$

$$\Delta m = \left(\frac{\omega}{l} - y_1 \right) |\theta_i| + \left(\frac{\omega}{l} - 0.5 \right) y_2 |\theta_j| - 1.5 \frac{y_1}{L^2} |v_i - v_j|$$

可见: 在式(14)中, Δm 是 k 的增函数, 而在式(15)中, Δm 是 k 的减函数。

(上接第 18 页)

- [9] Leevers P S, Radon J C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries [J]. International Journal of Fracture, 1982, 19: 311—325.
- [10] Karihaloo B L, Xiao Q Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam [J]. International Journal of Fracture, 2001, 112(2): 111—128.
- [11] Fett T. A compendium of T-stress solutions [R]. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 1998.
- [12] Sham T L. The determination of the elastic T-term using higher order function [J]. International Journal of Fracture, 1991, 48: 81—102.
- [13] Filon L N G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading [M]. Philosophical Transactions of the Royal Society, A, 201, 1903: 63—155.
- [14] Kfoury A P. Some evaluation of the elastic T-term using Eshelby's method [J]. International Journal of Fracture, 1986, 30: 301—315.
- [15] 李强, 王伟, 韩现民. 压缩载荷下闭合斜裂纹的分支裂纹渐近扩展分析[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 223—229

- Li Qiang, Wang Wei, Han Xianmin. Asymptotic propagation of the branch crack path of the closed inclined flaw under compressive loading [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 223—229. (in Chinese)
- [16] 李强, 张雷霆, 齐清兰, 张昀青, 张军. 压缩载荷下闭合裂纹的曲线分支裂纹模型研究[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 294—300.
Li Qiang, Zhang Liting, Qi Qinglan, Zhang Yunqing, Zhang Jun. Study of the curve branch crack model for the closed flaw under compressive loading [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 294—300. (in Chinese)
- [17] Guinea G V, Pastor J Y, Planas J, Elices M. Stress intensity factor, compliance and CMOD for a general three-point-bend beam [J]. International Journal of Fracture, 1998, 89: 103—116.
- [18] 冶金工业部钢铁研究院断裂力学组. 单边裂纹梁横向力弯曲下的 K_I 和 K_{II} [J]. 力学学报, 1977, 4: 308—313.
Fracture Mechanics Group of Central Iron and Steel Research Institute, Ministry of Metallurgical Industry. K_I and K_{II} of single-edge beam under transverse bending [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1977, 4: 308—313. (in Chinese)