

文章编号: 1000-4750(2011)11-0078-05

特殊条件下考虑起始比降的 双层地基一维固结解析解

王 坤^{1,2}, *谢康和¹, 李传勋¹, 童 磊¹

(1. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 杭州 310058; 2. 中交第 4 航务工程勘察设计院有限公司, 广州 510230)

摘 要: 假定初始孔压降不小于起始比降, 获得了这一条件下考虑起始比降双层地基的一维固结解析解。计算结果表明当固结完成时, 由于起始比降的存在, 土中的孔隙水压力并不会完全消散, 仍存在残余孔隙水压力, 其数值与双层地基起始比降的大小有关, 且上层土的起始比降对孔压消散速率、最终孔压的大小影响较下层土大; 考虑起始比降, 地基平均固结度按沉降定义和按孔压定义并不相同, 按沉降定义的地基平均固结度要大于不考虑起始比降时的地基平均固结度, 而按孔压定义的地基平均固结度要小于不考虑起始比降时的地基平均固结度, 且其最终值小于 1。

关键词: 双层地基; 初始孔压降; 起始比降; 一维固结; 非达西渗流

中图分类号: TU431; TU433 **文献标志码:** A

ANALYTICAL SOLUTION FOR ONE DIMENSIONAL CONSOLIDATION OF DOUBLE-LAYERED GROUND WITH THRESHOLD GRADIENT UNDER SPECIAL CONDITION

WANG Kun^{1,2}, *XIE Kang-he¹, LI Chuan-xun¹, TONG Lei¹

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. CCCC-FHDI Engineering Co., Ltd, Guangzhou 510230, China)

Abstract: Assuming initial pore pressure gradient not less than threshold gradient, an exact analytical solution is presented for one dimensional consolidation of double-layered ground with threshold gradient and the influence of threshold gradient on consolidation behavior is investigated. The results show that the excess pore pressure will not be completely dissipated at the end of consolidation and there is residual excess pore pressure existing in the clay layers which is related to the values of the threshold gradients; the average degree of consolidation considering the threshold gradient in terms of settlement is different from that in terms of stress; the average degree of consolidation defined by settlement with threshold gradient is greater than that without considering threshold gradient and the average degree of consolidation defined by pore pressure considering threshold gradient of which the ultimate value is less than 1 is less than that without considering threshold gradient.

Key words: double-layered ground; initial pore pressure gradient; threshold gradient; one dimensional consolidation; non-Darcy flow

传统的固结理论假设土中渗流符合达西定律, 而达西定律的获得基于均匀砂土中的一维渗透试

验, 达西定律在粘性土中适用的广泛性一直受到质疑^[1-5], 一些学者提出了不同的非达西渗流模型。

收稿日期: 2010-03-17; 修改日期: 2010-10-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(50878191)

作者简介: 王 坤(1984—), 男, 湖南益阳人, 博士生, 从事软粘土力学与地基处理研究(E-mail: wk6848@126.com);

*谢康和(1956—), 男, 浙江建德人, 教授, 博士, 从事软土变形与固结控制理论研究(E-mail: zdkhxie@zju.edu.cn);

李传勋(1978—), 男, 吉林长春人, 博士生, 从事软土变形与固结控制理论研究(E-mail: licx0211@163.com);

童 磊(1983—), 男, 浙江舟山人, 博士, 主要从事隧道变形与控制研究(E-mail: zstonglei@126.com).

文献[3-5]提出, 在一些渗透性很低的粘土中, 存在一起始水力梯度 i_0 (简称起始比降), 即只有当土中某点的水力坡降大于 i_0 , 该点才会发生渗流, 其渗流方程如式(1a), 而相应的固结问题被称为考虑起始比降的固结问题。

$$v = \begin{cases} 0, & |i| \leq i_0 \\ k(|i| - i_0), & |i| \geq i_0 \end{cases} \quad (1a)$$

式中: k 为渗透系数; i_0 为起始比降($i_0 \geq 0$)。

考虑起始比降, 现有研究^[6-9]大多为均质地基的一维固结问题, 且均为数值解或近似解, 而对实际地基的成层性考虑甚少, 即使对于成层地基中最简单的双层地基问题也少有报道(迄今仅有刘忠玉等^[10]采用差分方法对双层地基一维固结问题进行了分析)。本文采用式(1a)描述的渗流方程, 假定初始孔压降不小于起始比降, 获得了这一特殊条件下考虑起始比降的双层地基一维固结精确解, 进而获得了分别按沉降定义和按孔压定义的地基平均固结度, 讨论了两种定义下地基平均固结度的不同, 分析了起始比降对双层地基一维固结性状的影响, 为后续考虑起始比降的双层地基乃至成层地基一维固结问题的研究提供比较参考依据。当双层地基起始比降均为 0, 本文解即退化为文献[11]单面排水条件下, 瞬时加荷, 初始孔压非均布情况下的双层地基一维固结解。

1 计算模型

假定初始孔压降不小于起始比降, 即土中初始孔压分布满足:

$$\frac{q_B - q_T}{H} \geq i_j \gamma_w, \quad j=1,2 \quad (1b)$$

式中: i_j 分别为土层 $j(j=1,2)$ 的起始比降; γ_w 为水的重度; q_T 为土层顶部的初始孔压; q_B 为土层底部的初始孔压; $H = h_1 + h_2$ 为双层地基总厚度, h_1 及 h_2 分别为土层 1 和土层 2 的厚度, 土体为单面排水, 如图 1 所示。此种情况下, 整个土层瞬间发生渗流。

除渗流方程及初始孔压分布外与太沙基一维固结理论假定相同, 其固结微分方程为:

$$c_{vj} \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad z_{j-1} \leq z \leq z_j; \quad j=1,2 \quad (2)$$

其求解条件为:

$$\begin{aligned} &1) \quad u_1|_{z=0} = 0, \quad t > 0; \quad 2) \quad u_1|_{z=h_1} = u_2|_{z=h_1}; \\ &3) \quad k_{v1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - i_1 \gamma_w \right) = k_{v2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - i_2 \gamma_w \right); \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=H} = i_2 \gamma_w, \quad t > 0;$$

$$(5) \quad u|_{t=0} = \sigma(z) = q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}.$$

式中: u 、 u_1 和 u_2 分别为双层地基、土层 1 和土层 2 中任一深度、任一时刻的超静孔隙水压力; $z_0 = 0$; $z_1 = h_1$; $z_2 = H$; $c_{vj} = \frac{k_{vj}}{\gamma_w m_{vj}}$, k_{vj} 、 m_{vj} 、 c_{vj} 和 i_j 分别为土层 $j(j=1,2)$ 的竖向渗透系数、体积压缩系数、固结系数及起始比降。

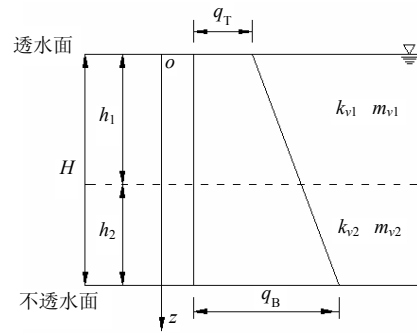


图 1 双层地基

Fig.1 Double-layered ground

2 问题的求解

2.1 方程解答

为方便求解, 定义下列无量纲参数: $a = k_{v2} / k_{v1}$; $b = m_{v2} / m_{v1} = E_{s1} / E_{s2}$; $c = h_2 / h_1$ 。考虑单面排水, 参考文献[11], 可设孔压为:

$$u_1 = i_1 \gamma_w z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m1}(z) e^{-\beta_m t}, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (3a)$$

$$u_2 = i_1 \gamma_w h_1 + i_2 \gamma_w (z - h_1) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m2}(z) e^{-\beta_m t}, \quad h_1 \leq z \leq H \quad (3b)$$

其中:

$$g_{m1}(z) = \sin \left(\lambda_m \frac{z}{h_1} \right) \quad (3c)$$

$$g_{m2}(z) = A_m \cos \left(\mu \lambda_m \frac{H - z}{h_1} \right) \quad (3d)$$

式中 β_m 、 μ 、 λ_m 、 A_m 和 B_m 分别为待定系数。

式(3)显然满足求解条件式(1)和式(4)。由求解条件式(2)和式(3), 可得:

$$A_m = \sin(\lambda_m) / \cos(\mu c \lambda_m) \quad (4)$$

$$\frac{k_{v2}}{k_{v1}} \mu \tan(\lambda_m) \tan(\mu c \lambda_m) = 1 \quad (5)$$

再将式(3)代入微分方程式(2), 可得:

$$\beta_m = \frac{c_{v1}\lambda_m^2}{h_1^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{c_{v1}}{c_{v2}}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

所以式(5)转化为:

$$\sqrt{ab}\tan(\lambda_m)\tan(\mu c\lambda_m) = 1 \quad (6)$$

由求解条件式(5), 有:

$$\begin{cases} i_1\gamma_w z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m1}(z) = q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}, \\ 0 \leq z < h_1 \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} i_1\gamma_w h_1 + i_2\gamma_w(z - h_1) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m2}(z) = \\ q_T + (q_B - q_T) \frac{z}{H}, \quad h_1 < z \leq H \end{cases} \quad (7b)$$

利用式(6)和以下正交关系式^[12]:

$$\int_0^{h_1} m_{v1} g_{m1}(z) g_{n1}(z) dz + \int_{h_1}^H m_{v2} g_{m2}(z) g_{n2}(z) dz = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{h_1 m_{v1}}{2} (1 + bcA_m^2), & m = n \end{cases} \quad (8)$$

可由式(7)得到:

$$B_m = \frac{2(q_T \lambda_m (1 - \cos \lambda_m) + ((q_B - q_T) h_1 / H - i_1 \gamma_w h_1) \times (\sin \lambda_m - \lambda_m \cos \lambda_m))}{(1 + bcA_m^2) \lambda_m^2} + \frac{2bA_m (q_T - i_1 \gamma_w h_1 + i_2 \gamma_w h_1) \sin(\mu c \lambda_m)}{(1 + bcA_m^2) (\mu \lambda_m)} + \frac{2bA_m h_1 ((q_B - q_T) / H - i_2 \gamma_w) \times (1 - \cos(\mu c \lambda_m) + \mu \lambda_m \sin(\mu c \lambda_m))}{(1 + bcA_m^2) (\mu \lambda_m)^2} \quad (9)$$

若双层地基起始比降均为 0, 即 $i_1 = 0$, $i_2 = 0$, 则:

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m1}(z) e^{-\beta_m t}, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (10)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_{m2}(z) e^{-\beta_m t}, \quad h_1 < z \leq H \quad (11)$$

令 σ_0 、 σ_1 、 σ_2 分别为 $z=0$ 、 $z=h_1$ 和 $z=H$ 处的

$$U_s = \frac{[q_T + (q_B - q_T) h_1 / (2H) - \bar{u}_1] m_{v1} h_1 + [q_T + (q_B - q_T) (H + h_1) / (2H) - \bar{u}_2] m_{v2} h_2}{[q_T + (q_B - q_T) h_1 / (2H) - i_1 \gamma_w h_1 / 2] m_{v1} h_1 + [q_T + (q_B - q_T) (H + h_1) / (2H) - i_2 \gamma_w h_2 / 2 - i_1 \gamma_w h_1] m_{v2} h_2} \quad (18)$$

定义无量纲起始比降 $R_1 = \frac{i_1 \gamma_w H}{q_B}$ 和 $R_2 = \frac{i_2 \gamma_w H}{q_B}$,

$\eta = \frac{q_T}{q_B}$, 时间因子 $T_{v1} = \frac{c_{v1} t}{H^2}$, 则上述解答简化为:

$$\frac{u_1}{q_B} = \frac{R_1 z}{H} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{q_B} g_{m1}(z) e^{-\beta_m t}, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (19a)$$

初始孔压值, 则有:

$$\sigma_0 = q_T; \quad \sigma_1 = (q_B - q_T) h_1 / H + \sigma_0; \quad \sigma_2 = q_B \quad (12)$$

由式(4)和式(5)可得:

$$\frac{\lambda_m \cos \lambda_m}{(1 + bcA_m^2) \lambda_m^2} = \frac{2bA_m \sigma_1 \sin(\mu c \lambda_m)}{(1 + bcA_m^2) (\mu \lambda_m)} \quad (13)$$

将式(12)和式(13)和代入式(9)得:

$$B_m = \frac{2 \cos(\mu c \lambda_m)}{c \lambda_m^2 (\cos^2(\mu c \lambda_m) + bc \sin^2(\lambda_m))} \times \{c \cos(\mu c \lambda_m) [\sigma_0 \lambda_m + (\sigma_1 - \sigma_0) \sin \lambda_m] + a \sin \lambda_m (\sigma_2 - \sigma_1) [1 - \cos(\mu c \lambda_m)]\} \quad (14)$$

本文解即退化为文献[11]单面排水条件下, 瞬时加荷, 初始孔压非均布情况下的双层地基一维固结解, 证明了本文解答的正确性。

2.2 平均固结度计算

孔压的长期稳定解为:

$$u|_{t=\infty} = \begin{cases} i_1 \gamma_w z, & 0 \leq z < h_1 \\ i_1 \gamma_w h_1 + i_2 \gamma_w (z - h_1), & h_1 \leq z \leq H \end{cases} \quad (15)$$

土层 1 和土层 2 的平均孔压分别为:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} u_1 dz = i_1 \gamma_w h_1 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-\beta_m t} (1 - \cos \lambda_m) / \lambda_m \quad (16a)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{h_2} \int_{h_1}^H u_2 dz = i_1 \gamma_w h_1 + i_2 \gamma_w h_2 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_m \sin(\mu c \lambda_m) e^{-\beta_m t} / (\mu c \lambda_m) \quad (16b)$$

地基平均固结度可以按孔压定义或沉降定义, 前者定义为地基任意时刻的平均附加有效应力(或所消散的平均孔压)与其平均附加总应力之比, 用 U_p 表示, 后者定义为地基任意时刻的变形(或沉降量) S_t 与其最终值 S_∞ 之比, 用 U_s 表示。考虑起始比降, 两种定义的地基平均固结度可分别写为:

$$U_p = 1 - \frac{h_1 \bar{u}_2 + h_2 \bar{u}_2}{(q_B + q_T) H / 2} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{u_2}{q_B} = \frac{R_1 h_1}{H} + \frac{R_2 (z - h_1)}{H} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{q_B} g_{m2}(z) e^{-\beta_m t}, \\ h_1 < z \leq H \end{cases} \quad (19b)$$

$$U_p = 1 - \frac{\bar{u}_1 / q_B + c \bar{u}_2 / q_B}{(1 + \eta)(1 + c) / 2} \quad (20a)$$

$$U_s = \frac{\eta + (1-\eta)/(2+2c) - \bar{u}_1/q_B + bc \times (\eta + (1-\eta)(2+c)/(2+2c) - \bar{u}_2/q_B)}{\eta + (1-\eta - R_1)/(2+2c) + bc \times [\eta + (1-\eta)(2+c)/(2+2c) - R_2c/(2+2c) - R_1/(1+c)]} \quad (20b)$$

其中:

$$\frac{B_m}{q_B} = \frac{2[\eta\lambda_m(1-\cos\lambda_m) + ((1-\eta - R_1)/(1+c))(\sin\lambda_m - \lambda_m \cos\lambda_m)]}{(1+bcA_m^2)\lambda_m^2} + \frac{2bA_m(\eta + (R_2 - R_1)/(1+c))\sin(\mu c\lambda_m)}{(1+bcA_m^2)(\mu\lambda_m)} + \frac{2bA_m(1-\eta - R_2)(1-\cos(\mu c\lambda_m) + \mu\lambda_m \sin(\mu c\lambda_m))}{(1+c)(1+bcA_m^2)(\mu\lambda_m)^2} \quad (21)$$

$$\beta_m t = \frac{T_{v1} H^2 \lambda_m^2}{h_1^2} \quad (22)$$

$$\frac{\bar{u}_1}{q_B} = \frac{R_1}{2(1+c)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m(1-\cos\lambda_m)e^{-\beta_m t}}{q_B \lambda_m} \quad (23)$$

$$\frac{\bar{u}_2}{q_B} = R_1/(1+c) + R_2c/(2(1+c)) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{q_B} A_m \sin(\mu c\lambda_m) e^{-\beta_m t} / (\mu c\lambda_m) \quad (24)$$

3 结果分析

文献[11]已分析了渗透系数、压缩系数、土层厚度对固结性状的影响, 本文不再分析。

图2为 $R_1=0.2, R_2=0.4$ 时, 孔压沿深度的分布, 由图2可见, 由于两层土的起始比降不相等, 孔压分布在土层交界面存在明显的转折, 且孔压不会完全消散, 存在残余孔隙水压力, 其大小与起始比降的大小有关; 图3为不同起始比降下土层中的残余孔隙水压力沿深度的分布, 在整个土层平均起始比降相同的情况下, 浅层土起始比降越大, 残余孔隙水压力越大, 可见浅层土起始比降对土层最终孔压的大小影响要大于深层土。

图4和图5为不同起始比降组合下, 分别按沉降定义和按孔压定义的地基平均固结度随时间发展曲线, 从图4和图5中可知, 考虑起始比降后按

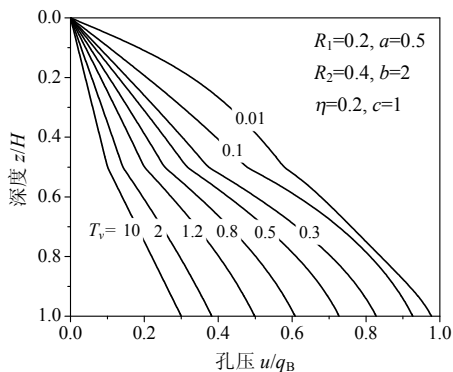


图2 孔压分布
Fig.2 Distribution of pore pressure

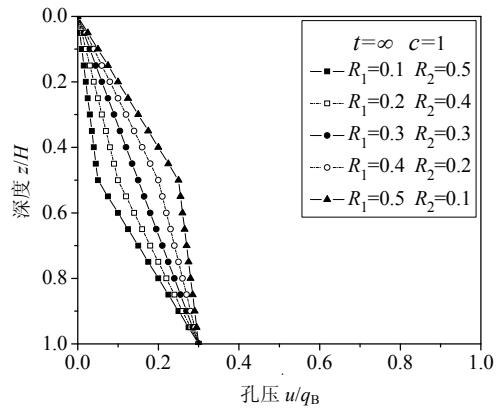


图3 残余孔隙水压力分布
Fig.3 Distribution of residual pore pressure

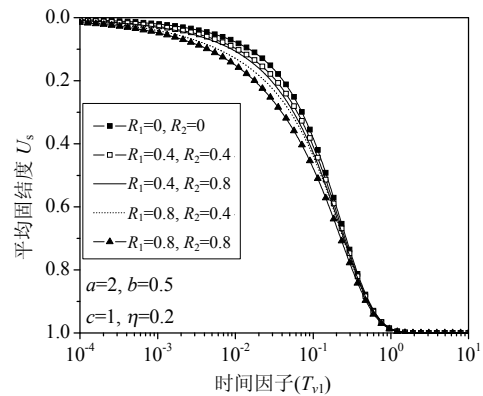


图4 按沉降定义的平均固结度
Fig.4 Average degree of consolidation in terms of strain

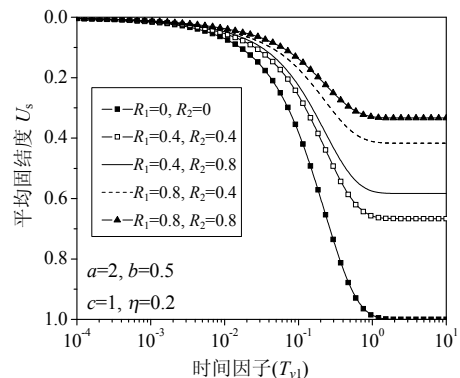


图5 按孔压定义的平均固结度
Fig.5 Average degree of consolidation in terms of stress

沉降定义的地基平均固结度要大于不考虑起始比降的地基平均固结度, 而按孔压定义的地基平均固结度要小于不考虑起始比降的地基平均固结度, 这是由于尽管孔压消散比不考虑起始比降时慢, 但是考虑起始比降后, 孔压不能完全消散, 其最终沉降较不考虑起始比降时小, 导致按沉降定义的地基平均固结度较不考虑起始比降时大。分析对比 $R_1 = 0.4$ 、 $R_2 = 0.8$ 和 $R_1 = 0.8$ 、 $R_2 = 0.4$ 两条曲线, 起始比降平均值均为 0.6, 在其它条件相同的情况下, 第 1 种情况下沉降发展速率要慢于第 2 种情况, 而孔压消散速率则相反, 明显快于第 2 种情况。

4 结论

(1) 假定初始孔压降不小于起始比降, 获得该条件下考虑起始比降的双层地基一维固结解。当起始比降 $i_0 = 0$ 时, 该解答能够退化到文献[11]初始孔压非均布条件下的解答。

(2) 由于存在起始比降, 固结结束时, 土中的孔隙水压力并不会完全消散, 存在残余的孔隙水压力, 其数值与双层地基起始比降的大小有关, 且上层土的起始比降对孔压消散速率、最终孔压的大小影响较下层土大。

(3) 考虑起始比降, 地基平均固结度按沉降定义和按孔压定义不同, 其大小与起始比降有关; 在同一时刻, 按沉降定义的地基平均固结度要大于不考虑起始比降时的地基平均固结度, 而按孔压定义的地基平均固结度要小于不考虑起始比降的地基平均固结度, 且其最终值小于 1。

参考文献:

- [1] Law K T, Lee C F. Initial gradient in a dense glacial till [C]. Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm, 1981, 1: 441—446.
- [2] Dubin B, Moulin G. Influence of a critical gradient on the consolidation of clays [C]// Young, Townsend. Proceedings of the Consolidation of Soils: Testing and Evaluation West Conshohocken. PA: American Society for Testing and Materials, ASTM STP 892, 1986: 354—377.
- [3] Scott R F. Principles of soil mechanics [M]. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Mass., 1963.
- [4] Raymond J Miller, Philip F Low. Threshold gradient for water flow in clay systems [J]. Soil Science Society of America Proceedings, 1963, 27(6): 605—609.
- [5] Mitchell J K, Younger J S. Abnormalities in hydraulic flow through fine-grained soils [J]. ASTM Special Publication 417, American Society for Testing and Materials. Philadelphia, 1967: 106—141.
- [6] Florica Pascal, Henry Pascal, Murray D W. Consolidation with threshold gradient [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1981, 5: 247—261.
- [7] 刘慈群. 有起始比降固结问题的近似解[J]. 岩土工程学报, 1982, 4(3): 107—109.
Liu Ciqun. Approximate solution for one-dimensional consolidation with threshold gradient [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, 4(3): 107—109. (in Chinese)
- [8] 鄂建, 陈刚, 孙爱荣. 考虑低速非 Darcy 渗流的饱和黏性土一维固结分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(7): 1115—1119.
E Jian, Chen Gang, Sun Airong. One-dimensional consolidation of saturated cohesive soil considering non-darcy flows [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(7): 1115—1119. (in Chinese)
- [9] 刘忠玉, 刘忠广, 马崇武. 考虑起始水力梯度时饱和黏土的一维固结[J]. 郑州大学学报, 2006, 27(3): 21—24.
Liu Zhongyu, Liu Zhongguang, Ma Chongwu. One-dimensional consolidation of saturated clays considering initial hydraulic gradient [J]. Journal of Zhengzhou University, 2006, 27(3): 21—24. (in Chinese)
- [10] 刘忠玉, 杨荣根. 考虑起始水力梯度时双层地基的一维固结[J]. 合肥工业大学学报, 2006, 29(5): 568—572.
Liu Zhongyu, Yang Ronggen. One-dimensional consolidation of double-layered ground considering the initial hydraulic gradient [J]. Journal of Hefei University of Technology, 2006, 29(5): 568—572. (in Chinese)
- [11] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(5): 24—35.
Xie Kanghe. Theory of one dimensional consolidation of doubled-layered ground and its applications [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(5): 24—35. (in Chinese)
- [12] Schiffman R L, Stein J R. One-dimensional consolidation of layered systems [J]. Journal of Soil Mechanics and Foundations, ASCE, 1970, 96(4): 1499—1504.