

文章编号: 1000-4750(2011)02-0062-07

含有整体刚体位移杆件系统的几何非线性分析

罗晓明, *齐朝晖, 许永生, 韩雅楠

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘 要: 许多杆件系统中, 结构和机构共同存在。应用现有有限元理论很难分析这些杆件系统的几何非线性效应。该文引入多组坐标: 总体坐标系、物体坐标系、单元坐标系、节点坐标系和截面坐标系, 介绍了一种含刚体位移杆件系统几何非线性效应的共转坐标方法。该文假设梁单元交叉节点为刚性连接, 即: 节点坐标系和截面坐标系之间的坐标转换矩阵始终不变, 明确了杆件结构中节点转动的概念。并且依据有限转动理论, 推导出物体在单元坐标系和总体坐标系下的变形转换关系, 有效的分解了物体的大转动、大变形效应。进而列出了大变形分析的非线性残量方程。另外, 该文用多体系统动力学处理约束的方法, 建立了具有复杂边界条件结构的增广约束方程。最后, 给出 4 个算例, 验证了所述方法的可行和正确性以及约束增广法处理约束的有效性。

关键词: 几何非线性; 杆件系统; 共转法; 刚体位移; 有限转动; 约束增广法

中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A

GEOMETRIC NONLINEAR ANALYSIS OF TRUSS SYSTEMS WITH RIGID BODY MOTIONS

LUO Xiao-ming, *QI Zhao-hui, XU Yong-sheng, HAN Ya-nan

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: Many truss systems are both structures and mechanisms. So it is hard to solve these problems using the classical FEM theory. Aiming at dealing with the geometric nonlinear effect of these systems, this paper presents a co-rotational method using a series of coordinate systems which include global coordinate, body-fixed coordinate, element coordinate, node coordinate and section coordinate. It is supposed that the cross-section nodes are rigidly connected, namely the transformation matrix between the node coordinate and the section coordinate is invariable, thus the rotational concept is clearer. Subsequently, the deformational conversion relationship between element coordinate and global coordinate is attained based on the finite rotation theory, and it is shown that the large rotation and deformation are appropriately converted into small strain effect. Then, the nonlinear formulation of the residual forces is obtained. In addition, this paper gives a new augmented constraint method which is widely used in multi-body dynamics to deal with complicated displacement boundary conditions. Finally, four numerical examples are given to verify the method of this paper.

Key words: geometric nonlinearity; truss structure; co-rotational method; rigid body motion; finite rotation; augmented constraint method

目前, 求解几何非线性的方法很多, 应用最为广泛的有 Lagrange (TL)法、修正的 Lagrange (UL)

法^[1-2]和共转坐标(CR)方法。CR 方法是其中最新的方法, Felippa C A^[3]等对 CR 方法的发展历史有全

收稿日期: 2009-07-24; 修改日期: 2009-10-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(10972044); 973 计划项目(2006CB705400)

作者简介: 罗晓明(1981—), 男, 河北邢台人, 博士生, 主要从事多体系统动力学研究(E-mail: mrluo147@163.com)

*齐朝晖(1964—), 男, 吉林长春人, 教授, 博士, 博导, 主要从事多体系统动力学研究(E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn);

许永生(1981—), 男, 山东聊城人, 博士生, 主要从事多体系统动力学研究(E-mail: xuyongsheng1001@126.com);

韩雅楠(1982—), 女, 河北石家庄人, 硕士生, 主要从事结构和机械动力学研究(E-mail: hyn821019@163.com).

面的回顾。CR 方法成立的条件是：刚体位移和转动可以很大，但是变形必须很小。由于这样的假定，大型有限元软件都没有采用 CR 方法。但是，正是由于 CR 方法重新应用小应变单元，因而被很多学者采用^[3-8]。Crisfield M A^[4-5]构造了求解梁几何非线性的 CR 列式，并且推导了求解空间实体单元、梁和板单元的 CR 统一方程。周凌远^[7]等结合 UL 和 CR 方法，构造了一种高效的三维梁单元，刘放尧^[8]等应用 CR 方法分析了高层建筑框架结构的二阶效应。

所有 CR 法的共同特点是定义一个描述整体位移的物体坐标系，节点的移动和转动自由度在物体坐标系下描述。现有的 CR 方法描述转动自由度时物理意义不明确，尤其是对于含有交叉节点的杆件结构。另外，力矩和转角分量并不是一般的矢量，不能按照矢量的形式进行坐标转换。

另外，很多大型机械系统，为了完成特定的工作任务，要有非常大的刚体位移，并且位移边界条件也非常复杂。对于这样的工程装备，整个系统已经不再是结构，而是由结构和机构组成的、含有复杂边界条件的系统。Lagrange 方法和 CR 方法在处理这些复杂系统时存在非常大的困难。如图 1 是一起重装备，在初始状态，系统未变形，工作臂放于水平位置，如图 1 所示。如果整个系统是刚性系统，系统到达工况时如图 2 中虚线所示部分，桅杆角度为 θ_1 。但对于实际机构，工作臂比较长，在自重和外载荷的同时作用下，工作臂的变形会比较大。为了保证工况角 α ，桅杆必须继续转动 Δq ，这样，整个系统经历了比较大的刚体位移。由于机构运动，边界约束条件已经不是线性的，用现有的理论很难处理。大型的有限元软件也很难求解这样的问题。

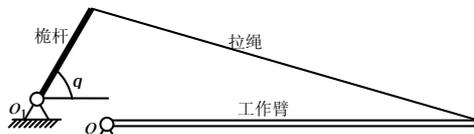


图 1 初始构型
Fig.1 Initial configuration

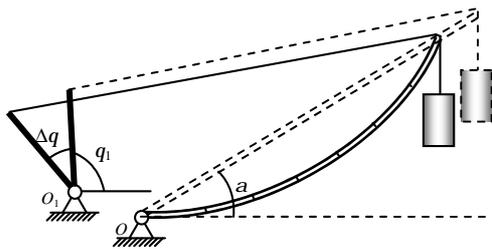


图 2 工作构型
Fig.2 Working configuration

本文假设杆件节点是刚性连接的，分别引入节点坐标系和截面坐标系描述节点的整体转动和相对转动。这样，使得节点转动自由度有明确物理意义。并且应用有限转动理论，实现了整体转动和相对转动的相互转换。另外本文应用多体系统动力学处理约束的方法建立约束方程^[9]，有效的解决了含有机构运动的杆件结构几何非线性问题。

1 梁单元坐标系选择方法

对于空间梁，单元的节点只有 i 和 j ，必须找出第三个参考点 k 才能建立梁单元的坐标系。如果参考点 k 的选择不当，就会使得单元相对单元坐标系的应变不是小量，从而不能得到正确的数值解。对于应变相对于自身构形比较小的梁，可以采用梁的刚截面假定，即：梁的截面在变形过程中不发生形状改变，并且一直垂直于形心线。根据这个假定，梁截面的位置和方位都可以求出。这时，在梁截面的形心主轴上找一个点作为参考点 k 即可，如图 3。

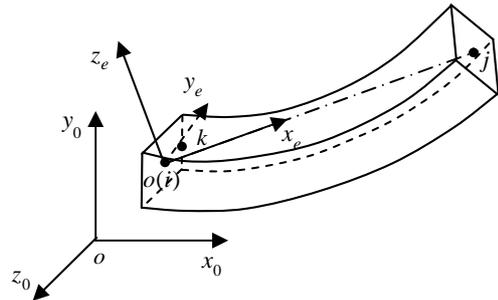


图 3 梁单元坐标系的选取
Fig.3 Element coordinates of a beam

单元坐标系可以定义为：

$$\mathbf{x}_e = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_e = \frac{\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ik}}{|\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ik}|} \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{z}_e \times \mathbf{x}_e \quad (3)$$

其中 $\mathbf{r}_{lm} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l$ ， \mathbf{r}_l 表示构件变形后节点相对于总体基原点的矢径。

2 变形的分解

2.1 移动的分解

如图 4 所示， i 和 j 是定义梁单元坐标系的节点。 $x_e y_e z_e$ 是单元坐标系， $x_0 y_0 z_0$ 是总体坐标系。对于矢量，上标 e 表示在单元坐标系下的分量，上标 0 代表初始时刻的分量。由图 4 可得：

$$\mathbf{R}_{oe}^T \mathbf{r}_{oj} = \mathbf{r}_{oj}^e + \mathbf{u}_j^e \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{oj} = \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{u}_j - \mathbf{r}_o^0 - \mathbf{u}_o \quad (5)$$

其中： \mathbf{r}_{oj}^e 是初始时刻节点 j 相对单元坐标系矢量； \mathbf{r}_{oj} 是现时 j 相对 o 在总体坐标系下的矢量； \mathbf{R}_{oe} 是单元坐标系与总体坐标系之间的坐标转换矩阵。从而：

$$\mathbf{u}_l^e = \mathbf{R}_{oe}^T (\mathbf{r}_l^0 + \mathbf{u}_l - \mathbf{r}_o^0 - \mathbf{u}_o) - \mathbf{r}_{ol}^e \quad (6)$$

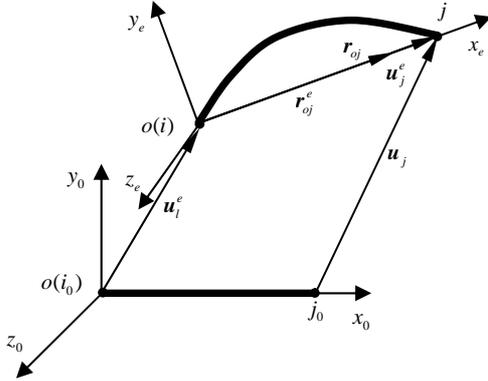


图4 移动的分解

Fig.4 Decomposition of movements

2.2 转动的分解

对于含有交叉节点的杆件系统，如图5所示L型梁，现在的CR方法对节点的转动自由度没有明确的定义。为了使转动的物理意义更加清晰，我们假定：单元交叉节点为刚性连接，节点坐标系和截面坐标系之间的坐标转换矩阵始终不变，并且初始时刻，节点坐标系与总体坐标系一致。

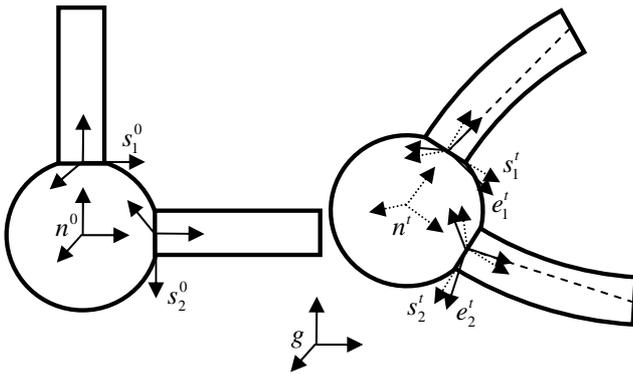


图5 转动的表达

Fig.5 Expression of the rotation

如图5所示： g 是总体坐标系； n^0 是初始时刻节点坐标系； s^0 是初始时刻单元截面坐标系； e^t 是当前时刻单元坐标系； n^t 是当前时刻节点坐标系； s^t 是当前时刻截面坐标系。交叉节点的总体转动由 n^t 相对于 g 的坐标方位矩阵决定，其转动矢量记为 \mathbf{a} ，包含刚性转动；相对转动由 s^t 相对于 e^t 的坐标

方位矩阵决定，其转动矢量记为 \mathbf{j} ，是小量，描述单元的真实转动变形。

转动矢量不同于普通矢量，不满足坐标转换关系，即， $\mathbf{a} \neq \mathbf{R}_{oe} \mathbf{j}$ 。由坐标转换关系可知：

$$\mathbf{R}_{0n} \mathbf{R}_{ns} = \mathbf{R}_{0e} \mathbf{R}_{es} \quad (7)$$

其中： \mathbf{R}_{ns} 是 s^t 相对 n^t 的坐标转换矩阵，是常量； \mathbf{R}_{0n} 是节点坐标系与总体坐标系之间的坐标转换矩阵，由转动矢量 \mathbf{a} 决定； \mathbf{R}_{0e} 是单元坐标系与总体坐标系的坐标转换矩阵，由总体坐标系下位移 \mathbf{u} 决定； \mathbf{R}_{es} 是截面坐标系与单元坐标系的坐标方位矩阵，决定转动矢量 \mathbf{j} 。因而，式(7)可写为：

$$\mathbf{R}_{0n}(\mathbf{a}) \mathbf{R}_{ns} = \mathbf{R}_{0e}(\mathbf{u}) \mathbf{R}_{es}(\mathbf{j}) \quad (8)$$

2.3 转动矢量和转动矩阵的相互转换

转动矢量 $\mathbf{J} = [J_x \ J_y \ J_z]^T$ ，斜张量形式为：

$$\mathbf{J}_\# = \begin{bmatrix} 0 & -J_z & J_y \\ J_z & 0 & -J_x \\ -J_y & J_x & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

那么，这个转动矢量对应的转动矩阵为^[3,9]：

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} + \frac{\sin q}{q} \mathbf{J}_\# + \frac{(1 - \cos q)}{q^2} \mathbf{J}_\#^2 \quad (10)$$

其中：

$$q = |\mathbf{J}| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2} \quad (11)$$

如果已知一个转动矩阵 \mathbf{R} ，由式(10)可知：

$$\mathbf{N} = 0.5(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) = \frac{\sin q}{q} \mathbf{J}_\# \quad (12)$$

其中， \mathbf{N} 是 \mathbf{R} 所包含的反对称部分，如果令：

$$\mathbf{n} = [N_{12} \ N_{13} \ N_{23}]^T \quad (13)$$

可解出：

$$q = \arcsin(|\mathbf{n}|) \quad (14)$$

从而可以求出 \mathbf{R} 对应的转动矢量：

$$\mathbf{J} = \frac{q}{\sin q} [n_x \ n_y \ n_z]^T \quad (15)$$

当 $q = 0, \pm 180^\circ$ 时，根据此方法无法求出 \mathbf{J} ，Felippa C A^[3]等给出了详细的求解过程。由式(8)、式(10)和式(15)可以得到总体坐标系下转动矢量 \mathbf{a} 和单元坐标系下转动矢量 \mathbf{j} 的转换关系。

3 大变形分析残量方程的建立

空间梁单元大变形分析的残量方程建立的前提是：变形相对单元坐标系来说是小量。按照小变形理论，梁单元相对于单元坐标系的平衡方程为：

$$\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_n^e + \mathbf{f}_c^e = 0 \quad (16)$$

其中： f_n^e 是节点所受外力； f_c^e 是节点约束反力； f^e 是节点内力，并且：

$$f^e = K^e u^e \quad (17)$$

K^e 、 u^e 分别是单元坐标系下刚度阵和节点位移列阵。

$$u^e = [u_1^e \quad j_1 \quad u_2^e \quad j_2]^T \quad (18)$$

其中， u_i^e 、 φ_i 可分别由式(6)和式(15)求出，节点力相对于总体的平衡方程为：

$$A_{0e}(f^e + f_n^e + f_c^e) = 0 \quad (19)$$

坐标转换矩阵：

$$A_{0e} = \begin{bmatrix} R_{0e} & & & & & \\ & R_{0e} & & & & \\ & & R_{0e} & & & \\ & & & R_{0e} & & \\ & & & & R_{0e} & \\ & & & & & R_{0e} \end{bmatrix} \quad (20)$$

由式(8)，可得：

$$R_{es}(j) = R_{0e}^T(u)R_{0n}(a)R_{ns} \quad (21)$$

由此可以看出， φ 是关于 u 和 a 的函数，记为：

$$j = f(u, a) \quad (22)$$

式(6)可写成：

$$u_i^e = g(u) \quad (23)$$

综合式(19)、式(17)、式(18)、式(22)、式(23)可得，单元相对于总体坐标系的力残量方程：

$$K(u, a)[u_1 \quad a_1 \quad u_2 \quad a_2]^T + f_n + f_c = 0 \quad (24)$$

最后，根据传统的有限元组集方法，得到总体基下系统力的非线性残量方程。

4 复杂约束处理的增广法

传统有限元处理约束有时会扰乱各节点位移在总体位移列阵中的位置，给程序设计和后处理带来一些不利因素。本节提出了处理约束的增广法。该方法不仅不需重组系统位移，而且可以用统一的模式处理各种复杂约束，在求解系统位移的同时可直接得到系统约束反力。

多体系统动力学中，广义节点力 f 和节点广义位移 u 之间满足如下的虚功方程：

$$du^T(M\ddot{u} + Ku - f^e) = 0 \quad (25)$$

其中： δu 为系统虚位移； K 为系统总体刚度矩阵； M 为系统质量矩阵。如果系统存在约束：

$$Gu = x \quad (26)$$

其中 G 是约束雅可比矩阵，系统虚位移应满足相应的约束方程：

$$du^T G^T = 0 \quad (27)$$

对比式(25)与式(27)可以发现^[9]：

$$M\ddot{u} + Ku - f^e = G^T l \quad (28)$$

其中， λ 是拉氏乘子列阵：

$$f^n = G^T l \quad (29)$$

f^n 为约束反力，如图 6 所示。对于静力问题，可以令加速度为 0，由力的平衡：

$$Ku = f^e + f^n \quad (30)$$

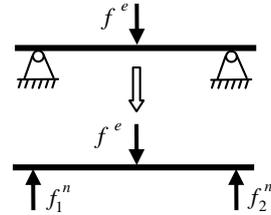


图 6 用约束反力取代约束

Fig.6 Substitute the constrains with constraint forces

综合式(26)、式(29)和式(30)，可得静态约束系统的控制方程为：

$$\begin{bmatrix} K & -G^T \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^e \\ -x \end{Bmatrix} \quad (31)$$

采用式(31)作为系统控制方程时，约束的存在并没有缩减系统维数，反而增加了系统维数。我们称此方法为增广法。

如果系统中存在约束：

$$\begin{cases} u_1 + 6u_3 + 10u_5 = 1 \\ (\sin q)u_1 + (\cos q)u_2 = 0.1 \\ u_4 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

那么约束雅可比：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ \sin q & \cos q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

约束右端项：

$$x = [1 \quad 0.1 \quad 0]^T \quad (34)$$

5 数值算例

本节共有 4 个例题，分别介绍了本文所述方法的正确性和有效性。例题安排如下：例 1 和例 2 为结构的几何非线性问题，分别与 Ansys 进行了对比，验证了本文提出的多组坐标系方法在求解大转动、大变形问题时的正确性；例 3 为一含有斜支撑结构的线性问题，详细说明了约束增广法的求解方法；例 4 为含有机运动形式的几何非线性问题，给出了本文在求解这一类问题时的求解流程。

例 1. 如图 7 所示圆形悬臂梁, 初始时刻水平放置, 端部受到一个 z 向力矩 M 作用。梁长 $L=10\text{m}$, 截面半径 $R=0.05\text{m}$, 弹性模量为 $E=210\text{GPa}$, 泊松比 $m=0.3$ 。

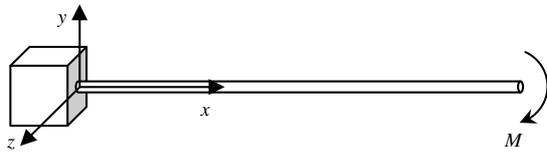


图 7 空间悬臂梁
Fig.7 A 3D cantilever beam

本例中, 梁划分为 10 个等长单元。悬臂梁受到不同端部力矩的变形如图 8 所示。从图 8 中可以看出, 当外力矩达到 $M=2EI\pi/L$ 时, 梁末端转角为 $2\pi^{[10]}$, 计算误差为 0。并且, 各个力矩条件下梁末端的计算结果与 Ansys 结果进行了对比, 见表 1。Ansys 中采用弧长法计算梁的几何非线性效应。从表 1 中可以看出, 本文结果有非常高的精度。当力矩 $M=2EI\pi/L$ 时, Ansys 端部转角为 -6.3093 , 误差为 0.4154% 。

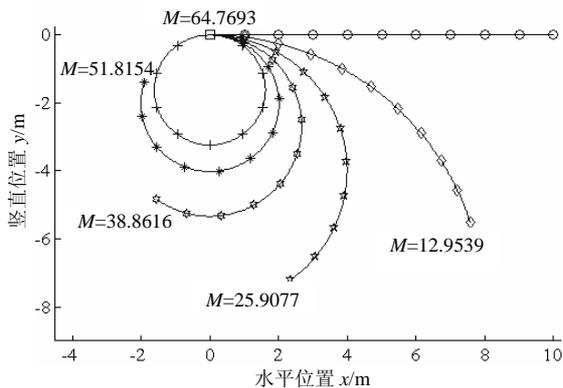


图 8 悬臂梁变形图
Fig.8 Deformations of the beam

表 1 与 Ansys 结果对比
Table 1 Comparison with Ansys

力矩 $M/(\text{N}\cdot\text{m})$	结果	u_x/m	u_y/m	q_z/rad
12.9539	本文	-2.4268	-5.5023	-1.2566
	Ansys	-2.4285	-5.5039	-1.2571
25.9077	本文	-7.6551	-7.2168	-2.5133
	Ansys	-7.6631	-7.2158	-2.5152
38.8616	本文	-11.5684	-4.8271	-3.7699
	Ansys	-11.5780	-4.8112	-3.7755
51.8154	本文	-11.9121	-1.3892	-5.0265
	Ansys	-11.8990	-1.3602	-5.0399
64.7693	本文	-10.0000	0.0000	-6.2832
	Ansys	-9.9578	-0.0006	-6.3093

例 2. 如图 9 所示为一个空间穹顶结构, 所有结点均为刚接, 所有的梁单元截面均为 $b\times h=0.76\text{m}\times 1.22\text{m}$ 。弹性模量 $E=20.69\text{GPa}$, 剪切模量 $G=$

$8.83\text{N}/\text{m}^2$ 。穹顶底座为固支, 房顶受到集中力 P 的作用。

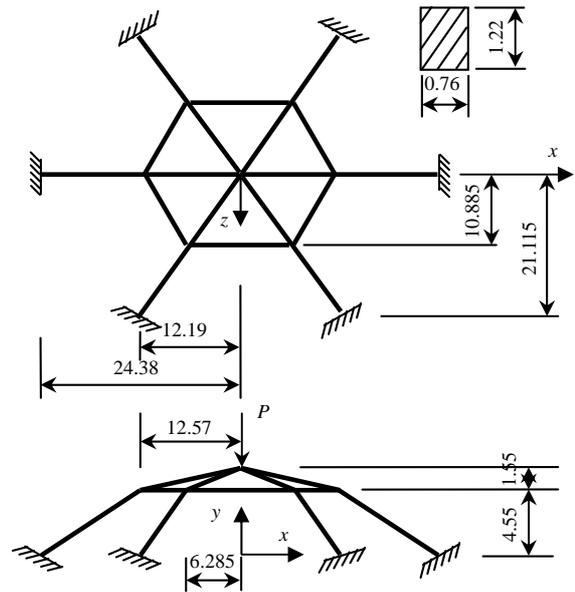


图 9 受集中力的空间穹顶结构
Fig.9 Space dome subject to a concentrated load

程序计算时, 每个梁看作一个单元。穹顶顶部竖向位移的荷载-变形曲线如图 10, 图 10 中曲线为本文计算结果, 用圆圈表示的点为 Ansys 计算结果。

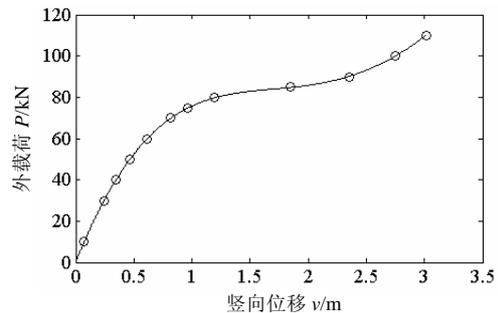


图 10 穹顶顶部荷载-变形曲线

Fig.10 Load-displacement curve at the peak of space dome

例 3. 如图 11 所示的平面桁架结构, 截面面积 $A=0.004\text{m}^2$, 弹性模量 $E=210\text{GPa}$, 质量密度为 $7.8\text{g}/\text{mm}^3$ 。节点 3 处作用左向拉力 $P=30\text{kN}$, 节点 4 处受与水平线倾斜 45° 的斜支撑^[11]。

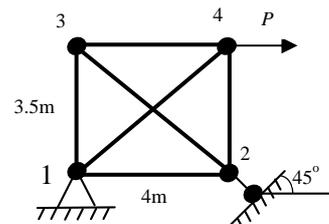


图 11 平面桁架结构
Fig.11 A planar truss structure

约束方程为:

$$u_1 = 0; v_1 = 0; -\sqrt{2}/2u_2 + \sqrt{2}/2v_2 = 0$$

那么, 如式(26)形式的约束方程中, 约束雅可比矩阵及其右端项为:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(31)解得 \mathbf{u} 和 λ , 由式(29)得到系统约束反力, 系统位移和约束反力见表 2 和表 3。

表 2 结构节点变形

Table 2 Nodal elastic displacements

节点	u/m	v/m
1	0	0
2	-1.7×10^{-4}	-1.7×10^{-4}
3	-6.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}
4	8.1×10^{-4}	-3.4×10^{-4}

表 3 节点约束反力

Table 3 Constraint forces

	f_x/kN	f_y/kN
左端铰支节点	-3.75	-26.25
右端斜支节点	-26.25	26.25

例 4. 如图 1 所示的工程起重装备, 工作臂为圆管, $L=10m$, 密度 $\rho=7800kg/m^3$, 内圆半径 $r=0.032m$, 外圆半径 $R=0.035m$, 圆管的弹性模量 $E=210GPa$, 泊松比 $\mu=0.3$ 。拉绳的刚度 $k=1 \times 10^9 N/m$, 桅杆是刚性杆件, 长 $L_1=1m$ 。初始时刻, 工作臂水平, 桅杆与水平角度 $\theta=60^\circ$, o_1 到 o 的偏心距为 $(-0.1m, 0.1m)$ 。外载重 $500N$, 现计算工况为 $\alpha=30^\circ$ 时系统的状态。

如果机构是纯刚性的, 当工作臂到达 30° 位置时, 由几何关系, 曲柄与水平角度为 $\theta_1=93.669^\circ$, 工作臂顶端最后的位置 $x_0=8.660, y_0=5$, 如图 2 中虚线所示。

如果考虑柔性效应, 由于自重和外载荷同时作用, 工作臂顶端会有向下的较大位移。此时, 工况已经不能满足。桅杆必须继续转动 Δq 才能使 $\alpha=30^\circ$, 如图 2 实线所示。这时, 整个系统已经不再是结构, 而是机构。传统方法很难计算含有机构运动的几何非线性效应。本文假设工作臂顶端有一个 30° 的斜支座, 计算流程如图 12。

最终计算结果如图 13 所示。为了满足工况, 桅杆需要继续转动的角度 $\Delta q=3.168^\circ$, 工作臂顶端最后的位置 $x=8.6146, y=4.9736$ 。这时, 桅杆与水

平夹角为 96.837° 。

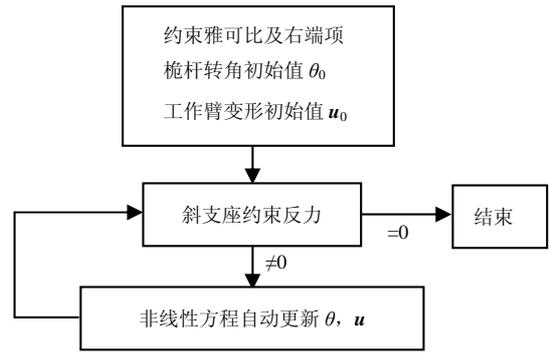


图 12 计算流程

Fig.12 Computational process

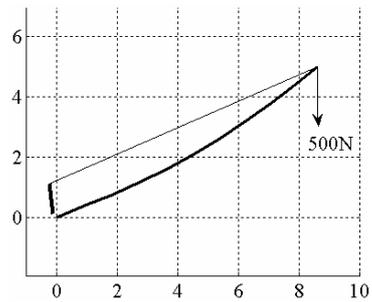


图 13 起重机构变形图

Fig.13 Deformation of the crane mechanism

由于 Ansys 中无法求出工况角为 30° 时桅杆的真实角度, 故用本文计算的桅杆角度以及此角度下的构型作为 Ansys 的计算模型。并且固定桅杆使整个系统转化为结构问题。Ansys 中计算的变形以后工作臂顶端与水平夹角为 30.026° , 工作臂顶端最后的位置 $x=8.6127, y=4.9778$ 。由此可见, 本文的计算结果是正确的, 并且具有很高的精度。

6 结论

本文研究了一种含有刚体位移的杆件系统几何非线性效应的计算方法, 引入了多组坐标, 提出了一种新的 CR 计算方法。并且利用节点刚性连接的假定, 明确了交叉节点转动自由度的概念。通过算例验证, 此方法具有比较高的效率和精度。另外, 本文利用约束增广法处理约束, 有效地处理了含有大转动、大变形效应的机构几何非线性问题。

增广法有以下特点:

(1) 约束的个数一般很少, 因而系统维数的增加并不会使计算工作量明显增加。

(2) 不需要重组系统位移次序, 可以为以后处理提供一些便利条件, 同时也使程序设计不再复杂。

(3) 不需要类似于“大元素法”所需的虚拟刚度,也就不会因虚拟刚度过大而人为加重系统数值病态。

(4) 可以在求解系统位移的同时,方便地得到约束所对应的约束反力。

(5) 可以用统一的模式处理任何线性约束。

(6) 通过适当处理,可以解决复杂约束问题。

参考文献:

- [1] 陈至达. 杆板壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
Chen Zhida. Large deformation theory for bar, plate and shell [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [2] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method: Basic formulation and linear problems [M]. London: McGraw-Hill, 1990.
- [3] Felippa C A, Haugen B. A unified formulation of small strain corotational finite elements: I. Theory [J]. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 2285—2335.
- [4] Crisfield M A. A consistent co-rotational formulation for nonlinear three-dimensional beam element [J]. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 1990, 81(2): 131—150.
- [5] Crisfield M A, Moita G F. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams [J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33: 2969—2992.
- [6] Li Z X. A co-rotational formulation for 3D beam element using vectorial rotational variables [J]. Computational Mechanics, 2007, 39(3): 309—322.
- [7] 周凌云, 李乔. 基于 UL 法的 CR 列式三维梁单元计算方法[J]. 西南交通大学学报, 2006, 41(6): 690—695.
Zhou Lingyuan, Li Qiao. Updated lagrangian co-rotational formulation for geometrically nonlinear FE analysis of 3-D beam element [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2006, 41(6): 690—695. (in Chinese)
- [8] 刘放尧, 孟苗超. 用共旋坐标有限元法分析高层建筑框架结构的二阶效应[J]. 湖南城市学院学报(自然科学版), 2007, 16(1): 1—5.
Liu Fangyao, Meng Zhuochao. Co-rotational procedures for finite element analysis of second-order effects of tall building frame structures [J]. Journal of Hunan City University (Natural Science), 2007, 16(1): 1—5. (in Chinese)
- [9] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Qi Zhaohui. Dynamics of multibody systems [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [10] 吕和祥, 朱菊芬, 马莉颖. 大转动梁的几何非线性分析讨论[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(4): 485—490.
Lu Hexiang, Zhu Jufen, Ma Liying. Discussion of analyzing of geometric non-linear beams with large rotations [J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1995, 12(4): 485—490. (in Chinese)
- [11] 韩来彬. MATLAB 有限元分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Han Laibin. MATLAB guide to finite elements [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)