

文章编号: 1000-4750(2012)11-0033-07

Iwan 模型非线性恢复力及能量耗散计算研究

张相盟, 王本利, 卫洪涛

(哈尔滨工业大学卫星技术研究所, 哈尔滨 150080)

摘 要: 广泛应用于装配结构中的螺栓连接会对整个结构的动力响应产生显著的影响, 可见, 研究这类连接部位的动力学行为具有重要的意义。该文对描述此类连接形式的动力学行为的 Iwan 模型进行了深入的研究。首先推导了当构成模型的 Jenkins 单元的屈服力满足均匀分布的情况下, Iwan 模型分别处于局部滑移和整体滑移运动时的描述模型恢复力的分段非线性函数, 并对其进行了归一化处理; 接着在其基础上, 推导了在这两类滑移运动中, 模型周期能量耗散的归一化计算公式; 最后还进一步对修正 Iwan 模型进行了研究。研究成果为研究装配结构的结构阻尼和非线性动力学行为奠定了基础。

关键词: 螺栓连接; Iwan 模型; 局部滑移; 整体滑移; 恢复力; 分段非线性函数; 能量耗散

中图分类号: O322; TH113 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.03.0162

CALCULATION OF NONLINEAR RESTORING FORCES AND ENERGY DISSIPATION OF IWAN MODEL

ZHANG Xiang-meng, WANG Ben-li, WEI Hong-tao

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Bolted joints, which are widely used in assembly structures, have the significant effect on the dynamic responses of an entire structure. So it is of great significance to study the dynamic behaviors of the joints. Iwan model, which is just an effective model can represent the significant dynamic behaviors of such joints, is thoroughly studied in this paper. The piecewise nonlinear functions of restoring forces of the model in both cases of microslip and macroslip are first derived and normalized when the yield force of the Jenkins elements, which constructed the model, follow a uniform distribution. Based on these functions, the normalized expressions of energy dissipation per cycle of the model are then derived in the cases of microslip and macroslip. Finally, an adjusted Iwan model is also studied. The results of the present study lay a foundation for the future study of the structural damping and dynamic behaviors of the assembly structures.

Key words: bolted joints; Iwan model; microslip; macroslip; restoring forces; piecewise nonlinear functions; energy dissipation

含有螺栓连接的机械部件广泛存在于各类机械产品中。通常, 当含有此类连接的结构受到外部周期载荷激励时(特别是当结合面受到切向外力激励时), 在结合面处就会出现复杂的摩擦和滑移行为, 从而产生能量耗散。这也是结构阻尼的重要来源, 结合面之间的相对滑移引起的阻尼甚至可达到

整个结构阻尼的 90%^[1]。另外, 这种连接形式会改变连接处的局部刚度和阻尼, 从而对整个结构的动力特性及动态响应产生很大的影响^[2]。对于简单的装配结构, 其建模和分析工作可以用现有的有限元软件来完成, 但是, 要精确地预示结合面的滑移行为, 就需更为细密的网格划分, 这就大大地增加了

收稿日期: 2011-03-24; 修改日期: 2012-01-11

基金项目: 国防预研项目(4132002031)

通讯作者: 张相盟(1984—), 男, 陕西咸阳人, 博士生, 从事航天器结构非线性振动研究(E-mail: zhangxm1984@gmail.com).

作者简介: 王本利(1944—), 男, 江苏盐城人, 教授, 学士, 博导, 从事复杂航天器动力学及控制研究(E-mail: wangbenli@hit.edu.cn);

卫洪涛(1982—), 男, 河南周口人, 博士生, 从事航天器结构非线性振动研究(E-mail: htwei@163.com).

计算时间。而且，对于存在多处连接的复杂装配结构，要建立其精确的有限元模型存在较大困难。因此，建立简单且能正确描述结构连接处动力学行为的模型十分必要。

目前，具有代表性的描述此类连接力学行为的模型有 Iwan 模型^[3-4]、Valanis 模型^[5]以及 Bouc-Wen 模型^[6-7]等。其中 Iwan 模型物理意义明确直观，已广泛应用于研究螺栓连接和铆接界面非线性建模、能量耗散、动力学分析以及连接处参数识别等。Segalman^[8-9]研究表明，Iwan 模型能够描述连接处复杂的干摩擦现象，并在 Iwan 的基础上，提出了能够定性描述连接处重要特征的低阶模型。他还进一步用含有 4 个参数的 Iwan 模型研究了搭接结构接触面在简谐激励下的周期能量耗散问题^[10]。Ouyang 等^[11]对采用螺栓搭接式连接的悬臂梁结构在大小不同预紧力下，分别施加不同量级扭转激励，对各组实验中测得的恢复力-位移曲线进行了分析，并用 Iwan 模型精确地重现了实验结果。

图 1(a)为 Iwan 模型(也称 Iwan 并联-串联模型)示意图，它是由 N 个 Jenkins 单元并联而成，每个 Jenkins 单元是由刚度为 k/N 的线性弹簧和屈服力为 f_i^*/N 的库伦摩阻片串联构成。在模型的周期运动中，如果仅部分 Jenkins 单元出现滑移，称模型产生了局部滑移；如果所有 Jenkins 单元都出现了滑移，则称模型产生了整体滑移。图 1(b)为 Iwan 模型局部滑移下的力-位移关系曲线(迟滞回线)示意图，它是由脊线(也称初始加载段，对应于曲线 oa 段)和迟滞环(闭合曲线 $abcd$ 段，包括对应于卸载过程的 abc 段和对应于加载过程的 cda 段)组成。

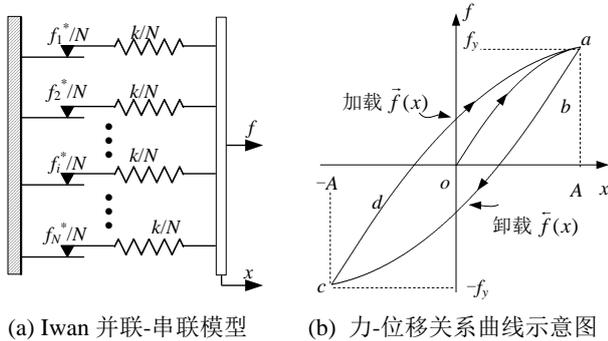


图 1 Iwan 模型及其力-位移关系曲线示意图

Fig.1 Sketch map of Iwan model and it's force-displacement curves

图 2 为螺栓搭接式连接装配图，基于 Iwan 模型的螺栓连接的结合面力学模型如图 3 所示。

Iwan 模型的迟滞回线在有关 Iwan 模型的文献

中并不少见，但对于描述迟滞回线上模型恢复力的计算公式，这些文献仅以积分形式给出，其力-位移关系不够明晰，Iwan^[3]也仅给出了当模型中的 Jenkins 单元屈服力满足均匀分布情况下，迟滞回线脊线部分恢复力关于位移的显式表达式。

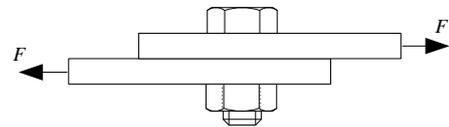


图 2 螺栓连接装配图

Fig.2 Assembly drawing of a bolted joint

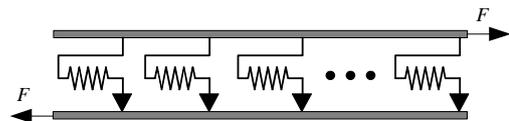


图 3 结合面接触模型

Fig.3 Contact model of joint surface

本文在组成 Iwan 模型的 Jenkins 单元屈服力满足均匀分布的情况下，对描述迟滞环的恢复力积分表达式进一步推导，分别得到模型在局部滑移和整体滑移下描述恢复力的分段非线性函数，并对其进行了归一化；然后在其基础上推导了模型在两种滑移运动中归一化周期能量耗散的计算公式；最后还研究了修正 Iwan 模型的周期能量耗散问题。

1 Iwan 模型恢复力计算

图 1(a)中 Iwan 模型的恢复力为：

$$f = \sum_{i=1}^N \begin{cases} r_i(t) & \text{abs}(r_i(t)) < f_i^* \\ \frac{f_i^*}{N} \text{sgn}(\dot{x}) & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

其中，

$$r_i(t) = k(x - x_{rev}) - f_i^* \text{sgn}(\dot{x}_{rev}) \quad (2)$$

式中： x_{rev} 为速度反方向的模型位移(如图 1(b)中 $\pm A$ 处)； \dot{x}_{rev} 为速度变为零之前无限小时刻的速度。

当模型中的单元数量 $N \rightarrow \infty$ 时，称此时的 Iwan 模型为连续 Iwan 模型。定义 f_i^* 的概率密度函数为 $\varphi(f^*)$ 。则在外部周期激励下，模型在卸载过程中的恢复力可由下式得到^[3]：

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = & \int_0^{\frac{k(A-x)}{2}} -f^* \varphi(f^*) df^* + \\ & \int_{\frac{k(A-x)}{2}}^{kA} [kx - (kA - f^*)] \varphi(f^*) df^* + \\ & kx \int_{kA}^{\infty} \varphi(f^*) df^*, \quad -A \leq x \leq A \end{aligned} \quad (3)$$

显然，模型恢复力与速率无关。由于 Iwan 模

型满足 Masing 准则^[12], 故在加载过程中, 模型恢复力函数 $\bar{f}(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 存在如下关系:

$$\bar{f}(x) = -\bar{f}(-x) \quad (4)$$

由式(3)、式(4)两式便可求出整个迟滞环上的恢复力。但此二式均为积分式, 其恢复力-位移关系并不明确。因此, 须进一步求出式(3)的积分结果, 这依赖于函数 $\varphi(f^*)$ 的形式。当模型所有 Jenkins 单元都屈服时模型恢复力记为 f_y , 假设 f^* 在以 f_y 为中心、带宽为 Δf ($\Delta f \leq 2f_y$) 的区间内均匀分布^[3], 则概率密度函数为:

$$\varphi(f^*) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta f}, & f_y - \frac{\Delta f}{2} \leq f^* \leq f_y + \frac{\Delta f}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

下文将详细推导当 $\varphi(f^*)$ 满足式(5)定义时式(3)的积分结果。

当外激励位移幅值 A 满足 $A \leq (f_y - \Delta f / 2) / k$ 时, 构成模型的所有 Jenkins 单元在整个运动周期中始终处于粘滞状态, 模型等效于一个刚度为 k 的线性弹簧, 无能量耗散; 当 $A > (f_y - \Delta f / 2) / k$ 时, Iwan 模型必然会产生滑移运动, 下面分别推导在局部滑移和整体滑移运动中模型恢复力计算公式。

1.1 模型局部滑移运动中恢复力计算

图 1(b)中迟滞环部分便为模型在局部滑移周期运动中恢复力-位移关系曲线, 图 1(b)中位移幅值 A 的取值范围为:

$$(f_y - \Delta f / 2) / k < A \leq (f_y + \Delta f / 2) / k$$

在图 1(b)中 ab 段, 模型中所有 Jenkins 单元均处于粘滞状态, x 取值范围为:

$$A - (f_y - \Delta f / 2) / k \leq x \leq A$$

模型恢复力为:

$$\bar{f}_{mic}(x) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_y - \frac{\Delta f}{2}}^{kA} [kx - (kA - f^*)] df^* + \frac{1}{\Delta f} kx \int_{kA}^{f_y + \frac{\Delta f}{2}} df^* \quad (6)$$

积分得:

$$\bar{f}_{mic}(x) = kx + \frac{f_y - kA}{2} - \frac{\Delta f}{8} + \frac{1}{2\Delta f} (2kAf_y - k^2A^2 - f_y^2) \quad (7)$$

在 bc 段, 模型中部分 Jenkins 单元出现滑移, 此阶段 x 的取值范围为:

$$-A \leq x \leq A - (f_y - \Delta f / 2) / k$$

模型恢复力为:

$$\bar{f}_{mic}(x) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_y - \frac{\Delta f}{2}}^{\frac{k(A-x)}{2}} (-f^*) df^* + \frac{1}{\Delta f} kx \int_{kA}^{f_y + \frac{\Delta f}{2}} df^* + \frac{1}{\Delta f} \int_{\frac{k(A-x)}{2}}^{kA} [kx - (kA - f^*)] df^* \quad (8)$$

式(8)的积分结果为:

$$\bar{f}_{mic}(x) = \frac{k^2}{4\Delta f} x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{f_y}{\Delta f} - \frac{kA}{2\Delta f} \right) kx - \frac{k^2A^2}{4\Delta f} - \frac{f_y}{2} + \frac{\Delta f}{8} + \frac{f_y^2}{2\Delta f} \quad (9)$$

可见, 当模型中部分 Jenkins 单元发生滑移时, 模型恢复力为含有位移平方项的非线性函数。

综上, 模型在局部滑移运动中的恢复力可表示成下面分段函数:

$$\bar{f}_{mic}(x) = \begin{cases} kx + \frac{f_y - kA}{2} - \frac{\Delta f}{8} + \frac{1}{2\Delta f} (2kAf_y - k^2A^2 - f_y^2), & A - (f_y - \Delta f / 2) / k \leq x \leq A \\ \frac{k^2}{4\Delta f} x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{f_y}{\Delta f} - \frac{kA}{2\Delta f} \right) kx - \frac{k^2A^2}{4\Delta f} - \frac{f_y}{2} + \frac{\Delta f}{8} + \frac{f_y^2}{2\Delta f}, & -A \leq x < A - (f_y - \Delta f / 2) / k \end{cases} \quad (10)$$

图 1(b)中迟滞环加载段曲线对应的恢复力可由式(10)结合式(4)计算得出。

1.2 模型整体滑移运动中恢复力计算

图 4 为整体滑移时 Iwan 模型的迟滞环形状示意图, 图 4 中位移幅值 A 的取值范围为:

$$A > (f_y + \Delta f / 2) / k$$

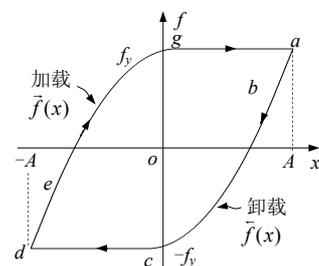


图 4 Iwan 模型整体滑移时迟滞环示意图

Fig.4 Sketch map of the hysteresis loop of Iwan model in macroslip

迟滞环卸载段曲线对应的模型运动状态由 3 个阶段构成: 对应于 ab 段的粘滞阶段, 对应于 bc 段

的部分滑移阶段以及对应于 cd 段的纯滑移阶段。因此, 式(3)可化为下面三段式分段函数:

$$\bar{f}_{mac}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta f} \int_{f_y - \frac{\Delta f}{2}}^{f_y + \frac{\Delta f}{2}} [kx - (kA - f^*)] df^*, & A - (f_y - \Delta f/2)/k \leq x \leq A \\ \frac{1}{\Delta f} \left\{ \int_{f_y - \frac{\Delta f}{2}}^{\frac{k(A-x)}{2}} -f^* df^* + \int_{\frac{k(A-x)}{2}}^{f_y + \frac{\Delta f}{2}} [kx - (kA - f^*)] df^* \right\}, & A - (f_y + \Delta f/2)/k \leq x < A - (f_y - \Delta f/2)/k \\ -f_y, & -A \leq x < A - (f_y + \Delta f/2)/k \end{cases} \quad (11)$$

其积分结果为:

$$\bar{f}_{mac}(x) = \begin{cases} kx - kA + f_y, & A - (f_y - \Delta f/2)/k \leq x \leq A \\ \frac{k^2}{4\Delta f} x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{f_y}{\Delta f} - \frac{kA}{2\Delta f} \right) kx + \frac{k^2 A^2}{4\Delta f} + \frac{f_y^2}{\Delta f} + \frac{\Delta f}{4} - \frac{kA f_y}{\Delta f} - \frac{kA}{2}, & A - (f_y + \Delta f/2)/k \leq x < A - (f_y - \Delta f/2)/k \\ -f_y, & -A \leq x < A - (f_y + \Delta f/2)/k \end{cases} \quad (12)$$

可见, 在模型整体滑移运动中, 部分 Jenkins 单元滑移阶段对应模型恢复力亦为包含位移平方项的非线性函数。

1.3 恢复力函数归一化

前文推得的模型恢复力函数式(10)和式(12)参数较多, 表达较为繁琐, 现引入下面无量纲参数^[3]:

$$p = \frac{f}{f_y}, \quad q = \frac{kx}{f_y}, \quad Q = \frac{kA}{f_y}, \quad \beta = \frac{\Delta f}{2f_y} \quad (13)$$

其中: p 为归一化恢复力; q 为归一化位移; Q 为归一化位移幅值; β 为表示半带宽的参数。将这些参数分别代入式(10)和式(12), 便可得到模型在局部滑移运动和整体滑移运动中的归一化恢复力函数。

对于局部滑移, 归一化恢复力函数为:

$$\bar{p}_{mic}(q) = \begin{cases} q - \frac{(Q + \beta - 1)^2}{4\beta}, & Q - 2(1 - \beta) \leq q \leq Q \\ \frac{1}{8\beta} q^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta} - \frac{Q}{4\beta} \right) q - \frac{Q^2}{8\beta} + \frac{1}{4\beta} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2}, & -Q \leq q < Q - 2(1 - \beta) \end{cases} \quad (14)$$

对于整体滑移, 归一化后的恢复力函数为:

$$\bar{p}_{mac}(q) = \begin{cases} q - Q + 1, & Q - 2(1 - \beta) \leq q \leq Q \\ \frac{1}{8\beta} q^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta} - \frac{Q}{4\beta} \right) q + \frac{Q^2}{8\beta} - \frac{Q}{2\beta} - \frac{Q}{2} + \frac{1}{2\beta} + \frac{\beta}{2}, & Q - 2(1 + \beta) \leq q < Q - 2(1 - \beta) \\ -1, & -Q \leq q < Q - 2(1 + \beta) \end{cases} \quad (15)$$

可以看出, 式(14)、式(15)两右端仅含 3 个参数: q 、 Q 和 β ; 而归一化前恢复力函数式(10)和式(12)右端均含 5 个参数: x 、 A 、 Δf 、 f_y 和 k 。可见, 归一化处理减少了算式中参数数量, 方便于分析计算。

模型两类滑移运动下的迟滞环加载段所对应的归一化恢复力函数 $\bar{p}(q)$ 可由下式得到:

$$\bar{p}(q) = -\bar{p}(-q) \quad (16)$$

这样, 便得到了模型在两类滑移运动下的整个迟滞环对应的归一化恢复力函数。

一些文献研究表明, 用有限个 Jenkins 单元构成的 Iwan 模型足以描述螺栓连接结合面处的动力学行为。Sanliturk^[13]分别用由 3 个、7 个和 10 个 Jenkins 单元构成的 Iwan 模型的迟滞回线逼近理论摩擦阻尼器在整体滑移运动中的迟滞回线, 结果表明, 使用 10 个 Jenkins 单元的模型已经具有非常高的逼近精度, 并指出含有 7 个 Jenkins 单元模型便可满足实际需要。Oldfield^[14]建立了两长方块螺栓连接结构的细致的有限元模型, 将得到的有限元计算结果分别用由不同数量 Jenkins 单元构成的 Iwan 模型进行了重现, 结果表明, 从计算量和精度两方面考虑, 由 4 个单元构成的模型为最佳选择。

下面比较分别由 4 个、7 个以及无数个 Jenkins 单元构成的 Iwan 模型在归一化位移 $q(t) = Q \cos t$ 激励下各自的恢复力响应时域曲线和迟滞环形状。取 $\beta=0.9$ 、 $Q=1.5$, 且每个模型中的 Jenkins 单元屈服位移(单元屈服力与单元刚度的比值)均服从均匀分布。图 5 和图 6 分别为这 3 个模型在局部滑移运动下恢复力时程图和迟滞环。

从图 5 和图 6 中的比较可以看出, Iwan 模型中单元数量越多, 得到的恢复力-时程曲线和迟滞环均越光滑, 即模型精度越高。对于由有限个单元构成的 Iwan 模型, 模型恢复力由式(1)计算得到, 当模型中单元数量为 N 时, 式(1)的分段个数为 $N+1$ 。因此, 增加单元数目, 会使得恢复力函数形式变得复

杂，同时也增加了计算量；而对于连续 Iwan 模型，不仅具有最高的精度，其恢复力函数式仅由两段或三段构成，与前者相比，表示形式简单。特别地，若取 $\beta=1$ ，恢复力函数式会更加简单。

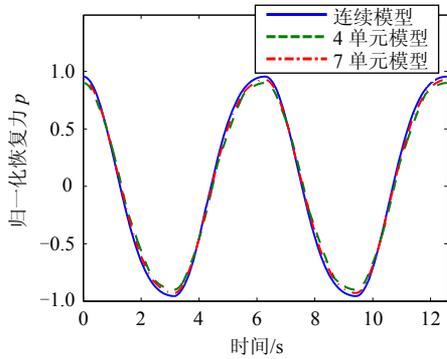


图 5 归一化恢复力时间历程

Fig.5 The time history of the normalized restoring force

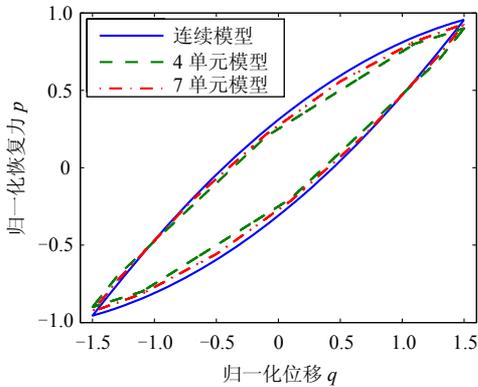


图 6 3 个模型的迟滞环比较

Fig.6 Comparison of hysteresis loops of the three models

2 Iwan 模型周期能量耗散计算

在 Iwan 模型周期运动中，模型每个周期耗散的能量等于迟滞环曲线所围面积，记为 ΔE ，由下式计算得到：

$$\Delta E = \int_{-A}^A [\bar{f}(x) - \bar{f}(-x)] dx \quad (17)$$

结合式(4)，得到：

$$\Delta E = - \int_{-A}^A [\bar{f}(x) + \bar{f}(-x)] dx \quad (18)$$

引入归一化周期能量耗散变量 D ：

$$D = \frac{k}{f_y^2} \Delta E \quad (19)$$

将式(18)代入式(19)，并引入式(13)变换，可得：

$$D = - \int_{-Q}^Q [\bar{p}(q) + \bar{p}(-q)] dq \quad (20)$$

将式(14)代入式(20)，经过积分得到模型在局部滑移运动中每个周期的归一化能量耗散值为：

$$D_{mic} = \frac{1}{3\beta} [Q^3 - 3(1-\beta)^2 Q + 2(1-\beta)^3] \quad (21)$$

可见，模型在局部滑移运动中每个周期耗散的能量和位移幅值存在立方非线性关系。特别地，当 $\beta=1$ 时，模型归一化周期能量耗散值为：

$$D_{mic} = \frac{Q^3}{3} \quad (22)$$

这种情况下，模型周期能量耗散值与位移幅值的三次方成正比。

同样，将式(15)代入式(20)积分后得到模型在整体滑移运动中归一化周期能量耗散值为：

$$D_{mac} = 4 \left(Q - 1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \quad (23)$$

可见，模型整体滑移时，其周期能量耗散值和位移幅值呈线性关系。考虑到模型局部滑移时 $1-\beta < Q \leq 1+\beta$ ，整体滑移时 $Q > 1+\beta$ ，因而：

$$0 < D_{mic} \leq \frac{4\beta}{3}(3-\beta) < D_{mac} \quad (24)$$

图 7 为当 β 取不同值时模型归一化的周期能量耗散值随位移-幅值变化关系曲线。这些曲线的形状与 Gaul^[15]的实验得到的周期能量耗散值与位移幅值关系曲线形状是一致的。

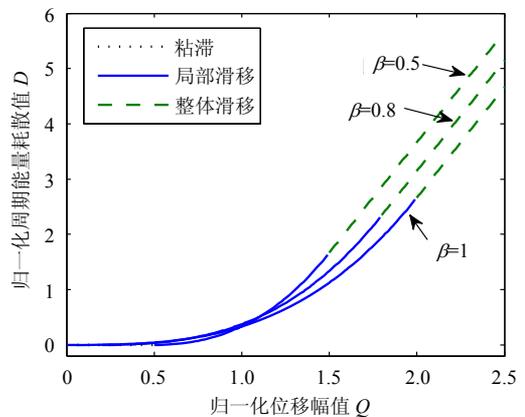


图 7 归一化周期能量耗散曲线

Fig.7 Normalized energy dissipation curves per cycle

3 修正 Iwan 模型研究

由前文分析知，纯滑移下，Iwan 模型的刚度衰减为零，而 Gaul 的实验结果^[15]表明，当螺栓连接结合面完全滑移时，依然存在部分残余刚度。针对此问题，Song 等^[16]在 Iwan 模型的基础上，并联了一个弹簧单元 k_a ，并将模型中每个 Jenkins 单元的刚度调至 $(k-k_a)/N$ ，从而得到了“修正 Iwan 模型”，图 8(a)为该模型示意图。显然，当修正 Iwan

模型发生纯滑移时, 依然存在刚度 k_a , 其迟滞环形状如图 8(b)中实线部分所示, 与原 Iwan 模型的迟滞环形状(图 8(b)中用虚线表示的迟滞环, 为 $k_a=0$ 时结果)相比, 其更符合 Gual 的实验结果^[15-16]。

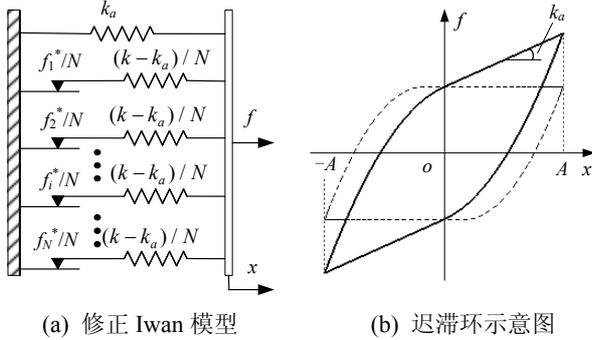


图 8 修正 Iwan 模型及其迟滞环示意图

Fig.8 Sketch map of adjusted Iwan model and its hysteresis loop

设并联弹簧单元的刚度与修正 Iwan 模型在粘滞状态下的总刚度的比值为:

$$\alpha = \frac{k_a}{k} \quad (25)$$

可见, Iwan 模型可看做修正 Iwan 模型在 $\alpha = 0$ 时的特殊形式。在粘滞状态下, 修正 Iwan 模型中 Iwan 模型部分的刚度为:

$$k_r = (1 - \alpha)k \quad (26)$$

不难得到, 局部滑移与整体滑移运动中, 修正 Iwan 模型的恢复力函数可统一表示为:

$$\bar{f}_{adjusted}(x) = \bar{f}(k_r, x) + k_a x \quad (27)$$

其中: 上标“ $\bar{\quad}$ ”表示加载过程和卸载过程; $\bar{f}(k_r, x)$ 为修正 Iwan 模型中 Iwan 模型部分在两类滑移运动中的恢复力函数, 可将 Iwan 模型的恢复力函数 $\bar{f}(x)$ 计算式中的 k 替换为 k_r 得到。

结合式(17), 容易求得在幅值为 A 的周期位移激励下, 修正 Iwan 模型每个周期的能量耗散值为:

$$\begin{aligned} \Delta E_{adjusted} &= \int_{-A}^A [\bar{f}_{adjusted}(x) - \bar{f}_{adjusted}(x)] dx = \\ &= \int_{-A}^A \{\bar{f}(k_r, x) + k_a x - [\bar{f}(k_r, x) + k_a x]\} dx = \\ &= \int_{-A}^A [\bar{f}(k_r, x) - \bar{f}(k_r, x)] dx \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)表明, 修正 Iwan 模型周期运动过程中所耗散的能量均由 Iwan 模型部分产生, 这是显而易见的, 因为弹簧单元不是耗能原件, 在运动过程中并不会产生能量耗散。

对 x 、 A 进行如下归一化处理:

$$q_r = \frac{k_r x}{f_y} = (1 - \alpha)q, \quad Q_r = \frac{k_r A}{f_y} = (1 - \alpha)Q \quad (29)$$

同时, 用式(19)对 $\Delta E_{adjusted}$ 归一化后得到修正 Iwan 模型的归一化周期能量耗散值 $D_{adjusted}$ 。

$$\text{当 } 1 - \beta < Q_r < 1 + \beta, \text{ 即 } \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} < Q < \frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \text{ 时,}$$

修正 Iwan 模型将产生局部滑移, 其归一化周期能量耗散值为:

$$D_{adjusted, mic} = \frac{1 - \alpha}{3\beta} [Q_r^3 - 3(1 - \beta)^2 Q_r + 2(1 - \beta)^3] \quad (30)$$

$$\text{当 } Q_r > 1 + \beta, \text{ 即 } Q > \frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \text{ 时, 修正 Iwan 模型}$$

将产生整体滑移, 易得:

$$D_{adjusted, mac} = 4(1 - \alpha) \left(Q_r - 1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \quad (31)$$

由式(30)和式(31)并结合式(29)不难发现, 修正 Iwan 模型的周期能量耗散值随 α 的增大而减小。一般来说, α 的取值范围为 $0 < \alpha < 1$, 因此:

$$D_{adjusted, mic} - D_{mic} <$$

$$\frac{1}{3\beta} [Q_r^3 - Q^3 - 3(1 - \beta)^2 (Q_r - Q)] =$$

$$\frac{1}{3\beta} (Q_r - Q) [Q_r^2 + Q_r Q + Q^2 - 3(1 - \beta)^2] < 0 \quad (32)$$

比较式(31)与式(23), 可明显看出当两模型均处于整体滑移时:

$$D_{adjusted, mac} < D_{mac} \quad (33)$$

另外, 在相同幅值的周期位移激励下, 两种模型所处的运动状态还可能不同, 这里存在两种情况: 当 Q 处于区间 $\left(1 - \beta, \frac{1 + \beta}{1 - \alpha}\right)$ 时, Iwan 模型处

于滑移状态而修正 Iwan 模型处于粘滞状态; 当 Q 处于区间 $\left(1 + \beta, \frac{1 + \beta}{1 - \alpha}\right)$ 时, Iwan 模型处于整体滑移

状态而修正 Iwan 模型处于局部滑移状态。很明显, 在这两种情况下, 修正 Iwan 模型的周期能量耗散值均小于 Iwan 模型。因此, 当两模型受到相同幅值的位移激励时, 修正 Iwan 模型每个周期耗散的能量总是小于 Iwan 模型。

4 结论

在 Iwan 工作的基础上, 对 Iwan 模型的恢复力积分式做了进一步推导, 得到了当组成 Iwan 模型

的 Jenkins 单元屈服力服从均匀分布时, 模型在局部滑移和整体滑移运动中描述模型恢复力的非线性分段函数, 与包含有限个 Jenkins 单元的 Iwan 模型的恢复力计算式相比, 文中所得的表达式更为精确简单, 且便于计算模型周期能量耗散值。

推导了 Iwan 模型归一化周期能量耗散值的计算公式。得到的归一化的周期能量值耗散随位移幅值变化的曲线与文献[15]中的实验结果一致。对修正 Iwan 模型的研究表明, 在相同幅值的周期位移激励下, 修正 Iwan 模型的归一化周期能量耗散值总是小于 Iwan 模型。

本文研究结果为研究装配结构的结构阻尼和研究此类结构的动力学行为奠定了基础。

参考文献:

- [1] Beards C F. Damping in structural joints [J]. *Shock and Vibration Digest*, 1985, 17(11): 17—20.
- [2] Ibrahim R, Pettit C. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279(3/4/5): 857—936.
- [3] Iwan W D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response [J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1966, 33(4): 893—900.
- [4] Iwan W D. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1967, 34(3): 612—617.
- [5] Valanis K C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory [J]. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1980, 32(2): 171—191.
- [6] Bouc R. Forced vibration of mechanical system with hysteresis [C]. *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations*, Prague, Czechoslovakia, 1967.
- [7] Wen Y K. Method of random vibration of hysteretic systems [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 1976, 102(2): 249—263.
- [8] Segalman D J. Observations on simulation of joint friction [C]. *Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conference*, Las Vegas, USA, 1999.
- [9] Segalman D J. An Initial Overview of Iwan Modeling for Mechanical Joints [R]. *Technical Report SAND2001-0811*, Sandia National Laboratories, New Mexico, USA, 2001.
- [10] Segalman D J. A four-parameter Iwan model for lap-type joints [J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 2005, 72(5): 752—760.
- [11] Ouyang H, Oldfield M J, Mottershead J E. Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(12): 1447—1455.
- [12] Segalman D J. Modelling joint friction in structural dynamics [J]. *Structural Control & Health Monitoring*, 2006, 13(1): 430—453
- [13] Sanliturk K Y, Ewins D J. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 193(2): 511—523.
- [14] Oldfield M, Ouyang H, Mottershead J E. Simplified models of bolted joints under harmonic loading [J]. *Computers & Structures*, 2005, 84(1/2): 25—33.
- [15] Gaul L, Lenz J. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints [J]. *Acta Mechanica*, 1997, 125(1/2/3/4): 169—181.
- [16] Song Y, Hartwigsen C J, McFarland D M, et al. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273(1/2): 249—276.