

文章编号: 1000-4750(2011)02-0193-05

体外预应力钢-混凝土组合连续梁自振频率分析

*焦春节¹, 丁洁民²

(1. 同济大学建筑工程系, 上海 200092; 2. 同济大学建筑设计研究院(集团)有限公司, 上海 200092)

摘 要: 为研究预应力组合连续梁的自振频率, 建立双折线型体外预应力钢-混凝土组合两跨连续梁振动特性的分析模型, 并在 Ayaho Miyamoto 的基础上, 推导出双折线型体外预应力组合连续梁振动方程。通过对振动方程进行拉普拉斯变换, 得到了连续梁在对称振型和反对称振型下的全部频率计算公式, 分析了等效轴向力对组合连续梁频率的影响规律。和现有的预应力组合连续梁的动力试验和有限元结果进行了比较分析, 公式计算的组合梁基频结果与前两者吻合较好, 理论公式所反映的预加力对频率的影响规律与有限元一致。所得公式可以用来计算体外预应力钢-混凝土组合连续梁的自振频率。

关键词: 体外预应力; 自振频率; 动力性能; 频率方程; 连续梁

中图分类号: TU398⁺.9; TU311.3 **文献标识码:** A

ANALYSIS OF NATURAL FREQUENCY OF PRESTRESSED COMPOSITE BEAM WITH EXTERNAL TENDONS

*JIAO Chun-jie¹, DING Jie-min²

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 20092, China;

2. Architectural Design and Research Institute of Tongji University (Group) Co. Ltd, Shanghai 200092, China)

Abstract: In order to investigate the natural frequency of a prestressed composite beam, an analytical model of a prestressed steel-concrete composite continuous beam is formulated. Based on the formula presented by Ayaho Miyamoto, the formulas for natural frequency of a double broken line prestressed composite continuous beam with external tendons are derived. The all natural frequency formulas for the continuous beam is derived through Laplace transform, meanwhile, the influence rule of the composite continuous beam due to an equivalent axial force is analyzed. The results of the formulas are compared with existing tests and FEA results, and the first calculated frequency of the continuous beam is consistent with the other results. Meanwhile, the influence rule of the theoretic formulas on the composite continuous beam due to the equivalent axial force is consistent with FEA. The natural frequency of a prestressed composite beam with external tendons can be calculated by the derived formula.

Key words: prestressed with external tendons; natural frequency; dynamic behavior; frequency equation; continuous beam

预应力结构由于其独特的优点, 国内外对其进行了广泛探讨和深入的研究。近年来, 国内外对其动力性能进行了探索研究, 并取得了一些成果。Ayaho Miyamoto 等给出双折线布置下的体外预应

力钢-混凝土组合梁在两端简支条件下的梁自振频率计算公式, 并进行了试验验证^[1]。熊学玉等在文献[1]的基础上, 得到了单折线型、双折线型和直线型体外预应力混凝土简支梁的自振频率计算公

收稿日期: 2009-07-10; 修改日期: 2009-12-03

作者简介: *焦春节(1982—), 男, 山东金乡人, 博士生, 从事结构工程研究(E-mail: danian1630@126.com);

丁洁民(1957—), 男, 江苏泰兴人, 教授, 工学博士, 博导, 从事结构工程研究(E-mail: djm@tjadri.com).

式^[2]。张耀庭等进行了体外预应力简支梁的试验，并采用摄动法得到理论结果和试验进行了对比^[3]。熊辉霞等通过试验对文献[2]的计算公式进行了修正，得到和试验吻合较好的结果^[4]。王佳伟等在文献[1]的基础上，得到了曲线型布索的预应力简支钢箱梁自振频率的计算公式，并通过有限元分析对公式进行了验证^[5]。

但预应力超静定结构动力性能的研究在国内外开展较少。王常雷通过一根两跨钢-混凝土组合梁的试验和有限元分析，研究了预应力超静定结构的振动特性，但并没有从理论上得到如上述简支梁自振频率的理论计算公式^[6]。下面在文献[1]基础上，推导得到了在等效轴向力作用下预应力连续梁横向振动方程。这一方程在分析中大多采用能量法、迭代法和传递矩阵等方法来近似研究，经典动力学教材没有给出解析解。在文献[7-10]基础上，给出了两等跨预应力组合连续梁的自振频率计算公式。

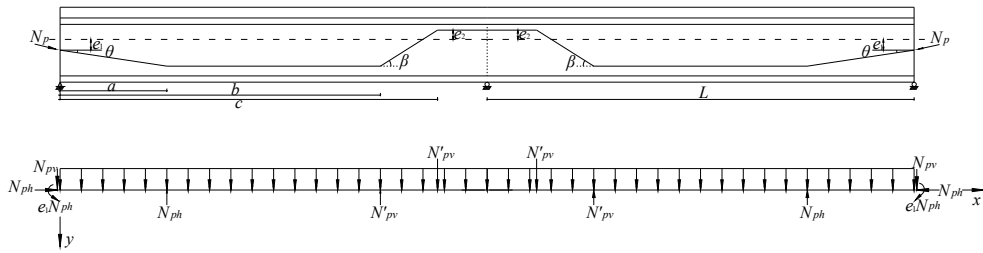


图 1 预应力钢-混凝土组合连续梁及其受力图

Fig.1 The model of prestressed steel-concrete composite continuous beam and its bearing

梁在预加力作用下的弯曲振动方程可表示为下式^[1]：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_p y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

式中： EI 为预应力组合梁的弯曲刚度； y 为振动位移； x 为沿梁轴从坐标原点到所考察截面的距离； m 为梁单位长度质量； t 为时间。

将式(1)代入式(2)可得：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(N_{ph}^o + \Delta N_{ph})y] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(N_p^o + \Delta N_p)] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

由于 y 较小，又因 $\Delta N_{ph}y$ 是 y 的平方倍，因而不考虑 $\Delta N_{ph}y$ 。同时 N_p^o 为常数，所以 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (HN_p^o) = 0$ 。

整理式(3)得：

1 预应力组合梁振动方程的推导

1.1 预应力组合梁振动模型

双折线布置下的体外预应力钢-混凝土组合连续梁如图 1 所示。在两端钢筋锚固点处作用一对预加力，偏心距为 e 。那么由预加力和次内力共同引起的梁弯矩为 M_p ，由面积相等的原则，用沿梁轴线均匀分布的 $M = HN_p$ 来代替，其中 H 和 N_p 分别为均布弯矩系数和预加力。梁在振动过程中，梁两端的预加力是不断变化的。因此，可设：

$$\begin{cases} N_p = N_p^o + \Delta N_p \\ N_{ph} = N_{ph}^o + \Delta N_{ph} \\ M = HN_p = H(N_p^o + \Delta N_p) \end{cases} \quad (1)$$

式中： N_p^o 、 N_{ph}^o 分别为预加力 N_p 的初始值和水平分量初始值； ΔN_p 、 ΔN_{ph} 为随振动位移变化而引起的预加力改变量和预加力水平分量改变量； M 为预加力和次内力共同作用下的沿梁等效弯矩。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N_{ph}^o \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - H \frac{\partial^2 \Delta N_p}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

1.2 预加力改变量和梁位移的关系

ΔN_p 随振动位移变化而改变，振动位移 y 较小，从几何变形上可知，预应力筋长度改变量和梁一跨中间的竖向位移 y 成正比。分析 ΔN_p 与 y 的关系，得到之间的比例系数。可在一跨中点作用一集中力 F ，先得到 ΔN 和 F 的关系，再得到 F 作用下一跨中点的竖向位移 y ，最后得到 ΔN 和 y 的关系。

连续梁可简化为如图 2 的平面刚架，将预应力筋拉力和中间支座作为多余未知力，可以得到一跨中点处外力 F 、单位力 $X_1 = 1$ 和 $X_2 = 1$ 作用下的弯矩图，如图 2 所示。

$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dx \quad (5)$$

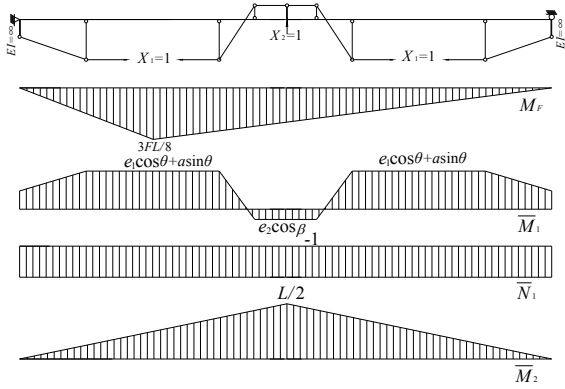


图2 连续梁简化模型及其内力图

Fig.2 The model of the continuous beam and its bearing

预应力筋作用单位力时引起预应力筋长度的改变量 δ_{11} 、 δ_{22} 、 Δ_{2F} 、 δ_{12} 和 δ_{21} 。

由变形协调方程可以得到：

$$\begin{cases} \delta_{11}\Delta N + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}\Delta N + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

从式(6)中可以得到 ΔN_p 与 F 的关系：

$$\Delta N_p = \left(\frac{\delta_{12}\Delta_{2F} - \delta_{22}\Delta_{1F}}{\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21}} \frac{1}{F} \right) F \quad (7)$$

连续梁在 F 作用下，得到梁-跨中点的竖向位移 y_F ，这样可以建立 F 和 y_F 的关系：

$$y_F = \frac{2L^3}{141EI} F \quad (8)$$

式(7)代入式(8)中，可得 ΔN_p 与 y_F 的关系：

$$y_F = \frac{2L^3}{141EI} \frac{(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21})F}{\delta_{12}\Delta_{2F} - \delta_{22}\Delta_{1F}} \Delta N_p \quad (9)$$

连续梁-跨中点产生竖向位移 y_F 时，梁内预应力筋会产生预应力改变量 ΔN_p ，而 ΔN_p 会引起与 y_F 相反的梁竖向位移 $y_{\Delta N_p}$ 。

$$y_{\Delta N} = \left(\delta_{1F} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \delta_{2F} \right) \frac{\Delta N_p}{F} \quad (10)$$

因此，一跨梁中点的竖向位移 y 同 ΔN_p 的关系可根据 $y = y_F - y_{\Delta N_p}$ 得到：

$$y = y_F - y_{\Delta N_p} = \left[\frac{2L^3}{141EI} \frac{(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21})F}{\delta_{12}\Delta_{2F} - \delta_{22}\Delta_{1F}} - \left(\delta_{1F} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \delta_{2F} \right) \frac{1}{F} \right] \Delta N_p \quad (11)$$

所以， ΔN_p 可以用 y 表示为：

$$\Delta N_p = \phi y \quad (12)$$

其中：

$$\phi = \frac{1}{\left[\frac{2L^3}{141EI} \frac{(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21})F}{\delta_{12}\Delta_{2F} - \delta_{22}\Delta_{1F}} - \left(\delta_{1F} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \delta_{2F} \right) \frac{1}{F} \right]}$$

1.3 振动方程

预加力在梁上的弯矩沿梁轴线呈不均匀变化，为了简化计算，根据面积等效原则，用沿梁轴线均匀分布矩形弯矩图来代替。预加力和次内力共同作用下 M_p 表达式：

$$M_p = \left[\bar{M}_1 - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \bar{M}_2 \right] N_p \quad (13)$$

M_p 弯矩图的面积表达式：

$$S(M_p) = \left[S(\bar{M}_1) - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} S(\bar{M}_2) \right] N_p \quad (14)$$

式中： $S(M_p)$ 、 $S(\bar{M}_1)$ 和 $S(\bar{M}_2)$ 分别为相应内力图的面积。

等效弯矩 M 的表达式：

$$M = \frac{1}{2L} S(M_p) = \frac{1}{2L} [S(\bar{M}_1) - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} S(\bar{M}_2)] N_p \quad (15)$$

所以可以得到均布弯矩系数 H 表达式：

$$H = \frac{1}{2L} \left[S(\bar{M}_1) - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} S(\bar{M}_2) \right] \quad (16)$$

将式(12)代入式(4)中可得：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [N_{ph}^o - H\phi] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

2 频率方程推导

2.1 振动方程与约束条件

在推导连续梁振动方程式(17)时，并没有考虑边界条件，现在把两跨连续梁的中间支座用相应的约束力 r 来代替。这样连续梁就可以变成简支梁，那么梁的振动微分方程就变为下式：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [N_{ph}^o - H\phi] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = r\delta(x-L) \quad (18)$$

式中： $\delta(x-L)$ 为狄拉克 δ 函数^[9]，它有如下两个性质：

$$\delta(x-L) = \begin{cases} +\infty, & x=L \\ 0, & x \neq L \end{cases}; \int_0^{+\infty} \delta(x-L) dx = 1$$

式(15)应满足如下的边界条件和位移约束条件：

$$y(0,t) = y(2L,t) = 0 \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=2L} = 0 \quad (20)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (21)$$

当连续梁自由振动时, 中间支座反力随时间的变化规律与梁自由振动规律相一致, 于是令:

$$y(x, t) = Y(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad r(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

将式(22)代入式(18)中, 可得:

$$Y^{(4)}(x) + \left[\frac{N_{ph}^o}{EI} - H \frac{\phi}{EI} \right] Y^{(2)}(x) - \frac{m\omega^2}{EI} Y(x) = \frac{R}{EI} \delta(X-L) \quad (23)$$

令:

$$\rho^2 = \left[\frac{N_{ph}^o}{EI} - H \frac{\phi}{EI} \right], \quad k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$$

式(23)变为:

$$Y^{(4)}(x) + \rho^2 Y^{(2)}(x) - k^4 Y(x) = \frac{R}{EI} \delta(X-L) \quad (24)$$

将式(22)代入式(19)一式(21)中得:

$$Y(0) = Y(2L) = 0; \quad Y''(0) = Y''(2L) = 0 \quad (25)$$

$$Y(L) = 0 \quad (26)$$

对式(24)进行拉普拉斯变换可得:

$$[(s^2 + \lambda_1^2)(s^2 - \lambda_2^2)]L(Y) = Y'''(0) + \rho^2 Y'(0) + s[Y''(0) + \rho^2 Y(0)] + s^2 Y'(0) + s^3 Y(0) + \frac{R}{EI} e^{-sL} \quad (27)$$

式中:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = \sqrt{k^4 + \frac{\rho^4}{4}} + \frac{\rho^2}{2} \\ \lambda_2^2 = \sqrt{k^4 + \frac{\rho^4}{4}} - \frac{\rho^2}{2} \\ \lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \rho^2 \end{cases} \quad (28)$$

对式(27)进行拉普拉斯反变换并整理得:

$$Y(x) = A_1 \sin(\lambda_1 x) + A_2 \cos(\lambda_1 x) + A_3 \sinh(\lambda_2 x) + A_4 \cosh(\lambda_2 x) +$$

$$\frac{R}{2EI} u(x-L) \left[\frac{\sinh \lambda_2(x-L)}{\lambda_2^3} - \frac{\sin \lambda_1(x-L)}{\lambda_1^3} \right] \quad (29)$$

式中: A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 为待定系数, 由边界条件确定。函数 $u(x-L)$ 是单位阶梯函数存在下列性质:

$$u(x-L) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L \\ 1, & x \geq L \end{cases} \quad (30)$$

对式(29)求二阶导数后代入式(25), 并利用 $u(x-L)$ 在 $x=0$ 和 $x=2L$ 附近的各阶导数恒为零,

再把式(29)代入式(25)中可得:

$$A_2 = A_4 = 0 \quad (31)$$

$$A_1 \sin(2\lambda_1 L) + A_3 \sinh(2\lambda_2 L) = \frac{R}{2EI} \left[\frac{\sin(\lambda_1 L)}{\lambda_1^3} - \frac{\sinh(\lambda_2 L)}{\lambda_2^3} \right] \quad (32)$$

$$A_1 \lambda_1^2 \sin(2\lambda_1 L) - A_3 \lambda_2^2 \sinh(2\lambda_2 L) = \frac{R}{2EI} \left[\frac{\sin(\lambda_1 L)}{\lambda_1} + \frac{\sinh(\lambda_2 L)}{\lambda_2} \right] \quad (33)$$

2.2 当连续梁具有对称振型时

当连续梁具有对称振型时, 中间支座的反力不为零, 同时 $\sin \lambda_1 L \neq 0$, $\sinh \lambda_2 L \neq 0$, 可以由式(32)和式(33)联立解得 A_1 和 A_3 , 同时将式(31)一并代入式(29)中可得:

$$Y(x) = \frac{R}{EI} \frac{\sin(\lambda_1 L)}{\lambda_1^3 \sin(2\lambda_1 L)} \sin(\lambda_1 x) - \frac{R}{EI} \frac{\sinh(\lambda_2 L)}{\lambda_2^3 \sinh(2\lambda_2 L)} \sinh(\lambda_2 x) + \frac{R}{2EI} u(x-L) \left[\frac{\sinh \lambda_2(x-L)}{\lambda_2^3} - \frac{\sin \lambda_1(x-L)}{\lambda_1^3} \right] \quad (34)$$

式(34)应满足位移约束条件式(26), 即当 $x=L$ 时, $Y(L)=0$, 有下式成立。

$$\lambda_2^3 \tan(L\sqrt{\lambda_2^2 + \rho^2}) = (\lambda_2^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \tanh(\lambda_2 L) \quad (35)$$

解得 λ_2 后, 再由式(28)和 $k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$ 可以得到

梁有对称振型时的频率方程。

2.3 当连续梁具有反对称振型时

当连续梁具有反对称振型时, 中间支座的反力为零。式(29)和式(30)构成的非齐次线性方程组变为齐次线性方程组。

$$\begin{cases} A_1 \sin(\lambda_1 L) + A_3 \sinh(\lambda_2 L) = 0 \\ A_1 \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) - A_3 \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 L) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

因 A_1 、 A_3 不能同时为零, 所以系数行列式应满足下式:

$$\begin{vmatrix} \sin(\lambda_1 L) & \sinh(\lambda_2 L) \\ \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) & -\lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 L) \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

可以得到:

$$\sin \lambda_1 L = 0 \quad (38)$$

所以:

$$\lambda_1 = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1, 2, \dots \quad (39)$$

即是:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \xi \quad (40)$$

其中: $\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \left[\frac{N_{ph}^o}{EI} - H \frac{\phi}{EI} \right]}$

3 公式、试验及有限元分析

文献[8]采用两根两等跨钢-混凝土组合连续梁(一个为普通梁,一根施加体外预应力梁)进行试验,测得其自振频率,并进行了有限元分析。试件中钢梁采用 Q345 工厂焊接加工的工字钢,钢梁弹性模

量 $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, 混凝土采用 C30, 混凝土弹性模量 $E_c = 3.15 \times 10^4 \text{ MPa}$, 体外预应力筋采用 1860 级的 $7\phi 5$ 钢绞线, 体外预应力弹性模量 $E_t = 1.95 \times 10^5 \text{ MPa}$, 体外预加力为 $1.5 \times 10^5 \text{ N}$ 。计算得到组合梁抗弯刚度 $EI = 3.2924 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, 组合梁构件及横截面的基本尺寸、中和轴的位置和体外预应力筋的布置如图 3 所示。文献[8]中采用试验和有限元方法得到了预应力组合连续梁侧向扭转、梁整体和局部预应力筋的振型和振动频率。式(40)算得第一频率、第三频率,式(35)算得第二频率和文献[8]中相对应振型的试验和有限元结果列在表 1 中。

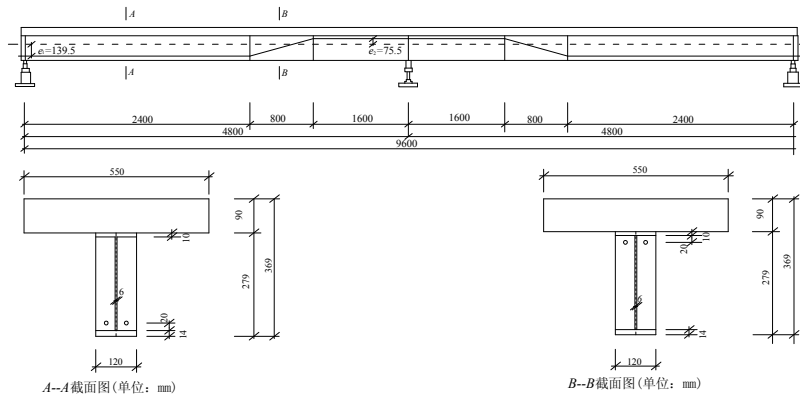


图 3 组合梁及其横截面图

Fig.3 The continuous beam and its section

表 1 自振频率公式、试验和有限元结果

Table 1 Comparison of calculated, tested and FEA natural frequencies

公式	普通			体外预应力								
	试验	有限元	误差 m_1 (%)	误差 m_2 (%)	误差 m_3 (%)	公式	试验	有限元	误差 m_1 (%)	误差 m_2 (%)	误差 m_3 (%)	
f_1/Hz	27.98	28.42	30.88	2.00	10.00	8.00	27.81	26.61	31.18	0.05	-0.12	-0.15
f_2/Hz	63.52	—	45.44	—	0.28	—	63.68	—	45.735	—	0.28	—
f_3/Hz	111.86	—	84.72	—	0.24	—	111.69	—	83.12	—	0.26	—

注: 误差 m_1 为 $|(f_{\text{公式}} - f_{\text{试验}})/f_{\text{试验}}| \times 100\%$; 误差 m_2 为 $|(f_{\text{公式}} - f_{\text{有限元}})/f_{\text{公式}}| \times 100\%$; 误差 m_3 为 $|(f_{\text{试验}} - f_{\text{有限元}})/f_{\text{有限元}}| \times 100\%$ 。

理想材料的动力学模型, 式(17)中等效轴向力 $[N_{ph}^o - H\phi]$ 为压力时, 使得固有频率随等效轴向力增大而减小, 对基频影响最大, 高频较小。当等效轴向力为拉力时, 使得固有频率随轴向力增大而增大, 同样也对基频较大, 高频较小。而等效轴向力拉还是压取决于预加力水平分量和预加力对梁的弯矩之间的差值, 而两者有同预应力筋的布置形式密切相关。但在实际情况下, 组合梁混凝土之间存在空隙, 轴向压力作用使预应力组合梁刚度增大, 进而又有使固有频率增大的作用。

从表 1 可以看出, 体外预加力对组合梁频率影响的趋势, 计算结果和有限元符合较好, 但试验却有相反的趋势。由于试验试件较少, 同时仅测得一

阶频率, 计算公式应在更多试验数据基础进行研究分析。

4 结论及展望

以双折线型体外预应力钢-混凝土组合连续梁为模型, 得到了连续梁振型为对称和反对称两种情况下所有自振频率计算式。

(1) 理论公式计算预应力组合梁的基频, 和试验、有限元结果吻合较好, 理论公式反映的预加力对梁频率的影响规律和有限元结果一致。

(2) 其他预应力筋布置形式的组合连续梁的理论公式没有推导, 同时试验数据较少不能对理论计算公式进行较好的修正, 这有待于进一步的研究。

(参考文献转第 211 页)

- performance of deteriorating structures: Assessment, design and management [M]. ASCE, Reston, Va., 2004: 19—25.
- [13] Jiang Y. The effect of bridge condition prediction for bridge system benefit optimization [C]. Proc of 2nd Bridge Maintenance, Safety, Management and Cost. IABMAS04, Japan, 2004.
- [14] Frangopol D M, Kong J S, Gharaibeh E S. Reliability-based life-cycle management of highways bridges [J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2001, 15(1): 27—34.
- [15] Bush T S, Catlow C R A, Battle P D. Evolutionary programming techniques for predicting inorganic crystal-structures [J]. Journal of Materials Chemistry, 1995, 5(8): 1269—1272.
- [16] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58—73.
- [17] 邵旭东, 彭建新, 晏班夫, 李立新. 基于全寿命成本的桥梁车道数决策研究[J]. 土木工程学报, 2008, 41(10): 46—52.
- Shao Xudong, Peng Jianxin, Yan Banfu, Li Lixin. Planning decision for deteriorating bridges based on optimal whole-life cost [J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(10): 46—52. (in Chinese)

(上接第 197 页)

参考文献:

- [1] Ayaho Miyamoto, Katsuji Tei. Behaviour of prestressed beam strengthened with external tendons [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2000, 126(9): 1033—1044.
- [2] 熊学玉, 王寿生. 体外预应力梁振动特性的分析与研究[J]. 地震工程与工程振动, 2005, 25(2): 55—61.
- Xiong Xueyu, Wang Shousheng. Analysis and research of externally prestressed concrete beam vibration behavior [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2005, 25(2): 55—61. (in Chinese)
- [3] 张耀庭, 蔡利建. 基于摄动法的体外预应力梁基频分析[J]. 华中科技大学学报, 2006, 34(6): 118—121.
- Zhang Yaoting, Cai Lijian. Study on the basic frequency analysis of external prestressed concrete beams based on perturbation [J]. Journal of Huazhong University of Science & Technology, 2006, 34(6): 118—121. (in Chinese)
- [4] 熊辉霞, 张耀庭. 体外预应力混凝土梁自振频率分析[J]. 工程力学, 2008, 25(增刊 II): 173—176.
- Xiong Huixia, Zhang Yaoting. Analysis of natural frequency of externally prestressed concrete beam [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(Supplement II): 173—176. (in Chinese)
- [5] 王佳伟, 贾艳敏. 预应力简支钢箱梁自振频率研究[J]. 工程力学, 2009, 26(1): 120—124.
- Wang Jiawei, Jia Yanmin. Study on natural frequency of simply supported steel box girder with prestressed tendons [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(1): 120—124. (in Chinese)
- [6] 王常雷. 预应力钢-混凝土组合梁的动力特性研究[D]. 上海: 同济大学, 2008.
- Wang Changlei. Study on dynamic characteristics of composite beams with external tendons [D]. Shanghai: Tongji University, 2008. (in Chinese)
- [7] Zill Dennis G, Cullen Michael R. Differential equations with boundary-value problems [M]. American: Thomson Learning, 2001.
- [8] Henry Edwards C, Penney David E. Differential equations and boundary value problems: computing and modeling [M]. American: Pearson Education, 2004.
- [9] 李军强, 方同. 轴向力作用下连续梁固有振动分析[J]. 机械科学与技术, 1998, 17(4): 541—547.
- Li Junqiang, Fang Tong. Analysis of natural transverse vibration of continuous beam subjected to axial force [J]. Mechanical Science and Technology, 1998, 17(4): 541—547. (in Chinese)
- [10] 唐友刚. 高等结构动力学[M]. 天津: 天津大学出版社, 2002.
- Tang Yougang. Advanced structure dynamics [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2002. (in Chinese)