

文章编号: 1000-4750(2011)04-0013-05

# 基于扩展有限元方法的界面接触算法

喻葭临,<sup>\*</sup>于玉贞, 张丙印, 吕禾

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要:** 该文构建了适用于扩展有限元法(XFEM)的界面接触算法, 该算法具备模拟界面上粘连、滑动和分离状态的能力。对平面摩擦问题的计算结果表明, 该方法对于界面接触行为的描述能力与常规接触面单元十分接近。对平面应变压剪试样中剪切带问题的模拟分析表明, 该算法合理地反映了摩擦接触的耗散机制, 从而避免了零能耗散现象, 能够较准确地描述平面应变压剪试样中的局部化变形现象。

**关键词:** 接触算法; 扩展有限元法; 粘聚裂纹模型; Willner 连续摩擦定律; 剪切带

中图分类号: O343.3 文献标识码: A

## A CONTACT ALGORITHM BASED ON EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD

YU Jia-lin, <sup>\*</sup>YU Yu-zhen, ZHANG Bing-yin, LU He

(State Key Laboratory of Hydroscience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** A contact algorithm based on an extended finite element method (XFEM) is established, which is able to simulate the adhesion, slide and separation of a contact interface. The results of an example for a plane frictional problem demonstrate that the performance on describing the contact behavior of this algorithm is almost identical to that of a conventional interface element. The results of an example on the shear band in a plane strain sample demonstrate that this algorithm can reflect the dissipation mechanism of a frictional contact reasonably and therefore avoid the phenomenon of zero energy dissipation and then be able to describe the strain localization in the plane strain sample.

**Key words:** contact algorithm; extended finite element method; cohesive crack model; Willner's continuous friction law; shear band

接触是边界条件高度非线性的复杂问题, 其力学表述中含有多个不等式约束, 一般只能用数值的方法迭代求解。扩展有限元法(XFEM)<sup>[1-5]</sup>基于单位分解理论, 通过引入富集自由度和 Heaviside 函数在试函数空间中构造出描述不连续位移场的特定函数, 使其无需复杂的网格重构就能较好地逼近位移不连续问题拟求的解。但此时扩展有限元法还无力求解包含不连续位移场的非线性问题, 变形体的本构关系和非连续区域的本构关系也是必备的条

件, 而后者实质是接触问题。

本文通过引入恰当的非连续区域本构关系构建了与扩展有限元法相适应的界面接触算法。通过算例与常规的小滑动接触面单元比较, 并将其应用于平面应变压剪试样中剪切带的模拟分析。

## 1 界面条件和本构关系的数学格式

控制方程的有限元格式详见文献[5], 本文仅讨论不连续界面上的控制条件和与扩展有限元相适

收稿日期: 2009-10-09; 修改日期: 2009-12-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(50779024, 50879039, 50639060)

作者简介: 喻葭临(1980—), 男(土家族), 重庆酉阳人, 博士, 从事岩土工程方面的研究(E-mail: yujl99@mails.tsinghua.edu.cn);

\*于玉贞(1966—), 男, 江苏沛县人, 教授, 博士, 博导, 从事岩土灾害方面的研究(E-mail: yuyuzhen@tsinghua.edu.cn);

张丙印(1963—), 男, 河北石家庄人, 教授, 博士, 博导, 从事高土石坝方面的研究(E-mail: byzhang@tsinghua.edu.cn);

吕禾(1969—), 女, 北京人, 高级实验师, 学士, 从事土的基本特性方面的研究(E-mail: luhe@tsinghua.edu.cn).

应的界面本构关系。界面上的符号规定如图1所示，其中 $\mathbf{n}^+$ 为界面主法向，由人为规定；内部界面形成之后，实际上形成相互作用的两个界面，以 $\mathbf{n}^+$ 为外法向的界面定义为 $\Gamma_d^+(\mathbf{t}^+, \mathbf{w}^+)$ ， $\mathbf{t}^+$ 和 $\mathbf{w}^+$ 分别为其上的应力和位移量； $\Gamma_d^-(\mathbf{t}^-, \mathbf{w}^-)$ 则以 $\mathbf{n}^-$ 为外法向，其上的应力和位移量分别为 $\mathbf{t}^-$ 和 $\mathbf{w}^-$ 。

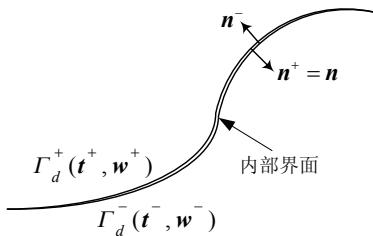


图1 内部界面的符号规定

Fig.1 Denotation of an internal interface

考虑界面应力连续条件和运动许可的位移场，则有：

$$\mathbf{t}^-|_{\Gamma_d^-} = -\mathbf{t}^+|_{\Gamma_d^+} \quad (1)$$

$$\mathbf{w}^- = \mathbf{u}|_{\Gamma_d^-}, \quad \mathbf{w}^+ = \mathbf{u}|_{\Gamma_d^+} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{u}$ 表示物体的位移场。

依据扩展有限元法中不连续位移场的构造特点，假设裂缝面上的本构关系仅与裂缝错动量相关，本构关系式可写为：

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}^+(\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) = \mathbf{t}^+(\Delta \mathbf{u}|_{\Gamma_d}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{D}_\Gamma \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u}|_{\Gamma_d} \quad (3)$$

式中， $\mathbf{Q}$ 为裂缝局部坐标系与全局坐标系的转换矩阵，表达式为：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中， $e_{ji}$  ( $J=1, 2, 3$ ;  $i=x, y, z$ ) 为裂缝局部坐标系基矢 $\mathbf{e}_J$ 在全局坐标系 $x$ 方向、 $y$ 方向、 $z$ 方向上的分量。

$\mathbf{D}_\Gamma$ 为裂缝局部坐标系对应的裂缝面上的本构矩阵，表达式一般为：

$$\mathbf{D}_\Gamma = \begin{bmatrix} k_{ss}^1 & 0 & k_{sn}^1 \\ 0 & k_{ss}^2 & k_{sn}^2 \\ k_{ns}^1 & k_{ns}^2 & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中： $k_{ss}^1$  和  $k_{ss}^2$  表示切平面内的两个独立的基矢对应的切向刚度； $k_{nn}$  表示法向刚度，而矩阵非对角线元素则可用于反映法向应力与切向应力的耦合作用，例如剪胀等，且通常是非对称矩阵，这使得模型的复杂性增大。很多时候与非对角元素相关的反映耦合特性的模型参数缺乏明确的物理意义，难

以确定，故实际应用时，大多忽略法向和切向的耦合作用，此时 $\mathbf{D}_\Gamma$ 为主对角阵。对应二维问题可作相应简化。

由于接触问题的单面约束特性， $\mathbf{D}_\Gamma$ 矩阵在界面处于张剪和压剪两种状态时具有截然不同的格式，需采用相应的模型区别对待。

## 2 非连续区域本构关系

### 2.1 张剪-粘聚裂纹模型(Cohesive Crack Model)

张剪是指裂缝面上接触点对在法向远离的同时切向距离也有变化的状态，此时的裂缝亦称为复合型张拉裂缝。粘聚裂纹模型假设<sup>[6-8]</sup>的物理概念简单明确，易于编程实现，已成为此类裂缝的常用模型，具有很好的效能比。本文在处理裂缝的张剪状态时亦采用粘聚裂纹模型，并假定法向和切向两个方向的作用力与相对位移的关系相互独立，具体形式可见文献[8]，假定法向嵌入和压应力为正。式(6)和式(7)为界面应力与错动量的表达式，式(8)给出了张剪状态下裂缝面上 $\mathbf{D}_\Gamma$ 矩阵的形式。

$$t_n = -f_t \exp\left(\frac{f_t}{G_f^I} w_n\right), \quad w_n < 0 \quad (6)$$

$$t_s = \begin{cases} k_{s0} w_s, & |w_s| \leq w_{s0} \\ \frac{w_s}{|w_s|} f_s \exp\left(-\frac{f_s}{G_f^{II}} |w_s|\right), & |w_s| > w_{s0} \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_n}{\partial w_n} & \frac{\partial t_n}{\partial w_s} \\ \frac{\partial t_s}{\partial w_n} & \frac{\partial t_s}{\partial w_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f^I} \exp\left(\frac{f_t}{G_f^I} w_n\right) & 0 \\ 0 & k_{s0} \text{ 或 } -\frac{f_s^2}{G_f^{II}} \exp\left(\frac{f_s}{G_f^{II}} |w_s|\right) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中： $t_n$  和  $t_s$  分别为法向和切向应力； $w_n$  和  $w_s$  分别为法向和切向错动量； $f_t$  为抗拉强度， $f_s$  为切向抗拉强度，可与下文中的切向残余粘聚力对应； $G_f^I$  和  $G_f^{II}$  分别为法向和切向的张拉断裂能； $k_{s0}$  为剪切滑移刚度，可与下文中的切向罚函数对应；切向滑移阈值  $w_{s0} = f_s / k_{s0}$ 。

### 2.2 压剪-Willner 连续摩擦定律

压剪对应摩擦接触状态，是更为复杂的现象。

对于摩擦接触问题，通常将静摩擦和动摩擦区别对待，计算过程中必须借助某一变量来判断接触点对的接触状态，进而施加或修改约束。Willner(1995)<sup>[9]</sup>提出了基于罚函数法的一种连续的摩擦定律，在静摩擦和滑动摩擦的过渡过程中，摩擦力被认为保持连续。本文仅给出了界面应力与错动量的最终形式，具体原理和推导过程可参见文献[9]。

法向压应力  $t_n$  可由法向嵌入量  $w_n$  用下式计算：

$$t_n = k_n w_n, \quad w_n > 0 \quad (9)$$

切向摩擦力的计算要复杂得多<sup>[9]</sup>，一般先假定物体处于静摩擦状态，计算用于判断的试摩擦力  $t_s^{\text{st}}$ ，同时引进了类似于塑性理论中屈服条件的滑动条件，运用塑性力学中的径向返回映射以及隐式投影法来确定真实的切向力  $t_s$ ，具体格式为：

$$t_s = t_s^{\text{st}} - \Delta\gamma\zeta_s \frac{t_s^{\text{st}}}{|t_s^{\text{st}}|} \quad (10)$$

其中： $t_s^{\text{st}} = \zeta_s(w_s - w_{sa}^{\text{in}})$ ； $\Delta\gamma = (-r_s - \mu|t_n| + |t_s^{\text{st}}|)/\zeta_s$ ；系数  $\zeta_s$  在力学上可理解为表征微观不平表面刚性的参数，在数值计算中即可视为罚参数，一般可令  $\zeta_s = k_{s0}$ ； $w_s$  表示切向错动量；下标  $a$  表示上一时刻的值； $w_{sa}^{\text{in}}$  表示上一时刻不可恢复的切向错动量； $r_s$  为切向残余凝聚力； $\mu$  为界面摩擦系数。

一般地，为使模型更简单且计算更稳定，切向模量选择割线模量，此时  $\mathbf{D}_\Gamma$  矩阵仍为主对角阵，可导出：

$$\frac{\partial t_s}{\partial w_s} = \zeta_s \left( 1 - \frac{\Delta\gamma\zeta_s}{|t_s^{\text{st}}|} \right), \quad \frac{\partial t_s}{\partial w_n} = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_n}{\partial w_n} & \frac{\partial t_n}{\partial w_s} \\ \frac{\partial t_s}{\partial w_n} & \frac{\partial t_s}{\partial w_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & \zeta_s \left( 1 - \frac{\Delta\gamma\zeta_s}{|t_s^{\text{st}}|} \right) \end{bmatrix} \quad (12)$$

塑性滑动位移  $w_s^{\text{in}}$  由下式计算，该值只在迭代收敛后才更新，无需在每一步迭代中不断更新。

$$w_s^{\text{in}} = w_{sa}^{\text{in}} + \Delta w_s^{\text{in}} = w_{sa}^{\text{in}} + \Delta\gamma \frac{t_s^{\text{st}}}{|t_s^{\text{st}}|} \quad (13)$$

### 3 接触算法流程

在 XFEM 程序中，上述接触算法和材料的本构关系一样，都会在集成总刚和应力积分时调用，所不同的是接触算法的积分区域在裂缝面上，材料本

构关系的积分区域则在连续的物体内。此外，上述接触算法都是基于裂缝面局部坐标的，在集成总刚或迭加到残差力列阵之前，需要使用坐标转换矩阵。此时接触点对为裂缝面上相应的积分点，如图 2。

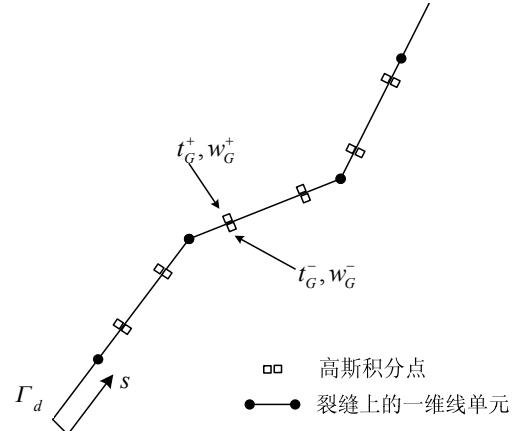


图 2 XFEM 中裂缝面上的积分点(文献[3])  
Fig.2 Quadrature points on crack interface in XFEM  
(After [3])

对于每一步迭代的每一个接触点对，首先计算更新后的嵌入量  $w_n$  和切向错动量  $w_s$ 。如果  $w_n > 0$ ，则表明此时两面相互嵌入，程序转入压剪模式；如果  $w_n < 0$ ，则表明此时两面相互远离，程序转入张剪模式。集成总刚时，接触算法给出裂缝面上各积分点上的  $\mathbf{D}_\Gamma$  矩阵；而应力积分时，给出裂缝面上各积分点的  $(t_n, t_s)$ ，以便由后续的积分算法求得附加自由度对应的残差力。

附加自由度对应残差力的收敛则意味着裂缝面上各点的力与裂缝面周围单元体内的应力达到平衡。然而，对于一个固定的时步，在力平衡的迭代过程中，裂缝面各点的接触状态可能会在粘连、滑动和分离之间不断变化，特别是裂缝面呈现比较尖锐的锯齿状时，会造成迭代发散，计算无法继续进行。此时可考虑细划网格等措施避免裂缝面出现尖锐的锯齿。当裂缝面错动较大时，XFEM 可能无法给出合理的结果，因为它所描述的接触行为本质上是基于点对点小滑动假设的。

## 4 算例及分析

### 4.1 纯摩擦型界面模拟

为检验上述接触算法的合理性，并与常规接触面单元比较，考虑如图 3 所示的两个弹性变形体之间的摩擦接触行为。图 3 中上下两个长方块相接触构成接触界面，下长方块的底面固定，上长方块的

顶面向下并向右运动一定距离，以便在接触界面上产生摩擦接触行为。

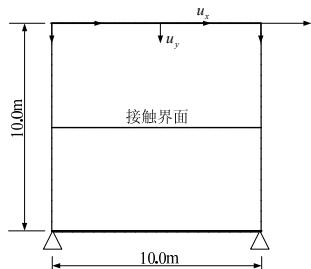


图 3 摩擦型界面模拟算例

Fig.3 An example for simulating frictional interface

XFEM 使用的网格如图 4(a)所示，接触界面通过在图 4(a)中阴影区的单元内嵌入非连续位移场来实现。算例也采用常规接触面单元模拟，网格如图 4(b)。其中， $u_x = 0.5\text{m}$ ， $u_y = -0.1\text{m}$ ；弹性体的力学参数为  $E = 20\text{GPa}$ ， $\nu = 0.30$ ；接触界面的力学特性参数取  $r_s = 0.0$ ， $\mu = 0.3$ 。部分计算结果如图 5、图 6，可见，XFEM 与常规接触面单元的结果十分吻合，从而验证了此算法的合理性。

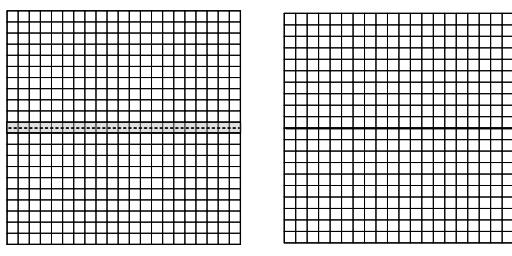


图 4 计算网格

Fig.4 Mesh for analysis

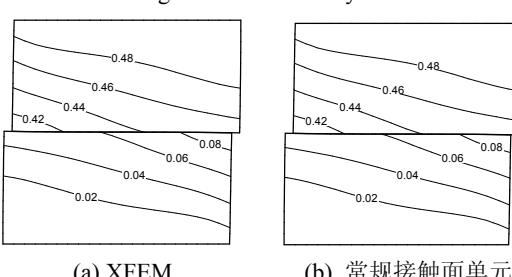


图 5 整体变形和水平位移等值线图 /m

Fig.5 Contour of deformation and horizontal displacement

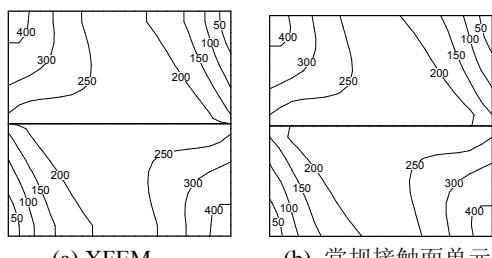


图 6 竖向应力  $\sigma_y$  等值线图 /MPa

Fig.6 Contour of vertical stress  $\sigma_y$

## 4.2 平面应变压剪试样中的剪切带模拟

Larsson 等(2000)<sup>[10]</sup>运用嵌入非连续有限元方法(EFEM)研究了弹塑性多孔介质的局部化变形，即剪切带问题。剪切带内外使用同样的广义 Mohr-Coulomb 模型，而材料的应变硬化和软化特性均由随硬化参数变化的粘聚力  $c$  反映。Larsson 等以此分析研究了平面应变压剪试样中的剪切带现象，并通过不同网格密度的算例证明了该方法相比以往的应变局部化理论而言，避免了零能损耗现象和网格敏感性问题，较好地描述了平面应变压剪试样中的剪切带形态，以及由剪切带上粘聚力衰减引起的整体软化现象。算例结构和尺寸如图 7。通过顶面位移控制压剪过程，总压缩量  $0.01\text{m}$ ，加载步长  $0.1\text{mm}$ 。材料参数  $E = 30\text{GPa}$ ， $\nu = 0.20$ ， $c_0 = 10\text{kPa}$ ，摩擦角  $\varphi = 11.5^\circ$ 。

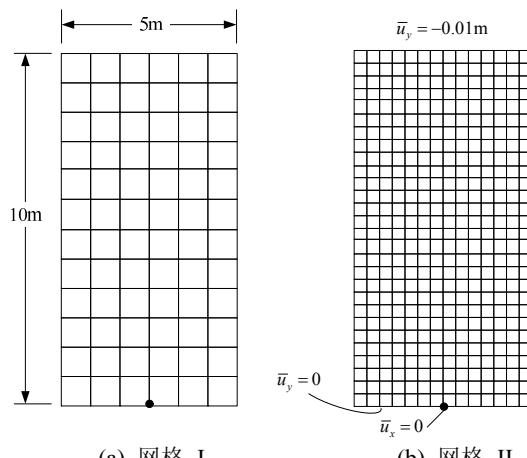


图 7 计算模型和所用网格

Fig.7 Model and mesh for analysis

本文应用扩展有限元模拟系统，采用如图 7 所示两种网格对此算例进行了分析。计算中未考虑重力和围压，并将网格右上角单元设置为起裂控制单元以便在均匀应力场中获得单一剪切带；且通过剪切带上粘聚力的衰减来构造整体的应变软化现象，其上实际粘聚力  $c$  按下式计算：

$$c = (c_0 - r_s) \exp(|w_{sa}^{\text{in}}|/d_{s0}) + r_s \quad (14)$$

其中：带上残余凝聚力  $r_s = 0.0$ ； $w_{sa}^{\text{in}}$  为上一时步的切向不可恢复变形； $d_{s0}$  是与  $w_{sa}^{\text{in}}$  同量纲的衰减速率控制长度。

计算中，当其中的应力状态达到或超过材料的抗剪强度时，程序会依据强度准则和相应的判据，从起裂控制单元出发，向前搜索并记录剪切带。随后在记录的剪切带界面上启动界面接触算法，以便模拟其上的接触力学行为。

图 8 给出了两种网格的荷载-位移曲线, 其中横坐标表示加载面的竖向位移。从中可见剪切带上的软化特点也反映在整体的荷载-位移响应曲线上。这表明界面接触算法真实反映了摩擦接触的耗散机制, 从根本上避免了零能耗散现象。

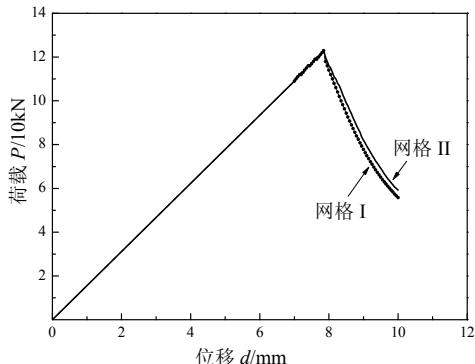
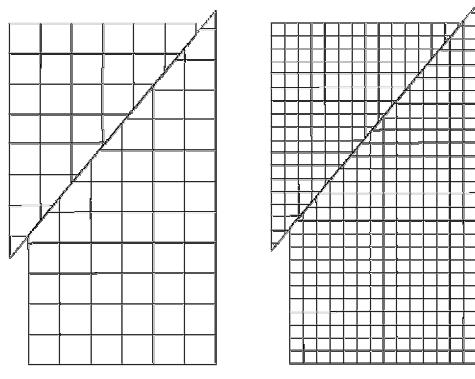


图 8 荷载-位移曲线

Fig.8 Load-displacement curve

图 9 给出了两种网格的最终变形图。可见, 由于 XFEM 对于物体内部不连续位移场的描述相对独立, 不像 EFEM 那样仍然基于网格, 因此对于剪切带形态的描述更加直观且一致, 对网格的依赖性也较小, 可以考虑剪切带上更大的错动和更复杂的接触模型。



(a) 网格 I

(b) 网格 II

图 9 网格变形图(放大 100 倍)

Fig.9 Mesh deformation (amplified 100 times)

## 5 结论

本文引入粘聚裂纹模型和 Willner 理论构建了基于 XFEM 的界面接触算法, 该算法具备模拟接触界面上粘连、滑动和分离状态的能力, 实现了完整的程序建模。与常规接触面单元模拟结果进行的比较表明, 该方法对于摩擦接触行为的描述能力与常规接触面单元十分接近。对平面应变压剪试样中剪切带的模拟结果表明, XFEM 能够更直观地描述平面应变压剪试样中的局部化变形现象, 同时界面接

触算法合理地反映了摩擦接触的耗散机制, 从而避免了零能耗散现象, 可较好地描述剪切带上抗剪能力衰减引起的整体软化现象。此外, XFEM 具备模拟运动的不连续位移场的能力, 可将此算法用于模拟土中剪切带扩展形成的不连续界面上的接触问题, 从而为模拟研究土中剪切带问题提供了一条新的途径。

## 参考文献:

- [1] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45: 601–620.
- [2] Moes N, Dolbow J. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 131–150.
- [3] Dolbow J, Moes N, Belytschko T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190: 6825–6846.
- [4] Belytschko T, Moes N, Usui S, Parimi C. Arbitrary discontinuities in finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 993–1013.
- [5] 喻葭临, 张其光, 于玉贞, 孙逊. 扩展有限元中非连续区域的一种积分方案[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2009, 49(3): 352–355.  
Yu Jialin, Zhang Qiguang, Yu Yuzhen, Sun Xun. A simple integration scheme for discontinuity in extended finite element method [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2009, 49(3): 352–355. (in Chinese)
- [6] Hillerborg A, Modeer M, Peterson P E. Analysis of crack propagation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements [J]. Cement Concrete Research, 1976, 6: 773–782
- [7] Planas J, Elices M, Guinea G V. Generalizations and specializations of cohesive crack models [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70: 1759–1776.
- [8] 方修君, 金峰, 王进廷. 用扩展有限元方法模拟混凝土的复合型开裂过程[J]. 工程力学, 2007, 24(增刊 I): 46–52.  
Fang Xiujun, Jin Feng, Wang Jinting. Simulation of mixed-mode fracture of concrete using extended finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Sup.I): 46–52. (in Chinese)
- [9] Eberhard P, Hu B. Advanced contact dynamics [M]. Southeast University Press, 2003: 112–115.
- [10] Larsson J, Larsson R. Finite-element analysis of localization of deformation and fluid pressure in an elastoplastic porous medium [J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37: 7231–7257.