

文章编号: 1000-4750(2012)11-0026-07

十字弦结构非线性自由振动的频率分析

潘 渤, 尚福林

(西安交通大学工程力学系/机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘 要: 该文研究了十字交叉弦几何大变形的非线性自由振动问题。首先根据哈密顿原理推导了控制其自由振动的运动方程, 然后采用摄动方法求解了该弦的非线性耦合固有频率。通过将求得的非线性耦合固有频率解析解与各单弦的非线性频率解析解进行比较发现, 非线性耦合频率的解析解除了具有非线性特性, 还反应了各子结构对整体结构频率的影响, 即存在耦合特性。并且, 当一个子结构自身参数改变时, 整体结构的频率也会发生变化, 但是变化的幅度小于子结构的变化幅度, 即耦合特性增加了十字弦系统的稳定性。

关键词: 十字弦; 非线性; 自由振动; 摄动方法; 耦合特性

中图分类号: O322 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.03.0160

FREQUENCY ANALYSIS OF NONLINEAR FREE VIBRATION OF A CROSS STRING

PAN Bo, SHANG Fu-lin

(State Key Laboratory for Strength and Vibration, Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: This work concerns nonlinear free vibration of a cross string with large amplitude. The equations governing the nonlinear vibration of the cross string are derived firstly from Hamilton Principle, which take the form of Duffing equation. Then the perturbation method is used to solve the non-linear coupling natural frequency of the cross string. Our results show that the frequency of the cross string is affected by the vibration amplitude, the cross-section diameter and the ratio of the string length. And the nonlinear coupling natural frequency not only has the characteristic of nonlinearity, but also reflects the coupling property. That is to say, the frequency of the cross string will change when its part changes, however, the changing amplitude is smaller than that of the sub-structures. This indicates that the coupling characteristic can increase the stability of the whole cross string.

Key words: cross string; nonlinearity; free vibration; perturbation method; coupling effect

线弹性小变形弦的研究始于 200 多年前。在张力不变的假设下, 一维横向变形的线性弦的控制方程是线性的, 即:

$$T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中: ρ 为线密度; w 为弦的横向位移; T_0 为初始张力。式(1)在很多教科书中被提及, 加上边界条件和初始条件可以得到该方程的解。

Kirchhoff 于 1876 年首次提出, 如果几何变形不是小变形, 则沿弦长度方向的张力不为常量。由

此他提出了几何大变形弦的积分微分控制方程:

$$\left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中: E 是弹性模量; A 和 l_0 是弦在初始平衡位置的横截面积和初始长度。

Carrier 研究非线性弦问题时引入了径向位移, 认为径向位移和横向位移是同样重要的^[1-2]。20 世纪 90 年代以后, Leissa 和 Saad 获得了大变形弦振动问题的 2 个微分方程, 并使用伽辽金方法对其进行了解^[3]。Zhu 考虑了弹性弦的三维运动姿态,

收稿日期: 2011-03-24; 修改日期: 2011-09-09

通讯作者: 尚福林(1970—), 男, 陕西延长人, 教授, 博士, 博导, 主要从事微纳米材料与结构力学方面的研究(E-mail: shangfl@mail.xjtu.edu.cn).

作者介绍: 潘 渤(1988—), 男(满族), 辽宁铁岭人, 硕士生, 从事非线性振动、微纳米单晶塑性本构关系的研究(E-mail: pan.bo@stu.xjtu.edu.cn).

在弦振动的同时转动^[4]。Ram 采用了移动的边界条件,研究了移动弦的运动特性^[5]。Xiong 和 Hutton 使用哈密顿原理推导出了边界条件和控制方程^[6]。Khadem 在推导式(2)时增加了弯矩项,并考察了弦弯矩的影响^[7]。Zhu 和 Guo 等在研究移动弦的特征值问题时采用了光谱分析法^[8]。Ahn 更进一步地引入摩擦力的影响^[9]。需要指出的是,上述研究关注的均是单弦的特性。对于多弦的非线性特性,目前主要是采用有限元数值求解方法,还没有文献对其做出理论分析研究,因此也无法对其频率等性质从理论上进行探讨。

本文将从理论的角度探讨一种多弦非线性结构(十字弦)的振动行为,十字弦结构如图 1 所示。首先推导十字弦结构几何大变形自由振动的积分微分方程,然后用摄动方法探讨十字弦结构中非线性特性、耦合特性给结构频率带来的影响。

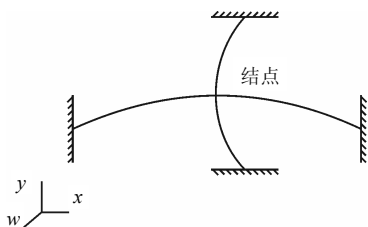


图 1 十字弦结构示意图

Fig.1 Sketch map of the cross string structure

1 十字弦结构的界定

图 1 所示的十字弦结构具有一个结点,两弦的连接点在振动时不分开,称为 Model(1,1)。也就是说,它是最简单的多弦结构,很多十字弦结构可构成更为复杂的网结构。本文探讨的是十字弦的几何非线性情况,即横向位移很大,产生的弦长改变不可忽略,而弦本身是线弹性的,其应变依然在线性的变化范围。十字弦的运动是一维的横向运动,不发生周向的转动及水平方向的运动。沿弦的张力不再是常量,它是位移与时间的函数 $T(x, t)$ 。十字弦结构作为网结构中的一部分,其边界条件多数不为刚性且弦的跨度有限,因此张力沿弦长的变化是有限的。同时为简化推导过程,假设两根弦的材料是相同的。

从上述界定条件出发,可以推导得出非线性弦的控制方程。

2 控制方程

首先, Lagrange 函数可以表示为:

$$L(t) = K(t) - U(t) \quad (3)$$

对式(3)积分可得:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} [K(t) - U(t)] dt \quad (4)$$

式中: K 为系统动能; U 为系统势能。考虑到系统的振动是一维的,哈密顿原理可以表示为:

$$\delta L = \delta \int_{t_1}^{t_2} [K(t) - U(t)] dt = 0 \quad (5)$$

以下来确定系统动能和势能的表达式。势能包括两部分:一部分来源于弦内张力;另一部分来源于外激励。如图 2 所示,在初始张力 T_0 作用下弦处于初始平衡状态。平衡位置弦的长度为 l_0 ,其中一微元 dx_0 在初张力作用下长度变为 dx ,变形后的长度为 ds ,因此,微元的总变形为:

$$\varepsilon = \frac{ds - dx_0}{dx_0} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dx_0} - 1 \quad (6)$$

其中:

$$\frac{dx}{dx_0} = 1 + \varepsilon_0 \quad (7)$$

ε_0 是平衡位置的初始应变;由几何关系可得:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2} \quad (8)$$

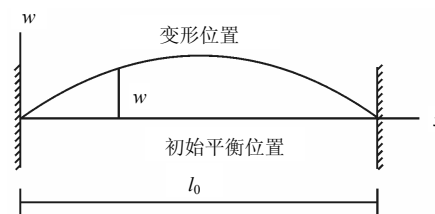


图 2 变形弦的初始位置与变形位置

Fig.2 Initial and current position of the distortional string

前述界定条件中假设应变仍是线弹性的,因此张力 $T(x, t)$ 与应变的关系可由式(6)~(8)得出:

$$T(x, t) = EA\varepsilon = EA \left[(1 + \varepsilon_0) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] \quad (9)$$

式中: A 为弦在初始平衡位置的横截面积,依照 Khadem 的办法^[7],式(9)可以表示为:

$$T(t) = \frac{EA + T_0}{l_0} \left[\int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2} dx - \frac{l_0}{1 + \varepsilon_0} \right] \quad (10)$$

由于十字弦结构多为网结构的子结构,张力表达式(10)是合理的。应用式(10),可以确定弦内张力所引起的势能,即:

$$dU_T(t) = \frac{EA + T_0}{l_0} \left[\int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - \frac{l_0}{1 + \varepsilon_0} \right].$$

$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx \quad (11)$$

积分式(11), 并进行简化可得:

$$U_T(t) = \frac{EA + T_0}{4l_0} \left[\int_0^{l_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \left[\int_0^{l_0} \frac{2\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \quad (12)$$

另一方面, 外激励所产生的势能可以根据图3和图1表示为:

$$U_F(t) = \int_0^{l_0} F_{\text{joint}}(t) \cdot \delta(x - x_{\text{joint}}) \cdot \delta(y - y_{\text{joint}}) \cdot w_{st}(x, y, t) dx \quad (13)$$

式中: F_{joint} 表示十字弦结构的结点连接力; $w_{st}(x, y, t)$ 代表结构的位移。图3给出了外激励与结点作用力的对应关系。

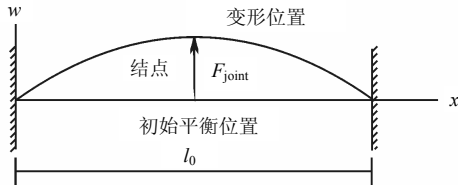


图3 Model(1,1)中单弦上的结点力

Fig.3 The nodal force on one string of Model(1,1)

任意时刻 t 的动能可以表示为:

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (14)$$

因此, 将式(12)、式(13)和式(14)代入式(5)中, 使用变分原理可以得到十字弦各弦的控制方程:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EA + T_0}{l_0} \left(\int_0^{l_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_0 l_0}{1 + \varepsilon_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -F_{\text{joint}}(t) \cdot \delta(x - x_{\text{joint}}), y = y_{\text{joint}} \quad (15a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} - \frac{EA' + T_0'}{l_0'} \left(\int_0^{l_0'} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{\varepsilon_0' l_0'}{1 + \varepsilon_0'} \right) \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = F_{\text{joint}}(t) \cdot \delta(y - y_{\text{joint}}), x = x_{\text{joint}} \quad (15b)$$

式(15a)和(15b)中, l_0' 是初始平衡位置另一根弦的初始长度。 $w = w_{st}(x, y_{\text{joint}}, t)$, $w' = w_{st}(x_{\text{joint}}, y, t)$ 。

相应的边界条件为:

$$w = 0, \quad \text{当 } x = 0 \quad x = l_0 \quad (16a)$$

$$w' = 0, \quad \text{当 } y = 0 \quad y = l_0' \quad (16b)$$

初始条件为:

$$w(x, y, t) \Big|_{t=0}^{x=x^j, y=y^j} = w(x^j, y^j, 0) \quad (17)$$

其中, $w(x^j, y^j, 0)$ 是给定的位移。

Nayfeh 指出^[10], 对于非线性弦的自由振动问题, 其频率是由原来的线性结构的线性固有频率项和非线性项组成的。十字弦结构在经过上述处理后, 反映耦合特性的是结点处的位移相等以及结点力大小相等方向相反。下面来具体求解十字弦结构的耦合特性与非线性特性。

3 Model(1,1)中振动参数的理论求解

积分微分方程式(15)左边的第二项含有 $\partial w / \partial x$, 这与线性控制方程不同, 由此也造成获得这个积分微分方程的解析解是十分困难的。从研究时间与坐标的影响来考虑, 可以采用模态叠加法近似逼近其响应, 因此下面的理论求解给出的是半解析解。

根据边界条件和初始条件, 将十字弦结构的位移响应表示为如下三角级数的形式:

$$w_{st}(x, y, t) = \sum_{m=1}^N a_m f_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l_0} \sin \frac{m\pi y}{l_0'} \quad (18)$$

式中: a_m 表示第 m 阶振幅; $f_m(t)$ 表示时间参数的影响。对于一个整体的结构, 应该有统一的时间变化规律, 因此十字弦的两根弦应该有相同的时间变化规律。同时满足: $f_m(0) = 1$ 。式(18)仅在 (x, y_{joint}) 、 (x_{joint}, y) 处不为 0, 其余处为 0。

再用三角级数表示式(15a)的激励项, 有:

$$-F_{\text{joint}}(t) \cdot \delta(x - x_{\text{joint}}) = \sum_{m=1}^N F_m \sin \frac{m\pi x}{l_0} \sin \frac{m\pi y_{\text{joint}}}{l_0'} \quad (19)$$

用三角级数表示式(15b)的激励项, 有:

$$F_{\text{joint}}(t) \cdot \delta(y - y_{\text{joint}}) = \sum_{m=1}^N F_m' \sin \frac{m\pi x_{\text{joint}}}{l_0} \sin \frac{m\pi y}{l_0'} \quad (20)$$

将式(18)、式(19)代入式(15a), 此时:

$w(x, t) = w_{st}(x, y_{\text{joint}}, t)$, 可得:

$$\frac{EA + T_0}{l_0} \left(\int_0^{l_0} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 a_i^2 f_i^2(t) \cos^2 \frac{i\pi x}{l_0} \sin^2 \frac{i\pi y_{\text{joint}}}{l_0'} dx + \frac{\varepsilon_0 l_0}{1 + \varepsilon_0} \right) \cdot \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 f_m(t) + \rho \ddot{f}_m(t) = F_m / a_m \quad (21)$$

由三角级数的正交性, 可以消去坐标 x 的影响, 从而求解各阶 $f_m(t)$ 项:

$$\frac{EA + T_0}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 f_i^2(t) a_i^2 \cdot \sin^2 \frac{i\pi y_{\text{joint}}}{l_0'}$$

$$f_m(t) \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 + \rho \ddot{f}_m(t) + \frac{EA+T_0}{l_0} \frac{\varepsilon_0 l_0}{1+\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 f_m(t) = F_m / a_m \quad (22a)$$

在第2部分中提到 $w'(y, t) = w_{st}(x_{\text{joint}}, y, t)$, 将其代入(15b)中并化简, 可得:

$$\frac{EA'+T'_0}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i\pi}{l'_0} \right)^2 f_i^2(t) \cdot a_i^2 \cdot \sin^2 \frac{i\pi x_{\text{joint}}}{l_0} \cdot f_m(t) \left(\frac{m\pi}{l'_0} \right)^2 + \rho \ddot{f}_m(t) + \frac{EA'+T'_0}{l'_0} \frac{\varepsilon'_0 l'_0}{1+\varepsilon'_0} \cdot \left(\frac{m\pi}{l'_0} \right)^2 f_m(t) = F'_m / a_m \quad (22b)$$

从式(19)、式(20)可以得到 $F_m(t)$ 和 $F'_m(t)$, 同时可以得到它们之间的关系。

$$F'_m(t) = -b_m F_m(t) \quad (23)$$

其中:

$$b_m = \frac{l_0}{l'_0} \frac{\sin^2 \frac{m\pi y_{\text{joint}}}{l'_0}}{\sin^2 \frac{m\pi x_{\text{joint}}}{l_0}} = \frac{l_0}{l'_0} \frac{y_1^m}{x_1^m} \quad (24a)$$

$$x_1^m = \sin^2 \frac{m\pi x_{\text{joint}}}{l_0}, \quad y_1^m = \sin^2 \frac{m\pi y_{\text{joint}}}{l'_0} \quad (24b)$$

如果 $x_1^m = 0$, 则依次可推知 $F_m = 0$ 。在使用摄动法求解这类问题时, 需要保证非线性项前的摄动因子是小量, 这里采用下面的变换方法。

$$g_m(t) = (EA+T_0) \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) \left(\frac{N\pi}{l_0} \right) f_m(t) = D_m \cdot f_m(t) \quad (25)$$

以及

$$g'_m(t) = \frac{D'_m}{D_m} \cdot g_m(t) \quad (26)$$

式(25)和式(26)中,

$$D_m = (EA+T_0) \cdot \frac{m\pi}{l_0} \cdot \frac{N\pi}{l_0},$$

$$D'_m = (EA'+T'_0) \cdot \frac{m\pi}{l'_0} \cdot \frac{N\pi}{l'_0}$$

则 $f_m(t)$ 可以表示为:

$$f_m(t) = \frac{1}{EA+T_0} \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^{-1} \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^{-1} g_m(t) \quad (27)$$

将式(27)代入式(22)中, 得到新的控制方程:

$$\ddot{g}_m(t) + \frac{1}{2\rho(EA+T_0)} \left(\frac{m}{N} \right)^2 \sum_{i=1}^N a_i^2 y_1^i g_i^2(t) g_m(t) +$$

$$\omega_{0m}^2 g_m(t) = (EA+T_0) \cdot \frac{m\pi}{l_0} \cdot \frac{N\pi}{l_0} \cdot \frac{F_m}{\rho \cdot a_m} \quad (28a)$$

$$\ddot{g}'_m(t) + \frac{1}{2\rho(EA'+T'_0)} \left(\frac{m}{N} \right)^2 \sum_{i=1}^N a_i^2 x_1^i [g'_i(t)]^2 g'_m(t) + \omega_{0m}^2 g'_m(t) = (EA'+T'_0) \cdot \frac{m\pi}{l'_0} \cdot \frac{N\pi}{l'_0} \cdot \frac{F'_m}{\rho \cdot a_m} \quad (28b)$$

根据式(15)和式(18), 两根弦在结点处的位移相等, $w(x_{\text{joint}}, t) = w'(y_{\text{joint}}, t) = w_{st}(x_{\text{joint}}, y_{\text{joint}}, t)$ 。

令

$$C = \frac{D'_m}{D_m} \quad (29)$$

取

$$\omega_{0m}^2 = \frac{T_0}{\rho} \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 \quad (30a)$$

这里 ω_{0m} 为单弦线性固有频率, 它与初始张力的大小成正比, 与初始平衡时的长度的平方成反比。类似地, 可以得到另一根弦的线性固有频率:

$$(\omega'_{0m})^2 = \frac{T'_0}{\rho} \left(\frac{m\pi}{l'_0} \right)^2 \quad (30b)$$

再令

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2\rho(EA+T_0)} \left(\frac{m}{N} \right)^2 \quad (31a)$$

$$\varepsilon'_m = \frac{1}{2\rho(EA'+T'_0)} \left(\frac{m}{N} \right)^2 \quad (31b)$$

将式(23)、式(26)、式(30)和式(31)代入式(28), 可得:

$$\ddot{g}_m(t) + \varepsilon_m \sum_{i=1}^N c_i \cdot g_i^2 \cdot g_m + \frac{(\omega'_{0m})^2 + b_m \omega_{0m}^2}{1+b_m} g_m(t) = 0 \quad (32)$$

式中:

$$c_i = \left[b_m y_1^m + x_1^m C^2 \frac{EA+T_0}{EA'+T'_0} \right] a_i^2 / (1+b_m) \quad (33)$$

使用摄动方法, 将 $g_m(t)$ 展开为如下形式:

$$g_m(t) = g_{0m}(t) + \varepsilon_m g_{1m}(t) + \varepsilon_m^2 g_{2m}(t) + \dots \quad (34)$$

单弦的频率也按摄动方法展开:

$$\omega_m^2 = \frac{(\omega'_{0m})^2 + b_m \omega_{0m}^2}{1+b_m} + \varepsilon_m \alpha_1 + \varepsilon_m^2 \alpha_2 + \dots \quad (35)$$

将式(34)、式(35)代入式(32)中, 对于 ε_m^0 项, 有:

$$\ddot{g}_{0m} + \omega_m^2 g_{0m} = 0 \quad (36)$$

为满足 $f_m(0)=1$, 可使:

$$g_{0m}(t) = (EA + T_0) \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) \left(\frac{N\pi}{l_0} \right) \cos(\omega_m t) \quad (37)$$

对于 ε_m^1 项, 有:

$$\ddot{g}_{1m} + \omega_m^2 g_{1m} = \alpha_1 g_{0m} - \sum_{i=1}^N c_i g_{0i}^2 g_{0m} \quad (38)$$

由式(38)可得:

$$g_{1m}(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{c_i}{(2\omega_i + \omega_m)^2 - \omega_m^2} \cdot [\cos(2\omega_i t + \omega_m t) - \cos(\omega_m t)] + \frac{c_i}{(2\omega_i - \omega_m)^2 - \omega_m^2} \cdot [\cos(2\omega_i t - \omega_m t) - \cos(\omega_m t)] \right] \cdot \left[(EA + T_0) \left(\frac{i\pi}{l_0} \right) \left(\frac{N\pi}{l_0} \right) \right]^2 + (EA + T_0) \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) \left(\frac{N\pi}{l_0} \right) \right\} \quad (39)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} c_m (EA + T_0)^2 \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i (EA + T_0)^2 \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^2 \quad (40)$$

将 $g_m(t)$ 展开到 ε_m^1 级时, 可以表示为:

$$g_m(t) = g_{0m}(t) + \varepsilon_m g_{1m}(t) \quad (41)$$

这样可确定 $f_m(t)$, 即:

$$f_m(t) = \varepsilon_m \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{4} \left\{ \frac{c_i}{(2\omega_i + \omega_m)^2 - \omega_m^2} \cdot [\cos(2\omega_i t + \omega_m t) - \cos(\omega_m t)] + \frac{c_i}{(2\omega_i - \omega_m)^2 - \omega_m^2} \cdot [\cos(2\omega_i t - \omega_m t) - \cos(\omega_m t)] \right\} \cdot \left[(EA + T_0) \left(\frac{i\pi}{l_0} \right) \left(\frac{N\pi}{l_0} \right) \right]^2 + \cos(\omega_m t) \quad (42)$$

那么, 十字弦结构的圆频率可以表示为:

$$\omega_m^2 = \frac{(\omega'_{0m})^2 + b_m \omega_{0m}^2 + \varepsilon_m \cdot \left[\frac{1}{4} c_m \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 \right] (EA + T_0)^2 \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^2}{1 + b_m} \quad (43)$$

其频率可以表示为:

$$f_m^{st} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(\omega'_{0m})^2 + b_m \omega_{0m}^2 + \varepsilon_m \cdot \left[\frac{1}{4} c_m \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 \right] (EA + T_0)^2 \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^2}{1 + b_m} \right)^{1/2} \quad (44)$$

式(44)中, $b_m=0$ 与 $b_m=\infty$ 分别表示受到耦合作用的影响, 一根弦处于另一根弦的节点处, 形成节线。

由初始条件式(17)可得:

$$\sum_{m=1}^n a_m \sin \frac{m\pi x^j}{l_0} \sin \frac{m\pi y^j}{l'_0} = w(x^j, y^j, 0) \quad (45)$$

其中, $j=1, 2, \dots, n$, 由于 $w(x^j, y^j, 0)$ 已知, 可确定 a_m 。需要说明的是, 上述三角级数得到的是结构位移的近似解。为了尽可能逼近真实的结构位移, n 值应取得大些, 两根弦上应取相同多的点。

4 十字弦结构固有频率的结果讨论

式(44)给出了十字弦结构各阶频率的解析解, 同时根据上述求解过程, 这里可以得到两个单弦结构的频率分别为:

$$f_m^I = \frac{1}{2\pi} \left(\omega_{0m}^2 + \varepsilon_m \cdot \left[\frac{1}{4} a_m^2 y_1^m \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 y_1^i \left(\frac{i\pi}{l_0} \right)^2 \right] (EA + T_0)^2 \left(\frac{N\pi}{l_0} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (46a)$$

$$f_m^{II} = \frac{1}{2\pi} \left((\omega'_{0m})^2 + \varepsilon'_m \cdot \left[\frac{1}{4} a_m^2 x_1^m \left(\frac{m\pi}{l'_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 x_1^i \left(\frac{i\pi}{l'_0} \right)^2 \right] (EA' + T'_0)^2 \left(\frac{N\pi}{l'_0} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (46b)$$

首先来分析弦长比对耦合频率的影响。这里通过增加一根弦 l'_0 的长度来改变弦长比 l'_0/l_0 , 图 4 给出了上述 3 个结构前 3 阶频率随弦长比变化的曲线。材料的参数分别取为 $E=210 \times 10^9 \text{Pa}$, $l_0=1\text{m}$, $\rho=0.1543\text{kg/m}$, $x_1^m = y_1^m$, $\varepsilon_0=0.2 \times 10^{-3}$, 两单弦采用圆截面弦, 其直径均为 0.005m 。由式(46b)可知, 改变弦的长度, 弦的频率将随 l'_0 的增大而减小, 由式(46a)可知, 如果弦长保持恒定, 弦的频率将不会变化。从图 4 可以看出, 耦合频率随着 l'_0 的增大而减小, 即耦合频率受到弦长比的影响, 或者说受到子结构变化的影响, 但是变化幅度小于变弦长的弦。

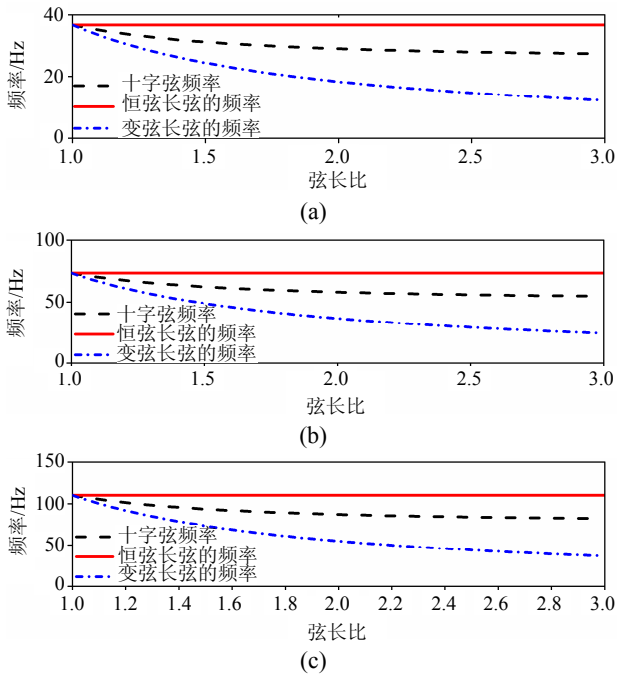


图4 弦长比 l'_0/l_0 对前3阶频率的影响

Fig.4 The influence of the ratio of string on the first three frequencies of the three structures

对非线性弦的自由振动，通常其各阶频率将随着模态振幅的增大而增大^[7,10]。图5给出了前3阶频率随模态幅值变化的曲线，取弦长比 $l'_0/l_0 = 1.2$ ，其余参数同上。可以发现，结构的耦合频率同样具有随各阶模态幅值的增大而增大的性质，其变化受

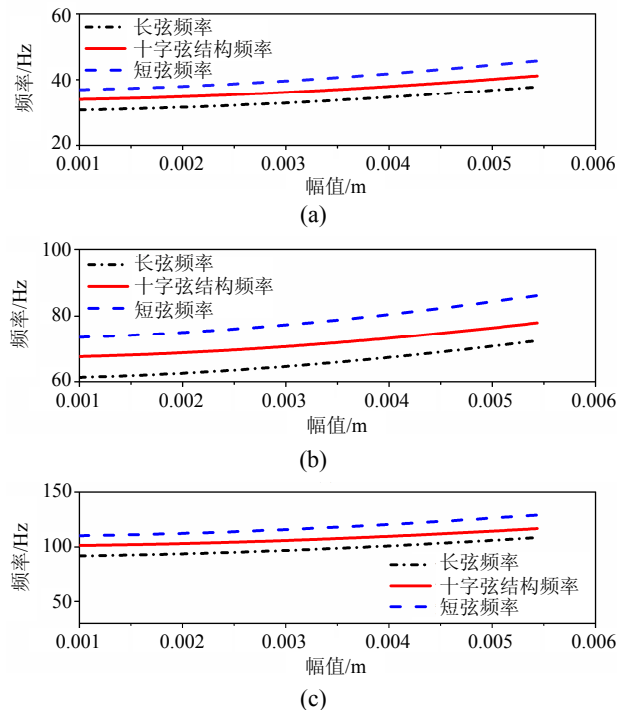


图5 模态幅值对前3阶频率的影响

Fig.5 The influence of vibration amplitude on the first three frequencies of the three structures

到两根弦的控制，处于两单弦之间，且遵循式(44)的规律。

对于非线性弦的自由振动，其各阶频率随着弦横截面积的增大而增大。这里采用圆截面弦进行讨论，图6给出了前3阶频率随横截面积比 A'/A 变化的曲线，其中 $l'_0/l_0 = 1$ ，其余各参数同前。可以看出，耦合频率随其结构中一个弦的横截面积的增大而增大，但是其变化的幅度小于变截面弦。这一结果表明，弦的横截面积对耦合频率也存在影响。

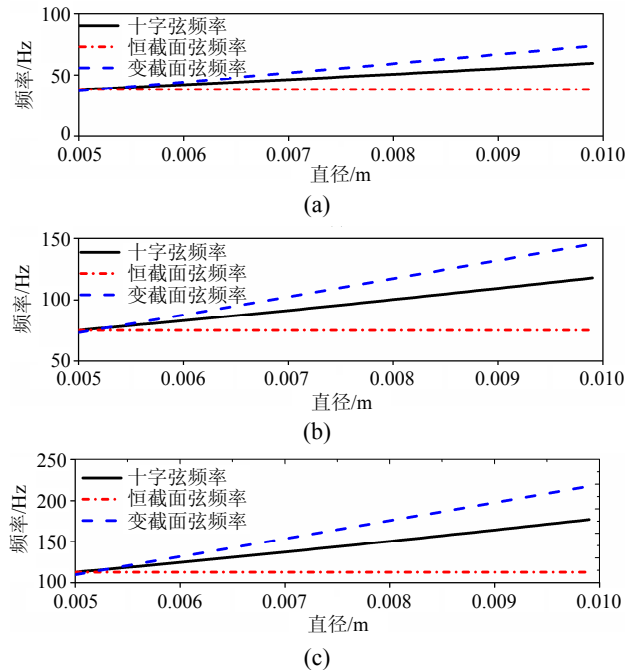


图6 横截面积比 A'/A 对前3阶频率的影响

Fig.6 The influence of the ratio of cross-sectional area on the first three frequencies of the three structures

5 结论

本文对由两根线弹性单弦组成的十字弦结构在几何非线性情况下的振动频率进行了理论分析。可以看出，该十字弦结构的各阶固有频率依然与各单弦的振动特性有关，但受到两根弦的同时控制，具体来说，其非线性耦合固有频率并不是两根单弦频率简单的平均，整个结构的频率特性遵循如式(44)规定的关系。当局部几何参数发生改变时，整个结构的频率会有变化，但是其变化幅度小于局部结构自身因参数改变的变化幅度。这些均表明，耦合特性增加了十字弦结构的稳定性。

参考文献:

[1] Carrier G F. On the Nonlinear vibration problem of the elastic string [J]. Quarterly of Applied Mathematics,

- 1945, 3(2): 157—165.
- [2] Carrier G F. A note on the vibrating string [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1949, 7(1): 97—101.
- [3] Leissa A W, Saad A M. Large amplitude vibrations of strings [J]. Transactions of the ASME, 1994, 61(2): 296—331.
- [4] Zhu F, Rahn C D. Vibrations of ballooning elastic strings [J]. Journal of Applied Mechanics, 1997, 64(3): 676—683.
- [5] Ram Y M, Caldwell J C. Free vibration of a string with moving boundary conditions by the method of distorted images [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 194(1): 35—47.
- [6] Xiong Y, Hutton S G. Vibration and stability analysis of a multi-guided rotating string [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 169(5): 669—683.
- [7] Khadem S E, Rezaee M R. Non-linear free vibration analysis of a string under bending moment effects using the perturbation method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(4): 677—691.
- [8] Zhu W D, Mote C D, Guo B Z. Asymptotic distribution of eigenvalues of a constrained translating string [J]. Journal of Applied Mechanics, 1997, 64(3): 613—619.
- [9] Ahn J. A vibrating string with dynamic frictionless impact [J]. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57(8): 861—884.
- [10] Nayfeh A H. Nonlinear oscillations [M]. New York: John Wiley & Sons, 1979: 67—179.

(上接第 25 页)

- [13] 孙雁, 刘正兴, 钟万勰. 基于哈密尔顿体系的裂纹尖端应力奇性分析及计算[J]. 力学季刊, 2001, 22(1): 18—23.
Sun Yan, Liu Zhengxing, Zhong Wanxie. Analysis and calculation of stress singularity at crack tip of Hamiltonian system [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2001, 22(1): 18—23. (in Chinese)
- [14] 王承强, 郑长良. 平面裂纹应力强度因子的半解析有限元法[J]. 工程力学, 2005, 22(1): 33—37.
Wang Chengqiang, Zheng Changliang. Semi-analytical finite element method for plane crack stress intensity factor [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(1): 34—37. (in Chinese)
- [15] Somaratna N, Ting T C T. Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites [J]. International Journal of Engineering Science, 1986, 24: 1115—1134.
- [16] Ghahremani F. A numerical variational method for extracting 3D singularities [J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27: 1371—1386.
- [17] Pageau S S, Biggers S B Jr. A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multi-material wedges and junctions [J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33: 33—47.
- [18] 平学成, 陈梦成, 谢基龙. 各向异性复合材料尖劈和接头的奇性应力指数研究[J]. 应用力学学报, 2004, 21(3): 27—33.
Ping Xuecheng, Chen Mengcheng, Xie Jilong. Stress singularities in tips of three-dimensional anisotropic multi-material wedges and junctions [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21(3): 27—33. (in Chinese)
- [19] 平学成, 谢基龙, 陈梦成, 李强. 各向异性两相材料尖劈奇性场的非协调元分析[J]. 力学学报, 2005, 37(1): 24—31.
Ping Xuecheng, Xie Jilong, Chen Mengcheng, Li Qiang. A non-confirming finite element analysis of singular fields in prismatic anisotropic bimaterial wedges [J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 37(1): 24—31. (in Chinese)
- [20] Ting T C T, Hoang P H. Singularities at the tip of a crack normal to the interface of an anisotropic layered composite [J]. International Journal of Solids and Structures, 1984, 20: 439—454.