

文章编号: 1000-4750(2011)03-0009-08

# 水平弹性支承圆弧钢拱的弹性屈曲分析

杨 洋, \*童根树

(浙江大学土木工程系, 浙江, 杭州 310058)

**摘 要:** 钢拱常支承于其他结构上, 拱脚受到弹性约束并出现水平位移, 弹性约束会显著影响拱的力学行为。该文得到了水平弹性支承拱在沿弦长均匀分布的面内竖向荷载作用下的内力及位移的解析解, 构造了一个无量纲化柔度系数。利用这个参数, 对线性解进行分析, 提出了计算跨中轴力和拱脚支座位移的理论公式。根据跨中轴力大小, 提出了在线性计算范围内划分拱与拱形梁的标准。分析了支座弹簧刚度对扁度不同的拱的内力分布的影响。利用有限元程序, 分析了拱的分支屈曲模态、临界荷载及跨中临界轴力与支座刚度的关系, 得到了拱由反对称屈曲转变为对称屈曲时柔度系数的界限值, 提出了临界荷载和临界轴力与弹性柔度系数的关系式。

**关键词:** 圆弧拱; 水平弹性支承; 临界荷载; 屈曲; 弹性柔度系数

中图分类号: TU311.2 文献标识码: A

## IN-PLANE ELASTIC BUCKLING OF STEEL CIRCULAR ARCHES WITH HORIZONTAL SPRING SUPPORT

YANG Yang, \*TONG Gen-shu

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

**Abstract:** An arch is often connected with other structures that provide elastic restraints to the arch. These elastic restraints significantly influence its behavior. The analytical solutions of horizontally elastically supported arches that are subjected to vertical loads uniformly distributed along the arch chord are obtained. A dimensionless elastic flexibility factor is introduced. By analyzing the linear analytical solutions and using the flexibility factor, a simple analytical formula for the mid-span axial force and displacement of support is proposed, and criteria that distinguish between arches and arched beams are suggested. The effects of the stiffness of the horizontal end restraint on the distribution of internal forces, in-plane buckling mode and buckling load of arches are studied. A limiting flexibility factor that distinguishes between the in-plane anti-symmetric bifurcation mode and symmetric snap-through mode is presented, and the formula for buckling mid-span axial forces is proposed.

**Key words:** circular arch; horizontal elastic support; critical load; buckling; elastic flexibility factor

拱形结构在桥梁及结构工程中应用广泛。工程中常用到拉杆拱以及直接支承于其他结构上的两铰拱, 支座处总存在一定的水平位移, 其大小取决于拉杆或拱脚支承构件提供的水平约束。

对拱脚不发生水平位移的铰支或固定钢拱的面内弹塑性稳定的研究已较为深入。研究表明, 这种拱可以引入计算长度的概念, 计算拱的长细比,

获得拱的稳定系数。这个稳定系数考虑了几何缺陷和残余应力的不利影响<sup>[1]</sup>。

拉杆拱或者支承在两侧建筑物之间的拱, 拱脚会发生水平位移。此时拱随着拱脚支座水平刚度的变化而呈现出不同的性质。水平支承刚度为 0 时, 拱是一个拱梁, 随着刚度增加而越来越接近拱脚不能移动的拱。这种支座可水平移动的拱的内力和稳

收稿日期: 2009-09-03; 修改日期: 2009-10-20

作者简介: 杨 洋(1984—), 男, 山东济南人, 博士生, 主要从事钢拱结构的稳定性研究(E-mail: yangy2510@163.com);

\*童根树(1963—), 男, 浙江建德人, 教授, 博士, 博导, 主要从事钢结构的稳定性研究(E-mail: tonggs@ccea.zju.edu.cn).

定性如何, 需要系统的分析。

弹性支承对梁和柱的稳定影响已经得到了较为深入的研究<sup>[2-3]</sup>。对于两铰圆弧拱, 以往的研究主要针对支座完全刚性的情形, 分析其内力及屈曲状况, 较少涉及弹性支承的拱。

文献[4]研究了两端转动约束的正弦拱在沿弧长竖向均布荷载作用下的临界屈曲荷载, 扭转刚度随支座的水平推力而线性变化。文献[5]利用虚功方程推导了两端转动约束的圆弧拱在跨中集中荷载作用下的平衡方程和屈曲方程, 得到了考虑几何非线性的屈曲荷载, 并分析了支座转动约束刚度对屈曲模态的影响。文献[6-7]利用相同的方法分别研究了轴压的圆弧拱和抛物线拱在弹性支承下的稳定问题, 得到了考虑几何非线性影响的解析解, 其中前者考虑了径向和切向的弹簧刚度, 后者仅考虑了水平方向的弹性支承。但文献[5-7]在方程的推导过程中均未考虑剪应力的影响, 并且所研究的拱均属于浅拱。文献[8]在综合考虑了几何、材料非线性和支座刚度等条件的影响下, 扩展了有限元分析的曲梁单元。文献[9-10]由平截面假定出发, 引用有限变形下的应变位移关系, 由虚功方程推导出了圆弧拱的平面内的非线性平衡方程, 推导中考虑了横向应力和剪应力的二阶效应。文献[11]针对金属拱形波纹屋盖考虑了支座位移的影响。

本文在文献[9]的基础上, 由圆弧拱线性平衡方程出发得到了水平弹性支承拱在面内沿弦长竖向均布荷载作用下的解析解。利用拱与拱形梁在跨中轴力上的区别, 通过构造一个无量纲化的弹性柔度系数, 得到了在线性分析阶段划分拱与拱形梁的标准。本文在线弹性分析的范围内确定了分支屈曲的模态转变时的弹性柔度系数界限值, 同时提出了计算临界荷载和跨中临界轴力的近似公式。

## 1 线性解的推导

图 1 中  $r-q-y$  为空间固定不变的圆柱坐标系, 原点在曲率中心;  $x-y-z$  为建立在截面形心上的直角坐标系,  $x$  与  $r$  的正方向一致,  $z$  指向  $q$  增加的方向。拱截面为双轴对称工字形截面。 $u$  为形心在  $x$  方向的位移,  $w$  为形心在  $z$  方向的位移, 两者均以沿相应坐标轴正方向为正。采用的基本假定是: 1) 材料是弹性的; 2) 构件变形符合 Bernoulli 平截面假定; 3) 小变形屈曲研究。

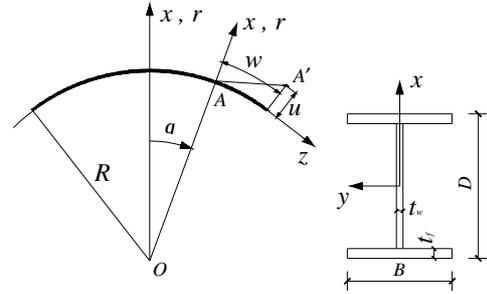


图 1 坐标系和拱截面

Fig.1 Coordinate system and cross-section of arch

两铰圆弧拱的面内线性平衡微分方程为<sup>[12]</sup>:

$$-EA \frac{w'' + u'}{R} = Rq_z \quad (1a)$$

$$EA \frac{w' + u}{R} + \frac{EI}{R^3} (u'''' + 2u'' + u) = Rq_x \quad (1b)$$

其中  $(\prime) = \partial(\prime) / \partial q$ ,  $q_x$ 、 $q_z$  分别为沿局部坐标系  $x$  轴、 $z$  轴方向的分布荷载, 以指向相应坐标轴正方向为正。

截面上的轴力、弯矩和剪力分别为<sup>[12]</sup>:

$$N = \int_A Ee_z dA = \frac{EA}{R} (w' + u) + \frac{EI}{R^3} (u'' + u) \quad (2a)$$

$$M = - \int_A Ee_x dA = \frac{EI}{R^2} (u'' + u) \quad (2b)$$

$$Q_x = \int_A t_{zx} dA = - \frac{EI}{R^3} (u'''' + u') \quad (2c)$$

其中:  $e_z$  和  $t_{zx}$  分别为截面上的正应变和剪应力<sup>[12]</sup>; 轴力以拉为正, 弯矩以内侧受拉为正, 剪力以正截面上沿  $x$  轴正方向为正。

承受水平投影线均布荷载的水平弹性支承拱的计算模型如图 2 所示, 并且定义外荷载  $q$  以竖向上为正。平衡方程为:

$$-EA \frac{w'' + u'}{R} = -Rq \sin q \cos q \quad (3a)$$

$$EA \frac{w' + u}{R} + \frac{EI}{R^3} (u'''' + 2u'' + u) = Rq \cos^2 q \quad (3b)$$

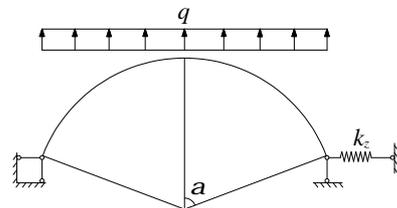


图 2 水平弹性支撑拱的分析模型

Fig.2 Model of horizontal elastically supported arch

求解上两式并考虑相应的边界条件可得:

$$u = C_1 \sin q + C_2 q \sin q + C_3 \cos q + C_4 \cos(2q) + C_5 \quad (4a)$$

$$w = D_1 \cos q + D_2 q \cos q + D_3 \sin q + D_4 \sin(2q) + D_5 q \quad (4b)$$

其中:

$$C_1 = D_1 = -\frac{\tan a \sin a}{8k_z} [qR \cos(2a) + 4H - 2qR] + \left[ \frac{qR}{4} (1 + 2\sin^2 a) - H \right] \cdot \frac{\cos a}{2k_z} \quad (5a)$$

$$C_2 = D_2 = \frac{[qR \cos(2a) + 4H - 2qR]R^3}{8EI \cos a} \quad (5b)$$

$$C_3 = \frac{[12H - 6qR - qR \cos(2a)]R^3}{12EI \cos a} + [qR(1 + 2\sin^2 a) - 4H] \frac{\sin a}{8k_z} -$$

$$H = qR \frac{r^2 [24a + 6a \cos(2a) - 17 \sin(2a) + \sin(4a)] + 12 \cos^3 a \sin a + 6r^2 h (1 + 2\sin^2 a)}{24a [1 + \cos(2a)] + 6r^2 \{4a [2 + \cos(2a)] - 6 \sin(2a)\} + 24r^2 h} \quad (5i)$$

式中:  $r = R/\sqrt{I/A}$ ,  $h = \frac{EI}{k_z R^3}$ ,  $k_z$  为支座的水  
平弹簧刚度。当  $h = 0$  时, 式(5i)与文献[9]得到的结  
论一致。

将式(4a)、式(4b)代入式(2a)一式(2c)可得到线  
性的轴力、弯矩和剪力:

$$N = \frac{2EI}{R^3} C_2 \cos q - \frac{qR}{2} \cos(2q) + \left( H + \frac{EI}{R^3} C_5 \right) \quad (6a)$$

$$M = \frac{EI}{R^2} [2C_2 \cos q - 3C_4 \cos(2q) + C_5] \quad (6b)$$

$$Q = \frac{2EI}{R^3} C_2 \sin q - \frac{qR}{2} \sin(2q) \quad (6c)$$

## 2 拱的线性分析

利用式(6a)和式(4a)、式(4b)可以得到拱的跨中  
轴力和拱脚水平位移, 但是表达式过于繁琐。本文  
通过分析不同长细比和圆心角的拱, 期望得到精度  
较高的实用公式。本文所选用的拱截面为双轴对称  
的工字形截面, H150×80×5/8, 面积  $A=1950 \text{ mm}^2$ ,  
回转半径  $i_y = 61.83 \text{ mm}$ , 弹性模量  $E=206 \text{ kN/mm}^2$ 。

拱的半跨长细比  $l = aR/i_y$  分别取 200、100、  
50、20, 圆心角  $a$  分别取  $90^\circ$ 、 $80^\circ$ 、 $70^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $50^\circ$ 、  
 $40^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $20^\circ$ 。

### 2.1 跨中轴力的计算

对跨中轴力进行了无量纲化, 主要研究  $N/N_\infty$   
的变化规律。其中,  $N$  为水平弹性支承拱的跨中轴  
力,  $N_\infty$  为相同荷载情况下支座铰接拱的跨中轴力。

由式(4a)、式(4b)和式(6a)可以推出:

$$\frac{N}{N_\infty} = 1 - \frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 + b \cdot z} \quad (7)$$

式中:

$$\frac{qR \cos(2a) + 4H - 2qR \left( \frac{\sin^2 a}{k_z} + \frac{aR^3}{EI} \right)}{8 \cos a \cdot \cot a} \quad (5c)$$

$$C_4 = \frac{qR^4}{12EI} \quad (5d)$$

$$C_5 = \frac{qR^4}{2EI} - \frac{HR^3}{EI} \quad (5e)$$

$$D_3 = -(C_2 + C_3) \quad (5f)$$

$$D_4 = -\frac{1}{2} \left( \frac{qR^2}{4EA} + \frac{qR^4}{12EI} \right) \quad (5g)$$

$$D_5 = \frac{HR}{EA} + \frac{HR^3}{EI} - \frac{qR^4}{2EI} \quad (5h)$$

$$b = \frac{2a^5}{4a + 2a \cos 2a - 3 \sin 2a + 4a^3 \cos^2 a / l^2};$$

$v$  为水平弹性支承拱的支座水平位移, 以向左为正;  
 $v_0$  为相同荷载下支座无水平约束的拱形梁的拱脚  
水平位移;  $z$  是弹性柔度系数:

$$z = \frac{EI}{k_z a^5 R^3} = \frac{EA}{k_z a^3 l^2 R} \quad (8)$$

为研究  $N/N_\infty$  与  $l$  和  $a$  之间的变化关系, 取  
 $z = 1$ 。  $N/N_\infty$  的值如表 1 所示。由表 1 可以看出:  
当  $z$  一定时, 轴力比和位移比仅与圆心角  $a$  有关,  
与长细比  $l$  基本无关。

表 1 跨中轴力比

Table 1 Ratio of axial force at mid-span

a/(°)	l			
	200	100	50	20
90	0.14108	0.14108	0.14108	0.14108
80	0.15419	0.15419	0.15420	0.15425
70	0.16641	0.16642	0.16645	0.16668
60	0.17750	0.17752	0.17762	0.17826
50	0.18724	0.18730	0.18751	0.18901
40	0.19546	0.19558	0.19605	0.19930
30	0.20204	0.20230	0.20334	0.21057
20	0.20692	0.20760	0.21032	0.22886

图 3 为  $l=50$ ,  $a$  分别为  $80^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $20^\circ$   
时的  $N/N_\infty - z$  关系曲线。由图 3 可以看到, 关系  
曲线的形状基本相似。

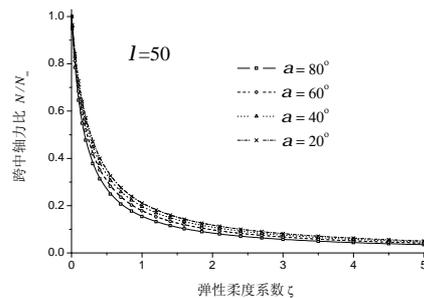


图 3  $N/N_\infty - z$  关系曲线  
Fig.3 Curves of  $N/N_\infty - z$

对于弹性支承拱和拱形梁分别取半跨结构(图4),由平衡关系可得:

$$M = k_z v R(1 - \cos a) - 1/2 \cdot q R^2 \sin^2 a \quad (9a)$$

$$M_0 = -1/2 \cdot q R^2 \sin^2 a \quad (9b)$$

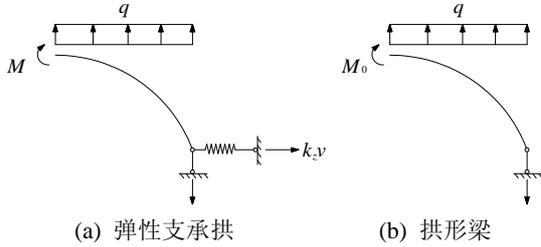


图4 跨中弯矩的计算模型

Fig.4 Models for calculating moment at mid-span

结合式(7)可以得到:

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{b \cdot z}{1 + b \cdot z} \cdot \frac{k_z v_0}{q R \cos^2(a/2)} \quad (10)$$

其中:  $M$  为水平弹性支承拱的跨中弯矩;  $M_0$  为相同荷载下拱形梁的跨中弯矩。

### 2.2 拱与拱形梁的划分标准

拱与拱形梁的区别在于拱脚是否存在水平推力。拱在支座处有水平反力,因此拱主要通过轴力来抵抗外部荷载,其跨中轴力较大;而拱形梁的支座无水平反力,其内力的主要部分为弯矩,跨中的轴力为零。因此,可以  $N/N_\infty$  作为划分拱与拱形梁的标准。

根据前文的讨论,  $N/N_\infty$  与柔度系数  $z$  有式(7)的关系。当  $z = 0.01$  时,轴力比均在 94%以上;当  $z = 5$  时,轴力比均在 6%以内。

因此,当  $z < 0.01$  时,结构可按照两端完全铰支的拱进行分析;当  $z > 5$  时,结构可按拱形梁计算;当  $0.01 \leq z \leq 5$  时,结构介于拱与拱形梁之间,跨中轴力和支座位移可以根据式(7)求得。

### 2.3 水平弹性支座对拱内力的影响

拱脚水平推力必然随着弹簧约束的改变而发生变化,进而影响拱的内力。本文选用  $I = 50$  的 3 个拱,研究其轴力、弯矩和剪力随柔度系数变化的规律。拱的参数分别是:面积  $A = 1950 \text{ mm}^2$ , 回转半径  $i_y = 61.83 \text{ mm}$ , 长细比  $I = 50$ ,  $a = 90^\circ$ 、 $a = 60^\circ$ 、 $a = 20^\circ$ 。前两个的矢跨比分别为 1:2 和 1:3.46,属于深拱;后者矢跨比为 1:11.34,已经开始接近浅拱。

将拱上任意一点的  $q$  值代入式(6a)~式(6c),分别绘制以上 3 个拱在不同柔度系数  $z$  下的无量纲化的内力分布图,如图 5、图 6 和图 7 所示:随着约

束刚度的减小,拱内各点的轴力下降,但对于不同圆心角的拱下降幅度有区别。在深拱中,跨中轴力的下降幅度最大,越靠近拱脚,轴力的下降越不明显;而在浅拱中,轴力减小的幅度沿弧长基本保持不变。

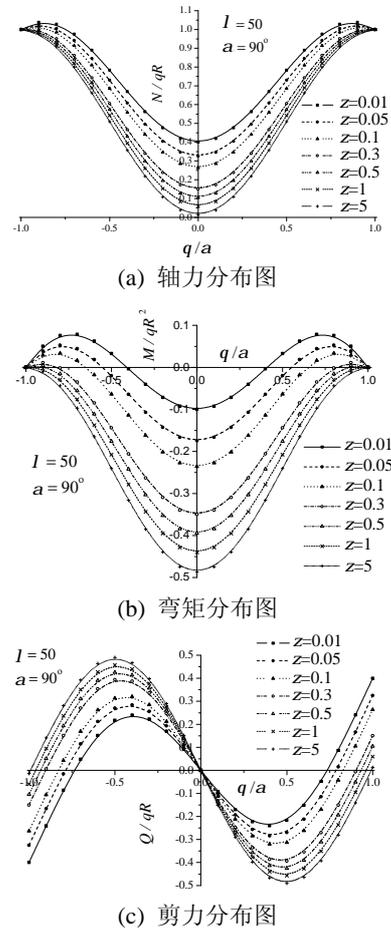
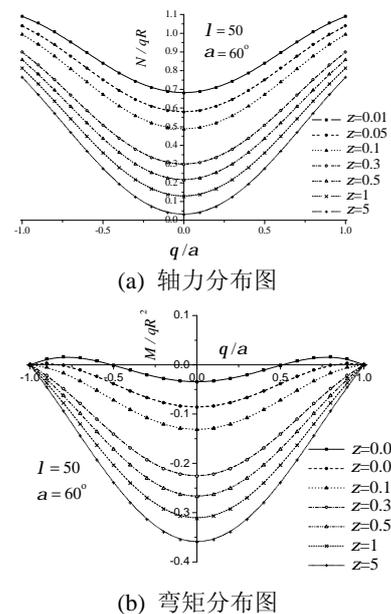
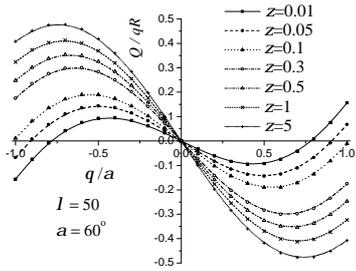


图5 内力分布随弹簧刚度的变化关系( $I = 50, a = 90^\circ$ )  
Fig.5 Variation of distribution of internal forces with spring stiffness ( $I = 50, a = 90^\circ$ )

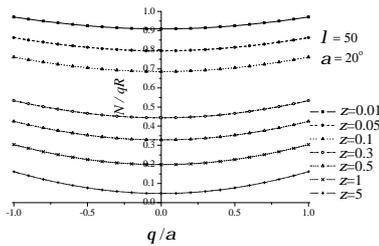


(b) 弯矩分布图

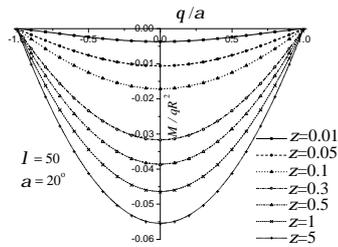


(c) 剪力分布图

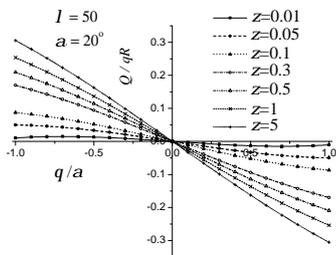
图 6 内力分布随弹簧刚度的变化关系 ( $l = 50, a = 60^\circ$ )  
Fig.6 Variation of distribution of internal forces with spring stiffness ( $l = 50, a = 60^\circ$ )



(a) 轴力分布图



(b) 弯矩分布图



(c) 剪力分布图

图 7 内力分布随弹簧刚度的变化关系 ( $l = 50, a = 20^\circ$ )  
Fig.7 Variation of distribution of internal forces with spring stiffness ( $l = 50, a = 20^\circ$ )

弯矩变化与轴力正好相反。剪力的变化较为复杂。对于浅拱，其剪力随支座刚度的减小而增加，且拱脚处的增幅最大。对于深拱，由于在靠近拱脚的区域，剪力出现变号，所以，随着支座刚度的减小，剪力会先减小再逐渐增大。

### 3 拱的屈曲分析

#### 3.1 屈曲模态的变化

在大部分范围内，两端铰支的圆弧拱的一阶屈

曲模态为反对称屈曲；仅当  $al$  较小时(一般小于 10)，拱的屈曲模态会发生变化，呈对称失稳，即跃越屈曲<sup>[13-14]</sup>，如图 8。当拱脚支座为水平弹性支承时，其分支屈曲的模态会随着约束刚度的变化而改变。

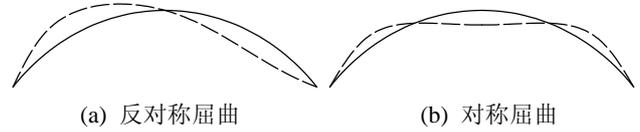


图 8 拱的屈曲模态  
Fig.8 Buckling modes of arch

利用 ANSYS 对弹性支承拱进行基于线性化特征值的屈曲分析。采用 BEAM189 梁单元，通过人为放大截面的剪切刚度来忽略剪切变形的影响。单元的适用性可参见文献[9]的验证。拱的截面与线性分析时相同。

研究表明，当拱脚水平约束的柔度系数  $z$  较小时，拱的屈曲模态与两铰拱相同，即反对称屈曲；随着柔度系数  $z$  的增大，拱的屈曲模态会发生转变，对称屈曲成为更容易发生的失稳模态。表 2 列举了各种拱屈曲模态改变时的  $z$  值。

表 2 拱屈曲模态转变时的  $z$  值  
Table 2 Criterion values of  $z$  for distinguishing between buckling modes of arch

$a/(\circ)$	$l$			
	200	100	50	20
90	0.073	0.073	0.073	0.073
80	0.069	0.069	0.069	0.068
70	0.068	0.068	0.068	0.067
60	0.070	0.070	0.070	0.068
50	0.074	0.073	0.073	0.069
40	0.078	0.077	0.076	0.070
30	0.082	0.081	0.079	0.066
20	0.085	0.084	0.079	0.046

从表 2 中可以看到，除  $l = 20, a = 20^\circ$  之外， $z$  分界值的变化范围不大，在 0.066—0.085 之间，且  $z$  值受  $l$  的影响较小。为了后面研究的方便，在这里统一取  $z_{lim} = 0.070$  作为屈曲模态转变的分界点。

#### 3.2 弹性支座对拱的屈曲荷载的影响

由于弹性支座的存在，使得拱的屈曲模态发生了变化，其临界荷载值在不同屈曲模态下的变化规律亦不尽相同。

根据 ANSYS 的分析结果，可得到如下结论：

1) 图 9 和图 10 分别为  $\frac{(q_{cr}/q_{\infty,cr})_{l=200}}{(q_{cr}/q_{\infty,cr})_{l=20}}$ - $z$  与

$\frac{(q_{cr}/q_{\infty,cr})_{l=200}}{(q_{cr}/q_{\infty,cr})_{l=50}}$ - $z$  的关系曲线。由这两幅图可以看

到, 当  $l \dots 50$  时, 弹性支承下拱的临界荷载与两端铰支拱的临界荷载的比值  $q_{cr} / q_{\infty,cr}$  基本不随长细比  $l$  而变化; 仅在长细比  $l$  和圆心角  $a$  都比较小时, 临界荷载比  $q_{cr} / q_{\infty,cr}$  才会随着  $l$  的减小而降低, 但是该影响也并不显著。

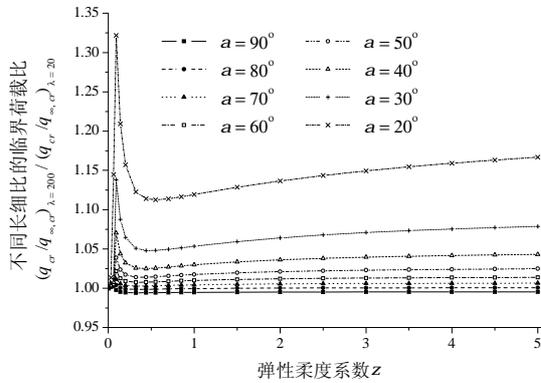


图9  $(q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=200} / (q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=20} - z$  关系曲线  
Fig.9 Curves of  $(q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=200} / (q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=20} - z$

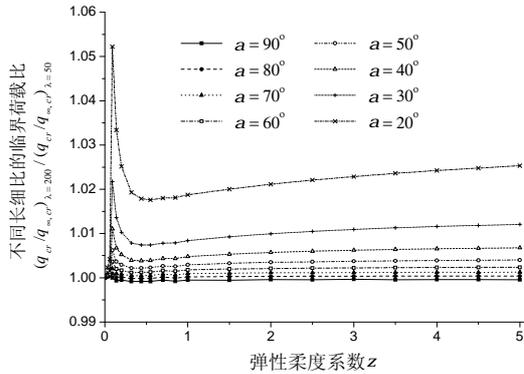


图10  $(q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=200} / (q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=50} - z$  关系曲线  
Fig.10 Curves of  $(q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=200} / (q_{cr} / q_{\infty,cr})_{l=50} - z$

2) 拱的屈曲模态发生转变的临界点是其屈曲荷载的极值点。图 11 为  $l = 50$ 、 $a$  从  $20^\circ$  变化到  $90^\circ$  的拱的  $q_{cr} / q_{\infty,cr} - z$  曲线。

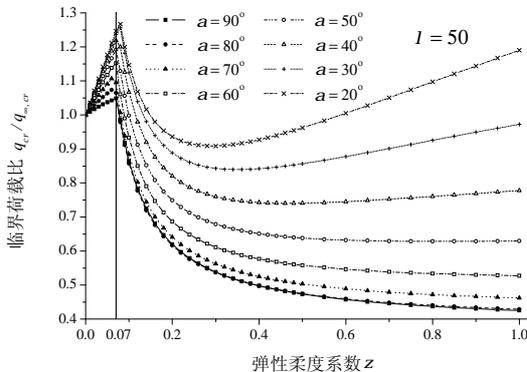


图11  $q_{cr} / q_{\infty,cr} - z$  关系曲线

Fig.11 Curves of  $q_{cr} / q_{\infty,cr} - z$

由曲线可以看出, 当  $z < z_{lim}$  时,  $q_{cr} / q_{\infty,cr}$  随  $z$  的增加而呈线性增加的趋势; 一旦  $z$  越过  $z_{lim}$ ,

$q_{cr} / q_{\infty,cr}$  急剧下降。

当  $z$  较大时, 对于不同的圆心角, 曲线的变化规律会有所不同。对  $a \dots 50^\circ$  的拱,  $q_{cr} / q_{\infty,cr}$  趋于平缓, 基本不随  $z$  变化; 而对  $a < 50^\circ$  的拱,  $q_{cr} / q_{\infty,cr} - z$  曲线会出现上翘段, 即  $q_{cr} / q_{\infty,cr}$  随  $z$  增大而增大, 且  $a$  越小, 上翘的幅度越明显, 其值甚至会超过  $z_{lim}$  处的荷载比。但是, 上翘段的数值对于实际工程来说其意义并不大, 因为上翘的原因是拱内的轴力小了, 弯矩大了, 拱变为受弯为主的构件。

根据前文得到的结论,  $z_{lim}$  可以取为 0.070。所以, 在实际工程中, 应该控制支座的柔度系数  $z$ , 0.070。

3) 为便于应用, 本文对于  $z$ , 0.070 的拱进行了数据拟合, 得到如下近似表达式:

$$\frac{q_{cr}}{q_{\infty,cr}} = 1 + (-a^2 - 0.1a + 3)z \quad (11)$$

该式适用范围是:  $20 \dots l \dots 200, 20^\circ \dots a \dots 90^\circ, z \dots 0.070$ 。

分析表明, 除  $l = 20$ 、 $a = 20^\circ$  之外, 式(11)的误差均在 5% 以内, 且绝大部分均偏于安全。

### 3.3 弹性支座对拱的跨中临界轴力的影响

将 3.2 节得到的临界屈曲荷载  $q_{cr}$  和  $q_{\infty,cr}$  代入式(6a)即可得到临界轴力。与荷载比相似, 弹性支承拱的跨中临界轴力  $N_{cr}$  与两端完全铰支拱的跨中临界轴力  $N_{\infty,cr}$  的比值  $N_{cr} / N_{\infty,cr}$  与长细比  $l$  无关, 故选取  $l = 50$  的拱作为代表进行分析。

图 12 为  $N_{cr} / N_{\infty,cr} - z$  的关系曲线。从图 12 中可以看到, 虽然在  $z \dots 0.070$  时临界荷载会不断增加, 但是拱的跨中轴力却逐渐减小, 且  $a$  越大降低的幅度越明显。

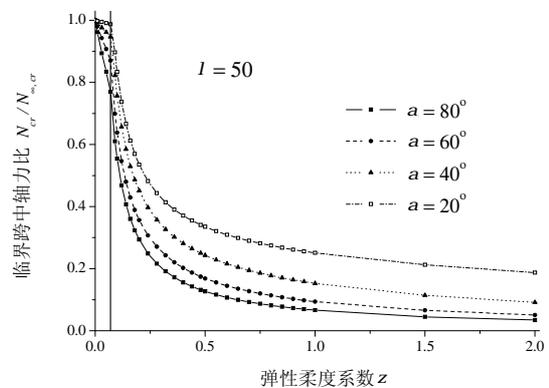


图12  $N_{cr} / N_{\infty,cr} - z$  曲线

Fig.12 Curves of  $N_{cr} / N_{\infty,cr} - z$

根据式(7)、式(11)可以得到:

$$\frac{N_{cr}}{N_{\infty,cr}} = \frac{N}{N_{\infty}} \cdot \frac{q_{cr}}{q_{\infty,cr}} = \frac{1+(-a^2-0.1a+3) \cdot z}{1+b \cdot z} \quad (12)$$

该式的适用范围与式(11)相同。

而  $N_{\infty,cr}$  可以用如下表达式进行近似计算：

$$N_{\infty,cr} = \frac{(1+0.05a-0.29a^2)\pi^2 EI}{(aR)^2} \quad (13)$$

综合式(12)、式(13)即可得到：

$$N_{cr} = \frac{1+(3-0.1a-a^2)z}{1+b \cdot z} \cdot \frac{(1+0.05a-0.29a^2)\pi^2 EI}{(aR)^2} \quad (14)$$

### 4 算例分析

下面举例表明，为使拱达到完全铰支拱的性能，而需要对水平约束刚度的要求。

**算例 1.** 一个两端铰支的拉杆拱，拱截面为 H 型钢：H500×300×10/16，面积  $A=14280 \text{ mm}^2$ ，回转半径  $i_y = 212.96 \text{ mm}$ 。分别计算满足  $z = 0.010$  和  $z = 0.070$  时拉杆的截面积(表 3)。

表 3 拉杆的截面积 /mm<sup>2</sup>  
Table 3 Sectional area of ties

$a/(^\circ)$	$l$							
	200		100		50		20	
	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$
90	18.4	2.6	73.7	10.5	294.8	42.1	1842.2	263.2
80	25.8	3.7	103.3	14.8	413.3	59.0	2583.1	369.0
70	36.8	5.3	147.2	21.0	588.7	84.1	3679.2	525.6
60	53.8	7.7	215.4	30.8	861.5	123.1	5384.5	769.2
50	82.3	11.8	329.2	47.0	1316.8	188.1	8230.2	1175.7
40	134.9	19.3	539.5	77.1	2158.1	308.3	13488.2	1926.9
30	248.7	35.5	994.8	142.1	3979.2	568.5	24869.8	3553.8
20	574.2	82.0	2296.6	328.1	9186.5	1312.4	57415.3	8202.2

**算例 2.** 两端铰支的圆弧拱支撑在两层框架上，拱截面为：H150×80×5/8，框架的平面尺寸如图 13 所示，两边的框架完全相同，框架柱截面为：Box500×16，框架梁截面为：H500×300×10/16。

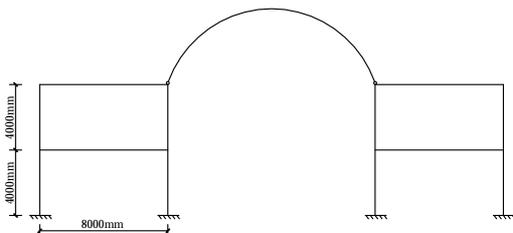


图 13 拱支撑于框架结构的分析模型

Fig.13 Model of arch supported on frames

一榀框架的抗侧刚度为 10142N/mm，其相应于

图 2 中的支座刚度  $k_z = 5017 \text{ N/mm}$ 。

表 4 中列举了对应于  $z = 0.010$  和  $z = 0.070$  时不同长细比和圆心角的拱所需要的支座弹簧刚度。通过这两个算例，可以给我们实际的设计工作带来以下的启示：

1) 随着长细比  $l$  和圆心角  $a$  的减小，对拱的支座刚度的要求会不断提高。

2) 在  $l$  和  $a$  比较大的情况下，无论是拉杆还是支承结构都很容易满足拱对于支座的要求 ( $z = 0.010$ )，可以不必考虑支座位移的影响。

表 4 支座的弹簧刚度 / (N/mm)  
Table 4 Spring stiffness at supports

$a/(^\circ)$	$l$							
	200		100		50		20	
	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$	$z=0.010$	$z=0.070$
90	70.0	10.0	559.8	80.0	4478.6	639.8	<b>69979</b>	<b>9997</b>
80	88.6	12.7	708.5	101.2	<b>5668.3</b>	809.8	<b>88567</b>	<b>12652</b>
70	115.7	16.5	925.4	132.2	<b>7403.4</b>	1057.6	<b>115679</b>	<b>16526</b>
60	157.5	22.5	1259.6	179.9	<b>10077</b>	1439.6	<b>157452</b>	<b>22493</b>
50	226.7	32.4	1813.8	259.1	<b>14511</b>	2073.0	<b>226731</b>	<b>32390</b>
40	354.3	50.6	2834.1	404.9	<b>22673</b>	3239.0	<b>354267</b>	<b>50610</b>
30	629.8	90.0	5038.5	719.8	<b>40308</b>	<b>5758.2</b>	<b>629807</b>	<b>89972</b>
20	1417.1	202.4	<b>11337</b>	1619.5	<b>90692</b>	<b>12956</b>	<b>1417066</b>	<b>202438</b>

注：表中的粗斜体字表示此时框架的抗侧刚度已不能满足该长细比和圆心角的拱对支座刚度的要求。

3) 当  $l$  和  $a$  较小时，支座刚度要求较高，仅仅依靠拉杆的抗拉刚度或是支承结构的抗侧刚度很难对拱提供足够的水平推力，当  $z$  不超过 0.070 时，可以按照本文前述的方法在计算中考虑支座弹性的影响；若  $z > 0.070$  就必须对支座进行特殊的处理或是降低结构的承载能力。

### 5 结论

本文对承受竖向均布荷载的水平弹性支承圆弧拱进行了线性及屈曲分析，得到了以下结论：

(1) 对水平弹性支承圆弧拱承受面内竖向均布荷载，利用平衡微分方程式(1a)、式(1b)得到了其解析解。

(2) 构造了弹性柔度系数  $z$ ，利用  $z$  对拱进行分类，将给设计带来方便。

(3) 通过分析发现，轴力比与位移比精确相等，并可以用式(7)表示；根据轴力比的相对大小，以  $z$  为变量，提出了划分拱与拱形梁的标准。

(4) 弹性支座的水平刚度会影响拱分支屈曲的屈曲模态，通过大量数值分析，得到了的模式转变

的临界值  $z_{lim}=0.070$ 。

(5) 通过数值分析发现, 当  $z > z_{lim}$  时, 临界荷载会随着弹簧刚度的减小而增大, 这就为实际的设计工作提供了有益的结论, 即只要将弹簧刚度控制在一定范围内, 拱的承载力可以不用考虑支座位移的影响; 在  $z < z_{lim}$  的范围内, 本文还提出了计算临界荷载和临界跨中轴力的近似式(11)和式(14)。

#### 参考文献:

- [1] 陈绍蕃. 钢结构稳定设计指南[M]. 第2版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004.  
Chen Shaofan. Guide to stability design of steel structures [M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2004. (in Chinese)
- [2] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability [M]. 2nd ed. New York: McGraw Hill Book Company, Inc., 1961.
- [3] Trahair N S, Bradford M A, Nethercot D A. The behaviour and design of steel structures to BS5950 [M]. 3rd ed. London: E&FN Spon, 2001.
- [4] Raymond H P. Buckling of shallow arches with supports that stiffen when compressed [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, 116(4): 973—976.
- [5] Pi Yong-Lin, Bradford M A, Tin-Loi F. Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, 43(1): 1—17.
- [6] Pi Y-L, Bradford M A, Tin-Loi F. Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(7-8): 2401—2425.
- [7] Bradford M A, Wang Tao, Pi Yong-Lin, Ian Gilbert R. In-plane stability of parabolic arches with horizontal spring supports. I: Theory [J]. Journal of Structural Engineering, 2007, 133(8): 1130—1137.
- [8] Pi Y-L, Bradford M A, Tin-Loi F, Gilbert R I. Geometric and material nonlinear analyses of elastically restrained arches [J]. Engineering Structures, 2007, 29(3): 283—295.
- [9] 程鹏. 两铰圆弧拱非线性弯曲理论和弹塑性稳定[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.  
Cheng Peng. In-plane nonlinear theory and elastic-plastic stability of pinned circular arches [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005. (in Chinese)
- [10] 程鹏, 童根树. 圆弧拱平面内弯曲失稳一般理论[J]. 工程力学, 2005, 22(1): 93—101.  
Cheng Peng, Tong Genshu. A general theory for in-plane nonlinear analysis of circular arches [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(1): 93—101. (in Chinese)
- [11] 张勇, 石永久. 支座位移对金属拱型波纹屋盖结构承载力的影响[J]. 工业建筑, 2001, 31(11): 57—59.  
Zhang Yong, Shi Yongjiu. Influence of support displacement on the load bearing capacity of arched corrugated metal roof [J]. Industrial Construction, 2001, 31(11): 57—59. (in Chinese)
- [12] 童根树. 钢结构的平面内稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.  
Tong Genshu. In-plane stability of steel structure [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese)
- [13] Pi Y L, Bradford M A, Uy B. In-plane stability of arches [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(1): 105—125.
- [14] Bradford M A, Uy B, Pi Y-L. In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(7): 710—719.