

文章编号: 1000-4750(2012)08-0008-06

# 无网格 MLPG 法求解轴对称弹性力学问题

杨建军, 郑健龙

(长沙理工大学道路结构与材料交通行业重点实验室, 湖南, 长沙 410076)

**摘 要:** 为了解决实际应用中复杂轴对称弹性力学问题的求解困难, 对无网格局部彼得洛夫-伽辽金法(MLPG)应用于此类问题进行了研究, 并发展了相应的计算方法。通过一些数值算例, 对所提方法进行了检验。结果表明: 建议的方法对轴对称弹性力学问题表现为较好的适应性, 而且能达到较为满意的计算精度。

**关键词:** 无网格局部彼得洛夫-伽辽金法(MLPG); 轴对称问题; 弹性力学; 数值解; 无网格法

中图分类号: O241; O343 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.10.0775

## ANALYSIS OF AXISYMMETRIC ELASTICITY PROBLEMS USING THE MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN METHOD

YANG Jian-jun, ZHENG Jian-long

(Key Laboratory of Road Structure and Material of Ministry of Transport, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410076, China)

**Abstract:** In order to overcome the practical difficulty of solving complex axisymmetric elasticity problems, the application of the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method to solve the problems was studied, and the numerical method with the adaptive faculty was proposed. In the end, through several numerical examples, the present method was tested. The results show that the proposed method is available and effective to solve such problems, and the numerical solutions are also satisfactory.

**Key words:** the meshless local Petrov-Galerkin method (MLPG); axisymmetric problems; elasticity mechanics; numerical solutions; meshless method

无网格法是一类新兴的数值分析方法, 该类方法无需网格的初始划分, 可有效克服一些实际应用中问题域离散的困难, 尤其在自适应分析、大变形、结构动态分解、微细观尺度问题中体现出其独特的优越性, 具有广阔的应用前景<sup>[1-4]</sup>。现有的无网格方法中, Atluri 等人提出的无网格局部彼得洛夫-伽辽金法(Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 简称 MLPG), 凭借其良好的计算稳定性和收敛性, 受到学界普遍关注, 是一种重要而应用广泛的无网格法<sup>[5-8]</sup>。

轴对称问题在工程实际中应用非常广泛, 许多工程问题具有轴对称特性, 或者可转换成轴对称问题处理。轴对称弹性力学问题在经典弹性解析力学中已有成熟的研究<sup>[9]</sup>, 然而解析法仅对典型结构和

简单受力问题有效, 对实际应用中面临的复杂问题通常不适应, 或者存在求解困难。数值方法的优势在于其具有强适应性, 对控制方程给定的一类场问题, 通常均可进行近似计算。因此, 数值方法与工程力学的结合研究具有一定的应用价值。近年来, 学界对无网格法应用于求解轴对称性问题进行了研究, 并相继取得一些进展<sup>[10-13]</sup>。本文对 MLPG 法应用于轴对称弹性非典型或复杂问题做了进一步研究, 对其一般适应性进行了检验和讨论。

## 1 轴对称弹性力学问题

### 1.1 系统控制方程

轴对称问题通常采用柱坐标系, 微元体的空间位置可用  $r$ 、 $z$ 、 $\theta$  三个坐标分量表述, 其中  $z$  轴

收稿日期: 2010-10-25; 修改日期: 2011-04-09

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51038002); 湖南省科技计划项目(2010FJ6023); 道路结构与材料交通行业重点实验室(长沙)开放基金项目(kfj100201)

通讯作者: 杨建军(1975—), 男, 山西忻州人, 博士生, 从事道路工程及计算力学应用研究(E-mail: yangjianjun01@126.com)。

作者简介: 郑健龙(1954—), 男, 湖南邵东人, 教授, 博士, 博导, 从事固体力学及道路工程研究(E-mail: zjl@csust.edu.cn)。

为对称轴，为如图 1 所示。

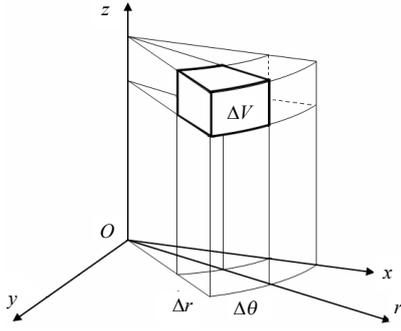


图 1 柱坐标系

Fig.1 Cylindrical coordinates system

轴对称体系的位移向量、应力向量、应变向量分别为：

$$\mathbf{u} = [u_r, u_z]^T \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}]^T \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}]^T \quad (3)$$

应变-位移的几何关系为：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{u_r}{r}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^T \quad (4)$$

式中，广义变分算子  $\mathbf{L}$  写为：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 1/r & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

对于弹性问题，应力-应变本构关系为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

式中， $\mathbf{D}$  为材料常数矩阵，表示为：

$$\mathbf{D} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中：

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{1-\mu} \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \quad (9)$$

$$\lambda_3 = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (10)$$

在轴对称弹性力学问题的轴对称面域  $\Omega$  上， $\Gamma_t$  和  $\Gamma_u$  分别表示问题域的自然边界和本质边界。

则问题的平衡方程及其边界条件为：

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (13)$$

式中： $\mathbf{b}$  为体力向量； $\mathbf{n}$  为边界外法线向量； $\bar{\mathbf{t}}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$  分别为给定的表面力和位移边界条件。其中广义微分算子  $\nabla$  写为：

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 1.2 控制方程适用条件

由以上控制方程的推定可知，该控制方程仅适用于一类特定问题，即作用在问题域上的力向量  $\mathbf{F}$  (包含外力与内力) 在对称面内，即  $\mathbf{F} \in \text{span}(z, r)$ ，如图 2 所示。实际上还有一类轴对称问题，上述控制方程并不适用，即轴对称体扭转问题，其力向量与  $\text{span}(z, r)$  正交，即  $\mathbf{F} \perp \text{span}(z, r)$ ，该问题非本文研究对象。

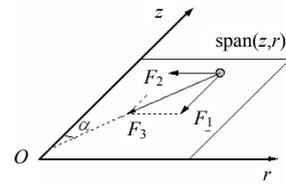


图 2 力向量定义

Fig.2 Definition of force vector

图 2 中， $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$  力向量对应于两种轴对称基本问题。其中  $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{z}$ ，可定义为轴对称轴向矢量问题，即轴对称弯曲问题。而  $\mathbf{F}_2 \parallel \mathbf{r}$ ，可定义为轴对称径向矢量问题，即轴对称伸缩问题。而  $\mathbf{F}_3 \mathbf{R}\mathbf{z} = \alpha$ ，其中  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ，为  $\mathbf{F} \in \text{span}(z, r)$  的普适问题。可理解为上述两种基本问题的耦合， $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$  是其特例形式。

## 2 轴对称弹性力学问题 MLPG 法

### 2.1 MLPG 法简述

定义在域为  $\Omega$  的力学问题，MLPG 法的有关力学参数定义如图 3 所示。

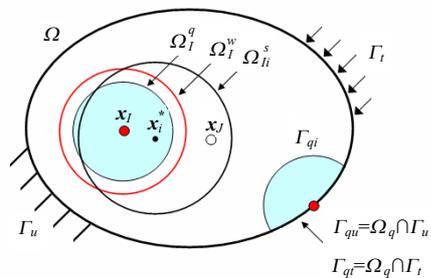


图 3 MLPG 法图解

Fig.3 Schematics of the MLPG method

图 3 中场节点  $\mathbf{x}_i$  为计算节点， $\Omega_i^q$  为  $\mathbf{x}_i$  的局部积分域， $\Omega_i^w$  为  $\mathbf{x}_i$  的权函数域， $\mathbf{x}_i^*$  为局部积分域

内的任一积分点,  $\Omega_i^s$  为  $\mathbf{x}_i^*$  的影响域,  $\mathbf{x}_j$  为该影响域内任一场节点。关于局部积分域  $\Omega_j^q$  的边界定义图中已给定。

MLPG 法的系统方程由局部加权残量法弱形式建立, 对场节点  $\mathbf{x}_j$  的初始方程形式为:

$$\int_{\Omega_q} W_j (\nabla \sigma_j + \mathbf{b}_j) d\Omega = 0 \quad (15)$$

移动最小二乘近似 (Moving least square approximation, MLS) 是无网格法中广泛采用的形函数构造方法, 其标量函数近似公式写为:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_J \hat{u}_J = \sum_{J=1}^n \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_J = \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (16)$$

式中,  $\Phi(\mathbf{x})$  即为 MLS 形函数, 其它符号定义可参考有关文献<sup>[5-6,14]</sup>, 此处不予赘述。

由式(4)及式(16)代入式(6), 有:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{D}\mathbf{L}\Phi\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (17)$$

由式(17)可知  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi$ 。

## 2.2 离散系统方程导出

由式(15)应用散度定理可导出如下关于场节点  $\mathbf{x}_j$  的离散系统方程一般形式:

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{qt}} W_{I,j} n_j \sigma_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} W_I \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I b_i d\Omega \quad (18)$$

将式(17)代入式(18), 并写成矩阵形式离散系统刚度方程:

$$\mathbf{K}_I \mathbf{u}_I = \mathbf{f}_I \quad (19)$$

其中:

$$\mathbf{K}_I = \int_{\Omega_q} V_I \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_{qt}} W_I n \mathbf{D}\mathbf{B} d\Gamma \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_{qt}} W_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I \mathbf{b} d\Omega \quad (21)$$

式(20)、式(21)中各矩阵向量符号对应于轴对称问题, 有如下特征计算格式:

$$W_I = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}_{li} \quad (22)$$

$$V_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} & \frac{w}{r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \end{bmatrix}_{li} \quad (23)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}_I \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} & \frac{\phi}{r} & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{bmatrix}_{IJ}^T \quad (25)$$

## 2.3 边界条件处理

在 MLPG 法中, 系统方程是按节点逐一建立的, 每个场节点的刚度矩阵和力向量对应于总体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  和总体力向量  $\mathbf{f}$  中的两行, 鉴于 MLPG 系统方程的这一特性, 直接法很容易对其施加本质边界条件, 只需根据给出的本质边界条件, 直接修改总体刚度矩阵和总体力向量中本质边界上节点  $\mathbf{x}_j$  对应行的元素即可, 其执行过程表示为:

$$\mathbf{K}_{IJ} \Rightarrow \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}_{IJ}, \quad J=1, 2, \dots, n \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_I \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_I \quad (27)$$

## 3 数值算例

根据本文提出方法, 借助作者编写的 AP-MLPG 程序, 进行数值分析计算。下面将给出 4 个算例, 其中 3.1 算例和 3.2 算例可作为本文方法的校验算例, 3.3 算例和 3.4 算例为一般演示算例。

### 3.1 受均布荷载作用的圆板

考虑一周边简支圆板问题, 如图 4 所示。

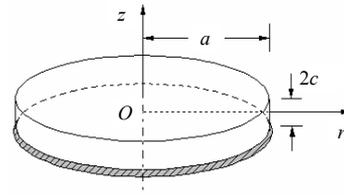


图 4 圆板

Fig.4 Circular plate

圆板上表面施加集度为  $q$ , 指向  $z$  轴负方向的轴向均布荷载。计算参数取值为:  $a=0.2\text{m}$ ,  $2c=0.012\text{m}$ , 圆板弹性模量  $E=7.0 \times 10^4 \text{MPa}$ , 泊松比  $\mu=0.33$ , 荷载集度  $q=-10^5 \text{Pa}$ 。

考察该问题的挠度变形及板底弯拉应力, 并有如下解析解<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} u_z = \frac{3q(1-\mu^2)}{128Ec^3} \left[ r^4 - \frac{3+\mu}{1+\mu} 2a^2 r^2 + \frac{5+\mu}{1+\mu} a^4 \right] \\ \sigma_r = q \left[ \frac{2+\mu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\mu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\mu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+\mu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \end{cases} \quad (28)$$

问题的数值解与解析解比较如图 5 所示。

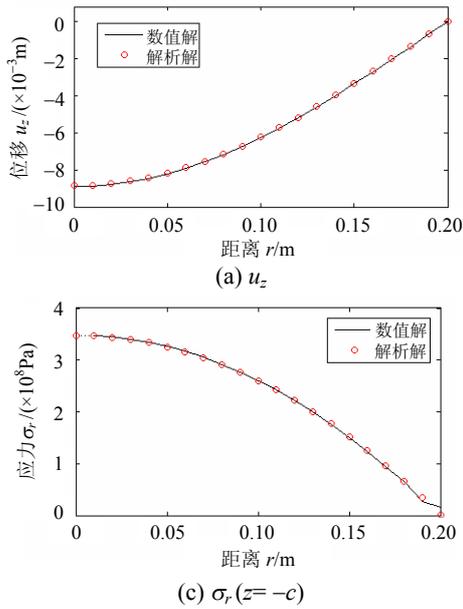


图 5 圆板问题的解

Fig.5 Solutions of the circular plate problem

### 3.2 受局部荷载作用的半空间无限体

考虑一受轴向荷载作用的半空间无限体，均有荷载  $q(r)$  作用在以  $O$  为圆心，半径为  $a$  的表面圆形局部域  $\Omega_L$  上，该问题为 Boussinesq 问题推广形式，如图 6 所示。

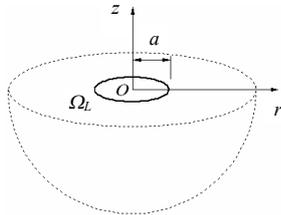


图 6 半空间无限体

Fig.6 Semi-infinite body

取  $R = \sqrt{r^2 + z^2} = 0.9\text{m}$  有限结构近似计算(周边固支)。计算参数取值为： $a=0.15\text{m}$ ， $q(r)=0.3537\text{MPa}$ ，空间体弹性模量  $E=40\text{MPa}$ ，泊松比  $\mu=0.32$ 。

考察该问题顶面挠度变形及深度  $0.1\text{m}$  处的压应力分布，问题有如下特征解析解<sup>[9,15]</sup>：

$$\begin{cases} (u_z)_{r=0} = \frac{2a(1-\mu^2)q}{E} \\ (u_z)_{r=a} = \frac{4a(1-\mu^2)q}{\pi E} \\ (\sigma_z)_{r=0} = q \left[ 1 + \frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}} \right] \end{cases} \quad (29)$$

问题的数值解与特征解比较如图 7 所示。

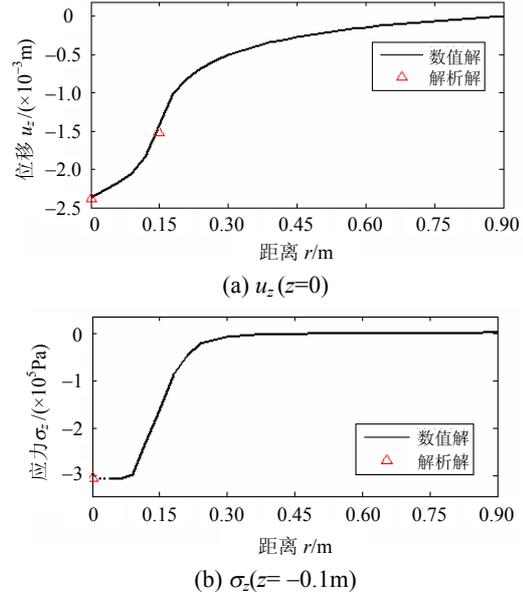


图 7 半空间无限体问题的解

Fig.7 Solutions of the semi-infinite body problem

### 3.3 受非线性荷载作用的圆轴体

考虑一底部及周侧固支的圆轴体，如图 8 所示。

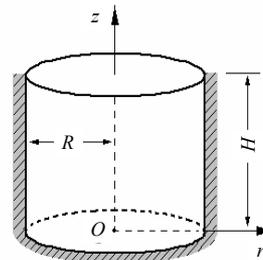


图 8 圆轴体

Fig.8 Shaft body

在其顶面  $r \in [0, a]$  ( $0 \leq a \leq R$ ) 的圆域上施加指向  $z$  轴负方向的轴向非线性分布荷载，由图 9 定义。计算参数取值为： $R=0.2\text{m}$ ， $H=0.2\text{m}$ ， $a=0.1\text{m}$ ，轴体弹性模量  $E=1600\text{MPa}$ ，泊松比  $\mu=0.28$ 。

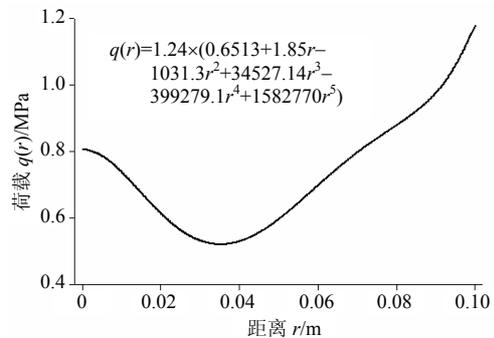


图 9 给定非线性分布荷载

Fig.9 Defined nonlinear distribution load

考察该问题顶面径向变形、挠度变形及深度  $0.06\text{m}$  处的剪切应力分布，其数值解如图 10 所示。

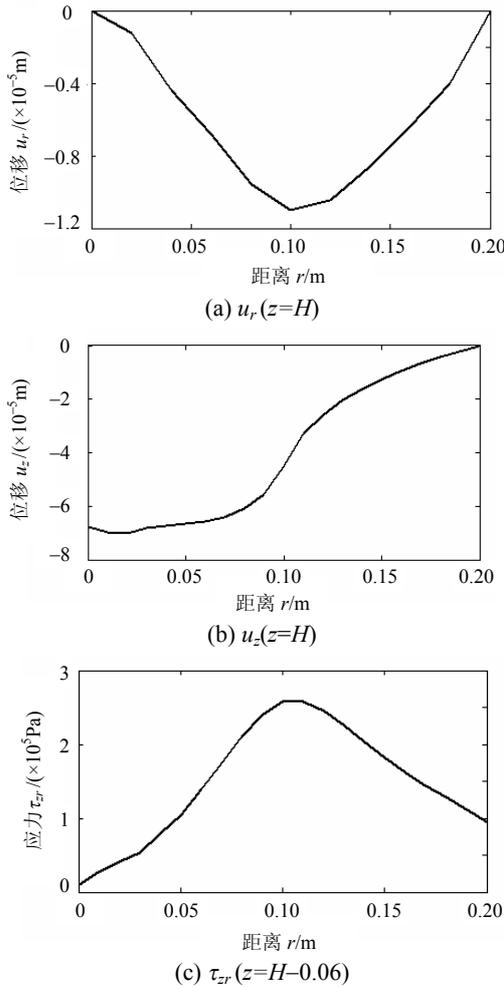


图 10 圆轴体问题的数值解

Fig.10 Numerical solutions of the shaft body problem

### 3.4 受耦合力作用的厚壁圆筒

考虑一周侧(外壁)固支的厚壁圆筒,如图 11 所示。在其顶面( $r \in [R_1, R]$ )施加集度为  $q_1$ , 指向  $z$  轴负方向的均布荷载;在圆筒内壁( $z \in [0, H]$ )施加集度为  $q_2$ , 指向  $r$  轴外向的均布荷载。计算参数取值为:  $R=0.2\text{m}$ ,  $R_1=0.1\text{m}$ ,  $H=0.1\text{m}$ ,  $q_1=0.7\text{MPa}$ ,  $q_2=0.4\text{MPa}$ , 筒体弹性模量  $E=1600\text{MPa}$ , 泊松比  $\mu=0.28$ 。

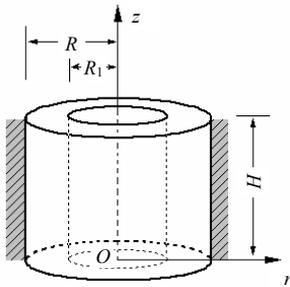


图 11 厚壁圆筒  
Fig.11 Hollow shaft

考察该问题的位移及各应力分量在对称面(由图 11 中坐标系( $r, z$ )定义的筒体平面)上的分布,数值解等值线图如图 12 所示。

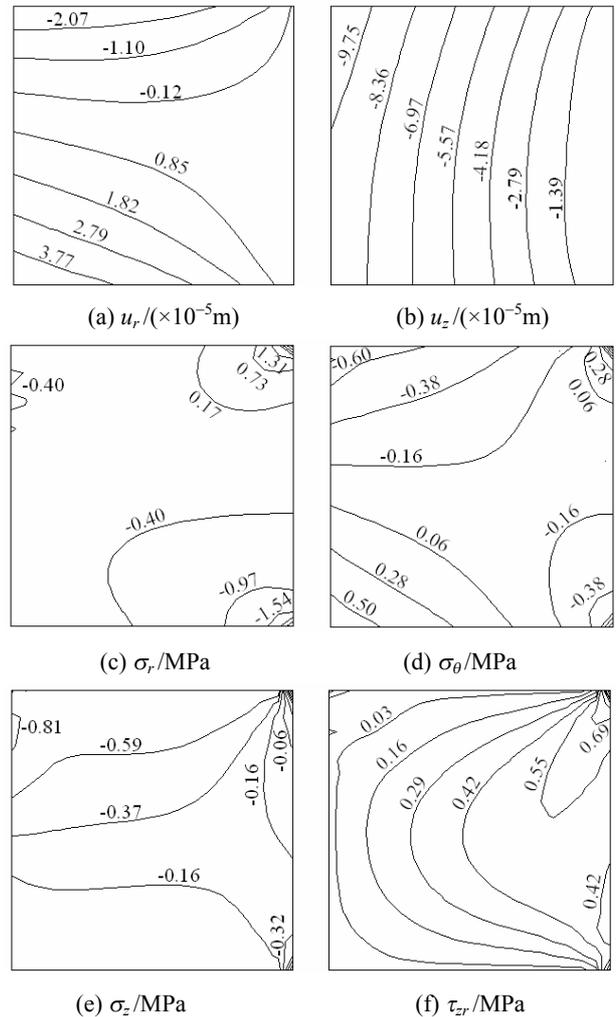


图 12 厚壁圆筒问题的数值解

Fig.12 Numerical solutions of the hollow shaft body problem

## 4 结论

使用本文给出的轴对称问题 MLPG 法对经典力学问题计算,如算例 3.1、算例 3.2,数值解与解析解吻合,表明本文方法数值解能达到理想的计算精度。对算例 3.2,解析法仅给定特征解(对称轴上),而数值方法可在全域内求解。对其它复杂受力或非典型结构问题,如算例 3.3、算例 3.4,本文方法也表现为良好的适应性,而且作者在计算时采用了稀疏不同的节点离散方案进行比较计算,计算结果表现为良好的一致性,可以说本文方法的解具有一般意义上的可信度。

如果对称轴包含于问题域内,则对称轴上的应力计算结果应特殊处理。原因在于轴对称问题基本

方程和控制方程中均包含“ $1/r$ ”运算,数值方法中为了保证计算可执行,需要使用极小数代替实际意义上的“ $r=0$ ”。这种近似处理对求解结果的影响是事先无法估计的,因此,对称轴上的计算结果置信度低。一种简单的处理办法为:对称轴上的应力计算结果使用邻节点计算值替代。

本文仅给出了轴对称问题的 MLPG 法弹性静力学公式,对于材料非线性问题、动力学问题可在此基础上进一步扩展,而且也容易实现。至于数值方法对这些扩展问题的适应性,则有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless method: An overview and recent developments [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 3—47.
- [2] Li Shaofan, Liu Wing Kam. Meshfree and particle methods and their applications [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(1): 1—34.
- [3] 顾元通, 丁桦. 无网格法及其最新进展[J]. *力学进展*, 2005, 35(3): 323—337.  
Gu Yuantong, Ding Hua. Recent developments of meshless method [J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(3): 323—337. (in Chinese)
- [4] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. *力学进展*, 2009, 39(1): 1—36.  
Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree methods and their applications [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1—36. (in Chinese)
- [5] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 22: 117—127.
- [6] Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations [J]. *Computational Mechanics*, 1999, 24: 334—347.
- [7] 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. *力学学报*, 2001, 33(4): 508—517.  
Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin method for the elasticity problem [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(4): 508—517. (in Chinese)
- [8] Liu G R, Gu Y T. A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analyses of 2-D solids [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246(1): 29—46.
- [9] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of elasticity* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 380—388.
- [10] 何沛祥, 李子然, 吴长春. 轴对称问题中的无网格 Galerkin 法[J]. *中国科学技术大学学报*, 2003, 33(3): 318—323.  
He Peixiang, Li Ziran, Wu Changchun. Element-free Galerkin method for axi-symmetric solids [J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2003, 33(3): 318—323. (in Chinese)
- [11] 陈建桥, 梁元博, 丁亮. 无网格局部 Petrov-Galerkin 法求解轴对称问题[J]. *华中科技大学学报(城市科学版)*, 2007, 24(4): 9—12.  
Chen Jianqiao, Liang Yuanbo, Ding Liang. Numerical analysis of axisymmetric problems by MLPG [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Urban Science Edition)*, 2007, 24(4): 9—12. (in Chinese)
- [12] 韩治, 杨海天, 王斌. 无网格伽辽金法求解轴对称问题[J]. *工程力学*, 2005, 22(5): 64—68.  
Han Zhi, Yang Haitian, Wang Bin. Solving axisymmetric problems via EFGM [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(5): 64—68. (in Chinese)
- [13] Fatima-Zohra Louai, Nasreddine Nait-Said, Said Drid. Numerical analysis of electromagnetic axisymmetric problems using element free galerkin method [J]. *Journal of Electrical Engineering*, 2006, 57(2): 99—104.
- [14] 杨建军, 郑健龙. 移动最小二乘形函数插值精度[J]. *长沙理工大学学报(自然科学版)*, 2009, 6(2): 67—72.  
Yang Jianjun, Zheng Jianlong. Interpolation accuracy of moving least square shape function [J]. *Journal of Changsha University of Science and Technology (Natural Science)*, 2009, 6(2): 67—72. (in Chinese)
- [15] 徐秉业, 王建学. *弹性力学* [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 152—155.  
Xu Bingye, Wang Jianxue. *Elasticity* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 152—155. (in Chinese)