

文章编号: 1000-4750(2013)10-0001-04

# 空间范数在压电柔性结构振动控制中的应用研究

徐亚兰, 陈建军

(西安电子科技大学机电工程学院, 西安 710071)

**摘 要:** 在空间范数定义的基础上, 推导出了结构模态空间范数的计算公式。考虑压电柔性结构振动控制中作动器分布对结构建模与控制性能的影响, 利用模态空间范数度量各个模态对结构动力响应的贡献, 并对结构进行了模态选择与模型降阶。利用所建立的降阶模型, 设计了一个对受外部干扰结构进行振动抑制的动态输出反馈  $H_\infty$  振动控制器, 并与传统的直接截断方法进行了比较。结果表明, 模态对系统动力响应的贡献意味着作动器对模态的控制能力, 在此基础上设计的结构振动控制器性能明显提高。

**关键词:** 柔性结构; 振动控制; 模态空间范数; 压电材料; 降阶模型

**中图分类号:** TH113; TP13 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0471

## RESEARCH ON VIBRATION CONTROL OF PIEZOELECTRIC FLEXIBLE STRUCTURES BASED ON SPATIAL NORMS

XU Ya-lan, CHEN Jian-jun

(School of Electronic &amp; Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Using the definition of a spatial norm, the calculation formulas of modal spatial norms for structures are derived. In order to investigate the influence of the location of piezoelectric actuators on modeling dynamic equations and designing controllers for piezoelectric flexible structures, modal spatial norms, which serve as the measure of the contribution of modes to the dynamic response of a system varying with the location of piezoelectric actuators, are used to pick up the modes included in the reduction model. Based on the reduction model and compared with the traditional direct modes-truncation method, a dynamic output feedback  $H_\infty$  control law is designed to suppress the vibration due to external disturbances. Simulation results show that the contribution of vibration modes to the dynamic response of a system means the ability of actuators to control vibration modes, based on which the performance of a controller is improved.

**Key words:** flexible structure; vibration control; modal spatial norm; piezoelectric material; reduction model

压电柔性结构由于模态频率低、阻尼小, 所以易受外界干扰产生长时间持续振动; 而此类结构本身又是具有无限自由度的分布参数系统, 在其振动主动控制中, 必须进行模型降阶以便控制器的设计与工程实现。高维柔性结构的模型降阶在振动控制过程中的负面影响是带来观察溢出与控制溢出, 从而分别导致残余模态的不稳定与控制性能的劣化。如何利用有效的降阶方法来获取阶数较低、且又足够精确的适合控制的模型, 一直是困扰振动控制研

究者的主要问题<sup>[1-4]</sup>。系统模型降阶的方法有很多<sup>[5-8]</sup>, 如: 动力缩聚、模态截断法、动态子结构法、模态综合法、平衡降阶法、代价分析法、最优投影法等。但从柔性结构模态分析和模态控制的角度来看, 对系统进行直接模态截断可以在整个结构建模与控制过程中保留模态的概念, 是工程中常用的一种方法。由于高频模态的截断对低阶系统的零点是影响的, 所以高频模态可以用高频的直流响应或通过对系统范数进行优化来补偿。但传统的系

收稿日期: 2012-06-30; 修改日期: 2012-09-05

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(JY10000904012); 国防预研基金项目(51421060505DZ0155)

通讯作者: 徐亚兰(1971-), 女, 江苏人, 副教授, 博士, 从事振动分析与控制研究(E-mail: ylxu@mail.xidian.edu.cn).

作者简介: 陈建军(1951-), 男, 河北人, 教授, 硕士, 博导, 从事结构分析与可靠性工程研究(E-mail: jjchen@xidian.edu.cn).

统范数只适用于集中参数系统的降阶, 故文献[7]提出了利用多输入、无限维空间分布输出系统的空间范数对无限维分布参数系统的降阶模型进行补偿值优化, 从而为实现柔性结构的全局振动控制提供了模型降阶的处理方法。不过, 这种方法虽然考虑了高频模态对低阶模型的影响, 但也只是机械地截取了低阶模态, 并没有考虑到压电材料的因素。对于带有压电作动器/传感器的柔性结构而言, 由于其作动器位置的改变将会改变各个模态对结构动力响应的影响, 直接模态截断方法在使用时存在很大的局限性, 因为这种方法没有考虑各模态对结构动力响应的影响强度, 也就意味着没有权衡所配置的作动器对各个模态的控制能力, 只是直接保留前几阶模态, 这将会影响结构的振动控制性能。

本文将以带有压电作动器块的柔性结构为研究对象, 在结构振动控制中考虑作动器分布对结构建模与控制性能的影响, 利用模态空间范数, 根据模态对压电柔性梁结构动力响应贡献大小以及所配置的作动器对各个模态的控制能力大小, 对结构进行模型降阶处理与振动控制设计, 并与常规的模态截断方法进行比较。

## 1 系统空间范数

系统  $G(s)$  的  $H_2$  范数的定义为:

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}((G(j\omega))^* G(j\omega)) d\omega \quad (1)$$

若单输入-单输出系统  $G(s)$  的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad y(x,t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

则可通过下式求得其  $H_2$  范数为:

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{W}_c), \quad \|G(s)\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_o) \quad (3)$$

其中:  $(G(j\omega))^*$  表示矩阵  $G(j\omega)$  的共轭转置;  $\text{tr}(\bullet)$  表示矩阵的迹;  $\mathbf{W}_c$ 、 $\mathbf{W}_o$  分别为系统的可控 Gramian 阵及可测 Gramian 阵。 $\mathbf{W}_c$ 、 $\mathbf{W}_o$  可通过如下 Lyapunov 方程求解获得:

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c^T \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0, \quad \mathbf{A} \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o^T \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (4)$$

## 2 压电柔性结构的建模

以带有  $k$  个压电作动器块的 Euler-Bernoulli 梁结构为研究对象, 梁的几何尺寸为  $l_b \times w_b \times h_b$ , 第  $j$  个作动器的几何尺寸为  $l_{aj} \times w_{aj} \times h_{aj}$ 。由于压电作动器块的尺寸远远小于梁结构, 忽略压电材料本身对结构动力学的影响, 则结构的横向振动方程为:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 (M_{aj}(x,t))}{\partial x^2} \quad (5)$$

其中:  $y(x,t)$  为结构的动力位移响应;  $EI$  为抗弯刚度;  $\rho$ 、 $A$  分别为线密度和横截面。 $M_{aj} = K_j(H(x-x_{1j}) - H(x-x_{2j}))v_{aj}$  为第  $j$  个作动器贡献的弯矩,  $v_{aj}$  为其控制电压,  $x_{2j}$ 、 $x_{1j}$  为其两端面的位置坐标,  $H(\bullet)$  为 Heaviside 函数,  $K_j$  由梁结构与压电材料的性能及几何参数所确定<sup>[9]</sup>。

结构的响应可表示为:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) q_i(t) \quad (6)$$

其中:  $\varphi_i(x)$  为结构的第  $i$  阶模态振型函数;  $q_i(t)$  为第  $i$  阶模态坐标下动力位移响应。

利用  $\varphi_i(x)$  的正交性, 结构的动力学方程为:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} v_{aj}, \quad (7)$$

$$b_{ij} = K_j(\varphi'_i(x_{2j}) - \varphi'_i(x_{1j})), \quad i=1,2,\dots,\infty$$

其中:  $\xi_i$ 、 $\omega_i$  为第  $i$  阶模态频率与阻尼比;  $\varphi'_i(\bullet)$  表示对  $x$  求一阶导数。

以  $\mathbf{v}_a(t) = [v_{a1}(t), \dots, v_{ak}(t)]^T$  为输入, 以  $y(x,t)$  为输出, 可得结构的传递函数为:

$$\mathbf{G}(s,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{F}_i \varphi_i(x)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{F}_i = [F_{i1}, \dots, F_{ij}, \dots, F_{ik}]$ ,  $i=1,2,\dots,\infty$ ;  $F_{ij} = K_j(\varphi'_i(x_{2j}) - \varphi'_i(x_{1j}))$ ,  $j=1,2,\dots,k$ 。

以  $\mathbf{x}(t) = [q_1(t), \dot{q}_1(t), \dots, q_i(t), \dot{q}_i(t), \dots]^T$  为状态变量, 可得到结构的状态方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}_a(t), \quad y(x,t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

其中:  $\mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots\}$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_i, \dots]^T$ ,

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i \omega_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ F_{i1} & \dots & F_{ij} & \dots & F_{ik} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [\varphi_1(x), 0, \dots, \varphi_i(x), 0, \dots]。$$

## 3 压电柔性结构的模态空间范数

结构式(8)的空间  $H_2$  范数定义为:

$$\|\mathbf{G}(s,x)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^b \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}((\mathbf{G}(j\omega,x))^* \mathbf{G}(j\omega,x)) d\omega dx \quad (10)$$

利用模态的正交性,  $\|\mathbf{G}(s,x)\|_2^2$  可表示为:

$$\|\mathbf{G}(s, x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{G}_i(s, x)\|_2^2 \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{G}_i(s, x) = \frac{[F_{i1}, \dots, F_{ij}, \dots, F_{ik}] \varphi_i(x)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}$  为对应于第  $i$  阶模态的系统的传递函数分量, 则第  $i$  阶模态空间  $H_2$  范数  $\|\mathbf{G}_i(s, x)\|_2^2$  可定义为:

$$\|\mathbf{G}_i(s, x)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{G}_i(j\omega, x))^* \mathbf{G}_i(j\omega, x) d\omega dx \quad (12)$$

由式(11)可见, 柔性结构系统的空间  $H_2$  范数可表示为是各个独立模态的空间  $H_2$  范数的叠加。从系统范数的特性看, 可以用各模态的空间  $H_2$  范数来表征该模态对系统动力响应贡献的强弱, 所以柔性结构空间模型降阶时, 可以通过比较各模态的空间  $H_2$  范数的大小, 保留对系统动力响应贡献相对较大的模态, 而去掉贡献相对较小的模态。

利用正交条件  $\int_0^{l_b} \varphi_i(x) \rho A \varphi_i(x) dx = 1$ , 结构第  $i$  阶模态的空间  $H_2$  范数可表示为:

$$\|\mathbf{G}_i(s, x)\|_2^2 = \sum_{j=1}^k \|\mathbf{G}_{ij}(s, x)\|_2^2 = \rho A \sum_{j=1}^k \|g_{ij}(s)\|_2^2 \quad (13)$$

其中:  $\mathbf{G}_{ij}(s, x) = \frac{F_{ij} \varphi_i(x)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}$  为第  $j$  个作动器通过第  $i$  阶模态映射到结构空间分布输出的传递函数分量;  $\|\mathbf{G}_{ij}(s, x)\|_2^2$  为其  $H_2$  范数; 而  $\|g_{ij}(s)\|_2^2$  则可看成是单输入-单输出系统传递函数  $g_{ij}(s) =$

$\frac{F_{ij}}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}$  的  $H_2$  范数, 它可通过关系式(2)~式(4)来求解。由此可见, 多输入独立模态的空间  $H_2$  范数可以看成是单输入的该模态的空间  $H_2$  范数的叠加, 考虑到舍去模态对降阶模型零点及模型误差对控制鲁棒性的影响, 对高频残余模态进行补偿, 可获得压电柔性结构的降阶模型为:

$$\mathbf{G}_M(s, x) = \sum_{i \in U} \frac{F_i \varphi_i(x)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} + \text{RE} \quad (14)$$

其中:  $U$  为所挑选的模态集合; RE 为对高频模态的补偿, 可用高频模态的直流响应表示, 即:

$$\text{RE} = \sum_{i \in Q} \frac{F_i \varphi_i(x)}{\omega_i^2} \quad (Q \text{ 为高频模态集合})$$

或利用系统范数的优化  $\min \{\|\mathbf{G}_N(s, x) - \mathbf{G}_M(s, x)\|_2^2\}$  获得。因柔性结构的阻尼很小, 高频模态的补偿部分可近似表

示为  $\text{RE} = \sum_{i \in Q} \frac{1}{2\omega_i \omega_c} \ln \left( \frac{\omega_i + \omega_c}{\omega_i - \omega_c} \right) \varphi_i(x) F_i$ ,  $\omega_c$  为最高截止频率<sup>[7]</sup>。

### 4 空间范数在振动控制中的应用

利用本文方法, 对一个压电柔性简支梁进行空间模型降阶处理与振动主动控制仿真, 并与直接模态截断方法进行比较。该梁的几何尺寸为: 长 0.5m, 高 0.01m, 宽 0.05m; 弹性模量 70GPa, 模态阻尼比  $\zeta_i$  均取 0.01; 结构的体密度为 2500kg/m<sup>3</sup>; 作动器/压电传感器与梁同宽, 其厚为  $2 \times 10^{-4}$ m, 弹性模量 63GPa; 压电系数  $d_{31} = 120 \times 10^{-12}$ m/V, 传感器的参数为  $g_{31} = -1.15 \times 10^{-2}$ Vm/N,  $C_p = 1.05 \times 10^{-7}$ F。

图 1 和图 2 为压电作动器位于梁上  $0.23l_b \rightarrow 0.49l_b$  处, 以位于梁上不同位置 ( $x = 0.04\text{m}$  和  $x = 0.18\text{m}$ ) 的位移响应为输出的系统频率响应函数仿真结果。通过对各个模态的空间  $H_2$  范数计算, 选取空间  $H_2$  范数相对较大的前 7 个模态, 结果为应保留第 1 阶~第 6 阶和第 9 阶模态, 而舍去第 7 阶~第 8 阶和第 10 阶~第 20 阶模态。从图中可以看出, 在作动器的配置位置相同的情况下, 以梁结构上不同位置的位移响应为输出的系统降阶模型中被保留的模态是相同的, 可见本文降阶

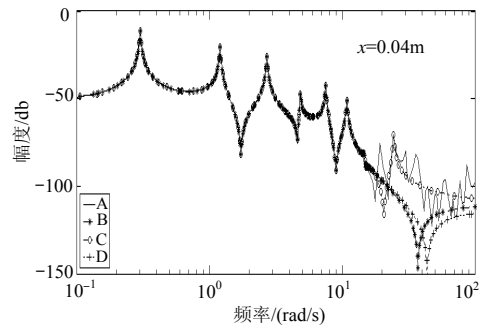


图 1 系统降阶前后的频率响应

Fig.1 Frequency responses of original and reduced systems

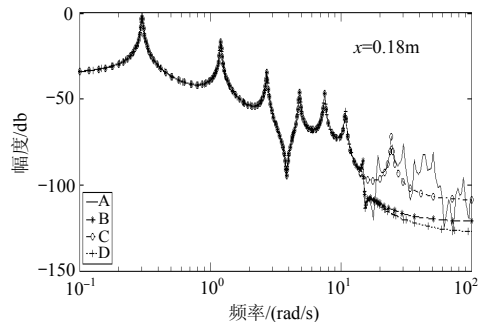


图 2 系统降阶前后的频率响应

Fig.2 Frequency responses of original and reduced systems

方法是对整个结构空间意义上的处理。图中曲线 A 为降阶前系统(20 个模态)的频响。B 为通过直接截取前 7 阶模态, 高频模态用直流响应补偿后得到的降阶模型的频响。C 为用文中方法进行降阶后系统的频响。D 为利用文献[7]方法得到的系统频响。

图 3 为压电作动器位于梁上的  $0.1l_b \rightarrow 0.14l_b$  处, 以在梁  $x=0.04\text{m}$  处的位移响应为输出的系统频响仿真结果。这时由于作动器位置的变化, 所应在降阶模型中保留的模态与作动器位于  $0.23l_b \rightarrow 0.49l_b$  处的情况是不一样的。实际上, 根据各模态的空间  $H_2$  范数, 在降阶模型中应保留第 1 阶~第 3 阶和第 5 阶~第 8 阶模态。图 3 中各条曲线的含义与图 1 和图 2 是一样的。

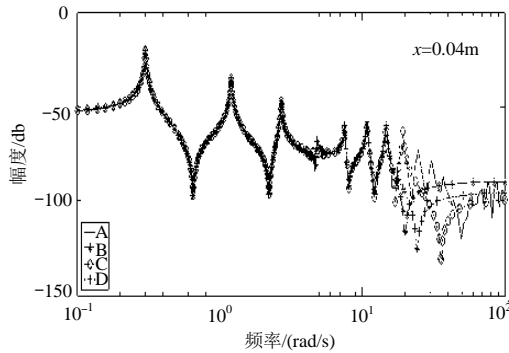


图 3 系统降阶前后的频率响应

Fig.3 Frequency responses of original and reduced systems

为了验证模态选择对振动主动控制效果的影响, 这里以距简支梁一端  $0.04\text{m}$  处的挠度为被控输出, 压电作动器/传感器位于梁的  $0.1l_b \rightarrow 0.14l_b$  ( $l_b$  为梁的长度), 外部扰动通过作动器作用于柔性梁, 则结构的开环系统状态方程(9)可变为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BV_a(t) + \tilde{B}w(t), \\ y(t) &= Cx(t), \quad z(t) = \tilde{C}x(t) \end{aligned} \quad (15)$$

其中:  $B = \tilde{B}$ ;  $w(t)$  为外部干扰;  $y(t)$  为被控输出;  $z(t)$  为测量输出, 测量输出矩阵  $\tilde{C}$  取决于模态振型及压电传感器在结构中的配置。

为了计算方便且不失一般性, 这里对保留前四阶模态(直接模态截断)以及保留第 1 阶~第 3 阶和第 5 阶模态(本文降阶方法)的两种情况利用线性矩阵不等式方法设计了进行振动控制的低阶动态输出反馈  $H_\infty$  控制器, 即: 设计如下控制器使结构闭环系统的  $H_\infty$  范数最小<sup>[10-11]</sup>。控制器的状态空间表示为:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_k \zeta(t) + B_k z(t), \\ V_a(t) &= C_k \zeta(t) + D_k z(t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中:  $\zeta(t)$  为控制器的状态变量;  $A_k$ 、 $B_k$ 、 $C_k$ 、 $D_k$  为待定的控制器参数。

这里, 利用这个控制器对高阶模型进行了振动控制仿真实验。图 4 与图 5 分别给出了使用两种方法, 被控结构闭环系统的脉冲响应曲线与频率响应函数曲线。从图中可以看出, 在模型降阶处理中考虑所配置的作动器对各个模态的控制能力, 将会提高压电柔性结构振动主动控制的控制效果。

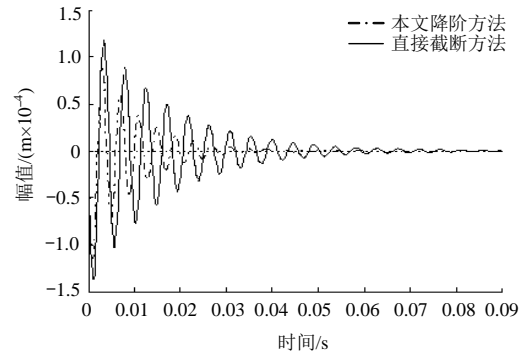


图 4 受控结构的脉冲响应曲线

Fig.4 Impulse responses for controlled structure

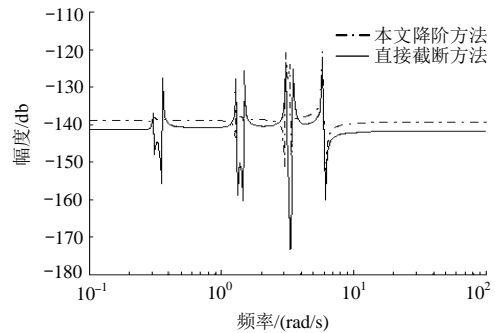


图 5 受控结构在两种方法下的频率响应曲线

Fig.5 Frequency responses for controlled structure

## 5 结论

(1) 随着作动器的配置位置不同, 结构的降阶模型中应保留的模态也会随之发生变化。常规模态截断法只是直接截取低阶模态, 而利用本文给出的方法获得的降阶模型保留了相对较重要的模态。显然它比常规方法获得的降阶模型将更逼近原系统。

(2) 根据模态对系统动力响应的贡献来进行模型降阶处理, 意味着考虑了所配置的作动器对各个模态的控制能力, 这将会提高压电柔性结构振动主动控制的控制效果。

(参考文献转第 13 页)

- Science Technology, 2008, 68: 2543—2550.
- [17] Zohdi T I. Computational optimization of the vortex manufacturing of advanced materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(46/47): 6231—56.
- [18] Häfner S, Eckardt S, Luther T, Könke C. Mesoscale modeling of concrete: geometry and numerics [J]. Computers & Structures, 2006, 84: 450—61.
- [19] 宋来忠, 姜袁, 彭刚. 混凝土随机参数化骨料模型及加载的数值模拟[J]. 水利学报, 2010, 41(9): 93—100. Song Laizhong, Jiang Yuan, Peng Gang. Numerical simulation of concrete random parameterized aggregate model and load test [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2010, 41(9): 93—100. (in Chinese)
- [20] 秦川, 郭长青, 张楚汉. 基于背景网格的混凝土细观力学预处理方法[J]. 水利学报, 2011, 42(8): 841—948. Qin Chuan, Guo Changqing, Zhang Chuhan. A pre-processing scheme based on background grid approach for meso-concrete mechanics [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2011, 42(8): 841—948. (in Chinese)
- [21] Walaraven J C, Reinhardt H W. Theory and experiments on the mechanical behavior of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading [J]. HERON, 1991, 26(1A): 26—35.
- [22] 方秦, 张锦华, 还毅, 张亚栋. 全级配混凝土三维细观模型的建模方法研究[J]. 工程力学, 2013, 30(1): 14—21, 30. Fang Qin, Zhang Jinhua, Huan Yi, Zhang Yadong. The investigation into three-dimension mesoscale modelling of fully-graded concrete [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(1): 14—21, 30. (in Chinese)
- [23] 杜修力, 金浏. 混凝土材料细观单元弹模非均匀统计特性研究[J]. 工程力学, 2012, 29(10): 106—115. Du Xiuli, Jin Liu. Research on the heterogeneous statistic properties of elasyic modulus of a concrete meso-scale unit [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(10): 106—115. (in Chinese)
- [24] 王娟, 李庆斌, 卿龙邦, 管俊峰. 基于细观结构统计特征的混凝土几何代表体尺寸研究[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 1—6. Wang Juan, Li Qingbin, Qing Longbang, Guan Junfeng. Syudies on representative volume element size of concrete based on meso-structure statics [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(12): 1—6. (in Chinese)

(上接第 4 页)

#### 参考文献:

- [1] Narayanan S, Balamurugan V. Finite element modeling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(3): 529—562.
- [2] Giovanni Caruso, Sergio Galeani, Laura Menini. Active vibration control of an elastic plate using multiple piezoelectric sensors and actuators [J]. Simulation Modeling Practice and Theory, 2003, 11(5/6): 403—419.
- [3] Xu Yalan, Chen Jianjun. Modal-based model reduction and vibration control for uncertain piezoelectric flexible structures [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2008, 29(5): 489—504.
- [4] 张京军, 曹丽雅, 袁伟泽. 压电智能结构振动的模糊控制及仿真实现[J]. 工程力学, 2009, 26(10): 228—232. Zhang Jingjun, Cao Liya, Yuan Weize. Fuzzy control and simulation of piezoelectric intelligent structure vibration [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(10): 228—232. (in Chinese)
- [5] Friswell M I, Garvey S D, Penny J E T. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques [J]. Journal of sound and Vibration, 1995, 186(2): 311—323.
- [6] 张建华, 刘建军, 张庆国. 基于平衡降阶法的结构振动模态预测控制[J]. 工程力学, 2006, 23(5): 20—23. Zhang Jianhua, Liu Jianjun, Zhang Qingguo. Modal predictive control of structural vibration based on balanced reduction [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(5): 20—23. (in Chinese)
- [7] Moheimani S O R. Minimizing the out-of bandwidth dynamics in the model of reverberant system: Implication on Spatial  $H_\infty$  control [J]. Automatica, 2000, 36(7): 1023—1033.
- [8] Xie Yong, Zhao Tong, Cai Guoping. Model reduction and active control for a flexible plate [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2011, 24(5): 467—476.
- [9] 徐亚兰, 陈建军. 模型不确定柔性结构的多目标振动控制[J]. 应用力学学报, 2006, 3(23): 377—382. Xu Yalan, Chen Jianjun. Multiobjective vibration control for uncertain flexible structures [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 3(23): 377—382. (in Chinese)
- [10] Samuel da silva, Vicente lopes junio. Design of a control system using linear matrix inequalities for the active vibration control of a plate [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2006, 17(1): 81—93.
- [11] 徐洋, 姜洪洲, 叶正茂.  $H_\infty$  控制在 AMD Benchmark 结构主动控制中的应用研究[J]. 振动与冲击, 2005, 24(5): 15—22. Xu Yang, Jiang Hongzhou, Ye Zhengmao. Research on the application of  $H_\infty$  control in the AMD active structure control Benchmark problem [J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(5): 15—22. (in Chinese)