

文章编号: 1000-4750(2011)02-0024-06

# 阶梯形圆形水池分析的传递矩阵法

\*夏桂云<sup>1,2</sup>, 俞茂宏<sup>2</sup>, 李传习<sup>1</sup>, 曾庆元<sup>3</sup>

(1. 长沙理工大学土木与建筑学院, 长沙 410004; 2. 西安交通大学航天航空学院, 西安 710049; 3. 中南大学土木建筑学院, 长沙 410075)

**摘 要:** 考虑剪切变形的影响, 推导了圆形水池在轴对称荷载作用下的中厚壳有矩理论公式, 其微分方程与 Winkler 地基上 Timoshenko 梁的微分方程一致, 当圆形水池池壁剪切刚度取无穷大时, 其可退化成相应薄壳理论公式。利用初参数法, 推导了微分方程的解形式和建立了结构分析的传递矩阵法。分析了底部固结顶部自由、在分布荷载和径向荷载作用下阶梯形圆形水池横向挠度、转角、剪力、弯矩随池壁高度的变化, 并与不考虑剪切变形影响的计算结果、Ansys 结果进行了比较。计算结果表明: 圆形水池考虑剪切变形影响的计算结果偏小、采用薄壳理论偏安全; 剪切变形对弯矩、剪力影响比对环向力、径向位移影响大; 所建立的圆形水池初参数解和传递矩阵法丰富了圆形水池和 Winkler 地基上 Timoshenko 梁的计算理论。

**关键词:** 圆形水池; 传递矩阵法; 剪切变形; 中厚壳; 初参数

**中图分类号:** TU991 **文献标识码:** A

## TRANSFER MATRIX METHOD FOR ANALYSIS OF STEPPED CIRCULAR WATER TANK

\*XIA Gui-yun<sup>1,2</sup>, YU Mao-hong<sup>2</sup>, LI Chuan-xi<sup>1</sup>, ZENG Qing-yuan<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, China;

2. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

3. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Considering the shear deformation, a circular water tank was treated as a thick shell, and the differential equation was derived, which was the same as the interactive equation of a Timoshenko beam on a Winkler foundation. When the shear stiffness of tank wall tended to infinite, corresponding equations of thick shell theory can be degenerated into that of thin shell theory. Using the initial parameter method, the solutions to the circular water tank were resolved and the transfer matrix method was established. A two stepped circular water tank with clamped bottom and free top under a triangular distributing load and a radial load was analyzed to demonstrate the shear deformation effect; the transverse deformation, rotating angle, shear force and bending moment were presented to describe the changing with the tank height. Results of thin shell theory, thick shell theory and Ansys software were compared. Numerical analyses indicate that shear deformation leads to small results and thin shell theory used at present is safe. Shear deformation affects the bending moment and shear force more than the loop force and radial displacement. The initial parameter solutions and the transfer matrix method enrich the computing theories of a circular water tank and a Timoshenko beam on a Winkler foundation.

**Key words:** circular water tank; transfer matrix method; shear deformation; thick shell; initial parameter

收稿日期: 2009-08-05; 修改日期: 2010-03-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(50778024); 中国博士后基金项目(20080441177); 长沙理工大学桥梁与隧道工程创新项目(2010-01)

作者简介: \*夏桂云(1972—), 男, 湖南湘阴人, 副教授, 博士, 从事结构剪切变形影响、桥梁结构理论研究(E-mail: xiagy72@163.com);

俞茂宏(1934—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博导, 从事材料强度和结构强度研究(E-mail: mhyu@mail.xjtu.edu.cn);

李传习(1963—), 男, 湖南衡南人, 教授, 博士, 博导, 院长, 从事桥梁结构理论研究(E-mail: lichuanxi2@163.com);

曾庆元(1925—), 男, 江西泰和人, 教授, 博导, 中国工程院院士, 从事桥梁结构极限承载力、车-桥振动研究。

圆形水池是石油、化工、给排水等工业与民用建筑中具有广泛用途的一种特种结构，国内外对其进行了广泛而深入的研究。国内大量文献<sup>[1]</sup>将其当作圆柱薄壳，取单位宽度池壁按有矩理论进行分析，其可等效成 Winkler 地基上 Euler 梁，并编制了大量计算表格以供设计查找。雷朝华<sup>[2]</sup>分析了温度、混凝土收缩对圆形贮液池开裂的影响，并从材料、设计、施工等角度提出了控制措施。李明义<sup>[3]</sup>对大型预应力混凝土圆形水池中环向预应力间距、分布以及洞口处预应力筋的布设进行了分析，其工作对圆形水池的设计有一定的指导意义。王晖<sup>[4]</sup>分析了环向预应力对圆形水池应力的影响，探讨了预应力筋最大间距与池壁厚度关系。Melerski<sup>[5]</sup>考虑圆形水池底板、池壁和顶盖间的相互作用，提出了一种简化分析方法。Malhotra<sup>[6]</sup>对圆形水池在水平地震作用下底部掀起问题进行了研究，建立了地震作用下圆形水池的动力分析方法。Moncarz<sup>[7]</sup>调查了废水处理厂的消化池开裂原因，并对一座消化池倒踏的原因进行了详细的论证和调查。

这些研究有助于认识圆形水池的受力特性，但是目前的研究也有些不足，主要表现在如下几个方面：1) 薄壳理论一般只适用于壁厚与曲面最小半径之比  $h/R \leq 1/20$  的情况<sup>[8]</sup>，实践中有些中小型贮液池由于半径较小、池壁相对较厚，不在薄壳理论研究的范围内，此时应采用考虑剪切变形影响的中厚壳理论；2) 基于理论解析的方法一般只能分析壁厚相同的圆柱壳，对于变厚度壁厚或阶梯形壁厚的圆池水池，分析成果较少；3) 针对圆形水池的一般受荷情况，目前主要研究几种特殊的荷载，如圆形水池全高范围内的均布荷载、三角形分布荷载、顶底截面作用的集中荷载等<sup>[1]</sup>，但随着圆形水池的加固、预应力技术在圆形水池中应用的增多<sup>[9]</sup>，水池高度范围内环向预应力的出现要求圆形水池分析中必须要考虑荷载的任意形式和作用位置。

对于壁厚有变化、荷载任意的圆形水池，传递矩阵方法是其受力分析的非常有利的工具。芮筱亭等<sup>[10]</sup>系统研究了线性多体系统传递矩阵法和一般多体系统离散时间传递矩阵法及其在重大工程技术领域中的应用，为多体系统动力学研究提供了全新的方法和手段。刘庆谭等<sup>[11]</sup>介绍了梁、板、轴对称圆柱薄壳的传递矩阵方法，用大量实例介绍在工程结构中的具体应用，受到土木工程界的青睐。

本文采用中厚壳理论分析圆形水池的受力问

题，建立圆形水池考虑剪切变形影响的新方法，导出可考虑任意荷载和作用位置的传递矩阵法，为圆形水池分析方法提供有益补充。

## 1 计算理论

考虑池壁的剪切变形影响，将池壁较厚的圆形水池简化为中厚圆柱壳。由于结构和荷载具有轴对称性，如图 1 所示，中面环向应变  $\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{w}{R}$ 、竖向应变  $\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ 、环向线段主曲率为  $\chi_\theta = -\frac{w}{R^2}$  与薄壳理论<sup>[1]</sup>一致。

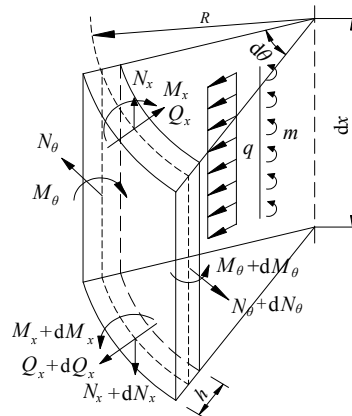


图 1 圆形水池微元体受力分析

Fig.1 Force analysis of free body for circular water tank

考虑剪切变形的影响，中厚圆柱壳中竖向主曲率取为转角  $\psi$  的一阶导数<sup>[12]</sup>：

$$\chi_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

壳体中距中面为  $z$  的任意点应变量和中面应变量的关系为：

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \bar{\varepsilon}_\theta + z \cdot \chi_\theta \\ \varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x + z \cdot \chi_x \end{cases} \quad (2)$$

根据中厚壳小挠度的弹性理论，不考虑垂直于中面方向的正应力  $\sigma_z$ ，将其作为平面应力问题，壳体中应力-应变关系为：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_\theta) = \\ \frac{E}{1-\mu^2}(\bar{\varepsilon}_x + z \cdot \chi_x + \mu \cdot \bar{\varepsilon}_\theta + \mu \cdot z \cdot \chi_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu \cdot \varepsilon_x) = \\ \frac{E}{1-\mu^2}(\bar{\varepsilon}_\theta + z \cdot \chi_\theta + \mu \cdot \bar{\varepsilon}_x + \mu \cdot z \cdot \chi_x) \end{cases} \quad (3)$$

单位长度截面的内力可由应力积分求得，根据

式(3), 积分后有:

$$\begin{cases} N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \cdot \frac{w}{R} \right) \\ N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2} \cdot \left( \frac{w}{R} + \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ M_x = -D \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{w}{R^2} \right) \\ M_\theta = -D \cdot \left( \mu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{w}{R^2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{式中: } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

考虑剪切变形的影响, 壳体中剪力为<sup>[12]</sup>:

$$Q_x = C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (5)$$

式中:  $C = 5Gh/6$

由于变形小, 式(4)中  $\frac{w}{R^2}$  可忽略不计<sup>[1]</sup>, 则由式(4)的第三式、第四式, 可知竖向弯矩和环向弯矩分别为:

$$\begin{cases} M_x = -D \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ M_\theta = -\mu \cdot D \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (6)$$

不计自重, 在轴对称静水压力作用下, 不考虑壳体中竖向轴力的影响<sup>[13]</sup>, 由式(4)第一式知:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{w}{R} \quad (7)$$

将式(7)代入式(4)的第二式, 有:

$$N_\theta = \frac{Eh}{R} \cdot w \quad (8)$$

考虑剪切变形影响后, 中厚圆柱壳结构微段的平衡方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} + p = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x - m = 0 \end{cases} \quad (9)$$

一般壳体中较少有分布弯矩作用, 令  $m=0$ , 将式(4)、式(6)、式(8)代入式(9)中, 将挠度  $w$ 、转角  $\psi$  解耦后, 可建立圆形中厚壳在分布荷载  $p$  作用下的微分方程为:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{Eh}{CR^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Ehw}{DR^2} = \frac{p}{D} \quad (10)$$

从式(10)可以看出, 考虑剪切变形影响的圆形水池微分方程与 Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的

微分方程<sup>[12,14]</sup>一致。当剪切刚度  $C \rightarrow \infty$  时, 式(10)退化成不考虑剪切变形的圆形水池微分方程<sup>[1-2]</sup>, 其与 Winkler 地基上 Euler 梁的微分方程一致<sup>[1,12]</sup>。因此式(10)是一个从薄壳到中厚壳都适应的通用计算模型。

## 2 初参数解与转递矩阵法

式(10)微分方程可采用多种方法进行求解, 如解析法、差分法、有限元等。从使用方便的角度看, 初参数解法不失为一种较优的方法<sup>[12]</sup>。取单位宽度的池壁作为 Winkler 地基上 Timoshenko 梁, 如图 2 所示, 梁上作用有位置任意的集中荷载和分布荷载。

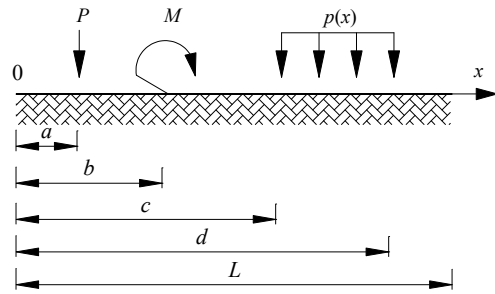


图 2 单位宽度池壁的作用荷载和位置

Fig.2 Load and position of unit width tank wall

经推导, 式(10)方程的解用  $x=0$  时的初参数 (挠度  $w_0$ 、转角  $\psi_0$ 、剪力  $Q_0$ 、弯矩  $M_0$ ) 表示成的传递矩阵形式如下式(11)所示。

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ Q \\ M \end{Bmatrix}_{x=L} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ Q \\ M \end{Bmatrix}_{x=0} + \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ Q \\ M \end{Bmatrix}_{\text{mod}} \quad (11)$$

式中:  $a_i = a_i(L)$ 、 $b_i = b_i(L)$ 、 $c_i = c_i(L)$ 、 $d_i = d_i(L)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )。  $a_i(x)$ 、 $b_i(x)$ 、 $c_i(x)$ 、 $d_i(x)$  为解函数, 如附录所示。

式(11)中的荷载修正项如下式所示:

$$\begin{aligned} w_{\text{mod}} &= \left\|_{x=a} -P \cdot c_1(x-a) + \left\|_{x=b} M \cdot d_1(x-b) + \right. \\ &\quad \left. \left\|_{x=c} -\int_c^x p(z) \cdot c_1(x-z) dz + \left\|_{x=d} \int_d^x p(z) \cdot c_1(x-z) dz, \right. \right. \\ \psi_{\text{mod}} &= \left\|_{x=a} -P \cdot c_2(x-a) + \left\|_{x=b} M \cdot d_2(x-b) + \right. \\ &\quad \left. \left\|_{x=c} -\int_c^x p(z) \cdot c_2(x-z) dz + \left\|_{x=d} \int_d^x p(z) \cdot c_2(x-z) dz, \right. \right. \\ Q_{\text{mod}} &= \left\|_{x=a} -P \cdot c_3(x-a) + \left\|_{x=b} M \cdot d_3(x-b) + \right. \\ &\quad \left. \left\|_{x=c} -\int_c^x p(z) \cdot c_3(x-z) dz + \left\|_{x=d} \int_d^x p(z) \cdot c_3(x-z) dz, \right. \right. \\ M_{\text{mod}} &= \left\|_{x=a} -P \cdot c_4(x-a) + \left\|_{x=b} M \cdot d_4(x-b) + \right. \end{aligned}$$

$$\left\|_{x=c}^{-} \int_c^x p(z) \cdot c_4(x-z) dz + \left\|_{x=d}^+ \int_d^x p(z) \cdot c_4(x-z) dz. \quad (12)$$

式中： $\left\|_{x=a}$  等符号表示当  $x \geq a$  时应考虑修正项，当  $x < a$  时不考虑修正项<sup>[12]</sup>。

式(12)中，关于解函数  $a_i(x)$ 、 $b_i(x)$ 、 $c_i(x)$ 、 $d_i(x)$  的积分比较复杂，本文经推导，发现其两种积分有通用公式，如下式：

$$\left\{ \begin{aligned} \int c_i(x-z) dz &= -\frac{a_i(x-z)}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} + c \\ \int z \cdot c_i(x-z) dz &= -\frac{z \cdot a_i(x-z) - b_i(x-z)}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} + c \end{aligned} \right. \quad (13)$$

如果分布荷载是满跨布置，且线性分布，其作用荷载的修正项可进行简化，对于如下式所示的线性分布荷载：

$$p(x) = p_0 + qx \quad (14)$$

其荷载修正项如下式所示：

$$\left\{ \begin{aligned} w \\ \psi \\ Q \\ M \end{aligned} \right\}_{\text{mod}} = \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \{p_0 \cdot (1 - a_1(x)) + q[x - b_1(x)]\} \\ \frac{1}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \{-p_0 \cdot a_2(x) + q[1 - b_2(x)]\} \\ \frac{1}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} [-p_0 \cdot a_3(x) - q \cdot b_3(x)] \\ \frac{1}{D(\alpha^2 + \beta^2)^2} [-p_0 \cdot a_4(x) - q \cdot b_4(x)] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

结合远端的边界条件可确定初参数，从而可确定整个结构的状态<sup>[10,12,15]</sup>。

### 3 计算示例

一阶梯形圆形水池，其内径为  $R=4.0\text{m}$ ，各节高  $H=4.0\text{m}$ ，上节壁厚  $h_1=0.3\text{m}$ ，下节壁厚  $h_2=0.4\text{m}$ ，上节受线性变化的分布荷载  $q=1.0 \times 10^4 \text{kN/m}^3$ ，下节受均布荷载  $p=6.0 \times 10^4 \text{kN/m}^2$ ，两节交界处作用有集中荷载  $Q=5.0 \times 10^4 \text{kN/m}$ ，材料弹性模量  $E=3 \times 10^7 \text{kN/m}^2$ ，剪切模量  $G=1.25 \times 10^7 \text{kN/m}^2$ ，剪切修正系数  $k=5/6$ 。结构受力简图如图 3 所示。

考虑剪切变形影响和不考虑剪切变形影响，采用传递矩阵方法计算的挠度、转角、剪力、弯矩结果如图 4—图 7 所示。计算中，当不考虑池壁剪切变形时，取参数  $C=1.0 \times 10^{26} \text{kN/m}$  (理论上应取无

穷大)。

为检验传递矩阵法的正确性，同时还采用 Ansys 10.0 中的 Plane42 单元进行了有限元分析，单元属性 KEYOPT(3)=1，即设为轴对称单元，网格划分时单元尺寸设定为 AESIZE=0.01。池壁中心线的水平挠度计算结果如图 4 所示；在 Ansys 的轴对称分析中截面转角无法计算，故没有给出结果。为方便与传递矩阵法计算的池壁截面弯矩、剪力结果进行对比，选取  $x/2H=0-1.0$  共 11 个横截面，对截面一侧所有单元边  $x$  方向正应力、 $y$  方向剪应力进行积分，计算出整个截面的合力，结果如图 6、图 7 所示，单元边应力计算时采用了最小二乘法进行应力修匀。

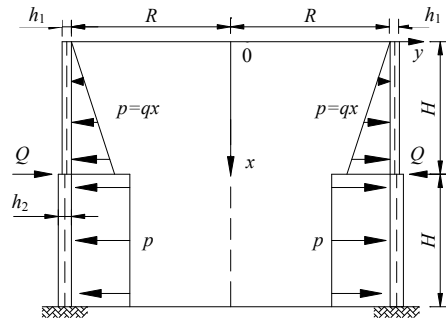


图 3 阶梯形圆形水池

Fig.3 Stepped circular water tank

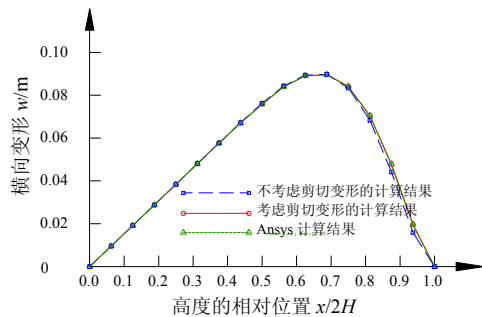


图 4 阶梯形圆形水池的横向变形

Fig.4 Transverse deformation of stepped circular water tank

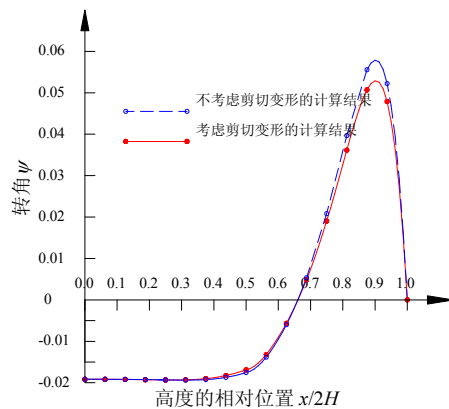


图 5 阶梯形圆形水池的转角

Fig.5 Rotating angle of stepped circular water tank

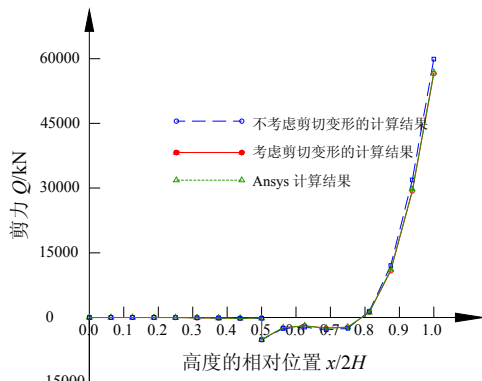


图 6 阶梯形圆形水池的剪力

Fig.6 Shear force of stepped circular water tank

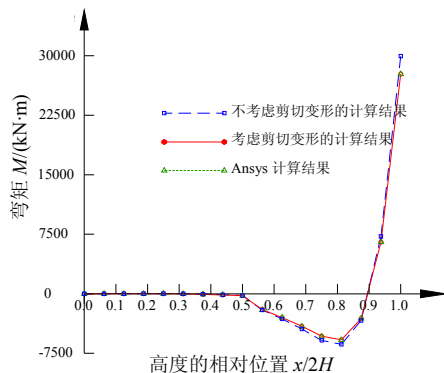


图 7 阶梯形圆形水池的弯矩

Fig.7 Moment of stepped circular water tank

两种方法及用 Ansys 所计算的挠度、转角、剪力、弯矩最不利结果比较如表 1 所示。

表 1 两种方法及 Ansys 的最不利结果比较

Table 1 Extreme values comparing of two methods and Ansys

比较项目	横向变形/mm	转角	剪力/(kN/m)	弯矩/(kN·m/m)
不考虑剪切变形	0.08975	0.05557	59901.4	29938.0
考虑剪切变形	0.08968	0.05070	56530.2	27691.3
误差/(%)	-0.078	-8.764	-5.628	-7.505
Ansys 结果	0.08952	/	57034.5	27988.6
误差/(%)	-0.256		-4.786	-6.511

从表 1 可以看出, Ansys 结果与本文考虑剪切变形的传递矩阵法结果相差不大, 最大误差 1.074%。弯矩值证明本文方法是正确的。对比考虑剪切变形与不考虑剪切变形方法, 可以看出剪切变形对对横向变形影响较小(由式(8)知, 环向轴力与横向变形成线性关系, 故剪切变形对环向轴力影响也较小), 但对弯矩、剪力有一定的影响, 如弯矩最大值间的误差达 7.505%、剪力最大值间的误差达 5.628%。

## 4 结论

(1) 考虑剪切变形影响, 厚壁圆形水池微分方

程式(10)与 Winkler 地基上 Timoshenko 梁微分方程一致; 当不考虑剪切变形影响时, 式(10)可退化为圆形水池薄壳理论, 此时微分方程与 Winkler 地基上 Euler 梁的微分方程一致。因此本文所建立的圆形水池中厚壳理论是从薄壳到中厚壳都适应的通用模型。

(2) 由于式(10)与 Winkler 地基上 Timoshenko 梁微分方程一致, 因此本文所建立的圆形水池微分方程初参数解式(11)可作为 Winkler 地基上 Timoshenko 梁求解的方法。本文成果丰富了弹性地基梁的计算理论。

(3) 从算例的计算结果可以看出, 当圆形水池池壁较厚时, 考虑剪切变形影响的中厚壳理论与不考虑剪切变形影响的薄壳理论计算结果间有一定偏差, 说明剪切变形对结构受力有一定影响。其中剪切变形对弯矩、剪力影响比对环向力、横向变形影响大。

(4) 考虑剪切变形影响计算的弯矩、剪力等比不考虑剪切变形影响的计算结果偏小, 圆形水池采用薄壳理论进行分析偏安全。

## 参考文献:

- [1] 湖北给水排水设计院. 钢筋混凝土圆形水池设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1977: 12-74.  
Hubei Design Institute of Water Supply and Drainage. Design of reinforced concrete circular water tank [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1977: 12-74. (in Chinese)
- [2] 雷朝华. 大型钢筋混凝土圆形水池池壁裂缝控制研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2004: 17-39.  
Lei Chaohua. The research on crack resistance of huge reinforced concrete cylindrical tank's wall [D]. Changsha: Hunan University, 2004: 17-39. (in Chinese)
- [3] 李明义. 大型预应力混凝土圆形水池受力分析与配筋[D]. 天津: 天津大学, 2005: 21-50.  
Li Mingyi. Analysis of stress and distributed prestressed strands of large-scale circular prestressed concrete water tank [D]. Tianjin: Tianjin University, 2005: 21-50. (in Chinese)
- [4] 王晖, 李明义, 王长祥. 环向预应力筋分布对预应力圆形水池应力的影响[J]. 特种结构, 2005, 22(4): 22-25.  
Wang Hui, Li Mingyi, Wang Changxiang. Influence of hoop prestress distribution on stress of circular prestressed water tank [J]. Special Structures, 2005, 22(4): 22-25. (in Chinese)
- [5] Melerski E S. Simple elastic analysis of axisymmetric cylindrical storage tanks [J]. Journal of Structural

- Engineering, ASCE, 1991, 117(11): 3239—3260.
- [6] Malhotra P K, Veletsos A S. Uplifting analysis of base plates in cylindrical tanks [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120(12): 3489—3505.
- [7] Moncarz P D, Griffith M, Noakowski P. Collapse of a reinforced concrete dome in a wastewater treatment plant digester tank [J]. Journal of Performance of Constructed Facilities, ASCE, 2007, 21(1): 4—12.
- [8] 杨耀乾. 薄壳理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2001: 76—166, 189.  
Yang Yaogan. Thin shell theory [M]. Beijing: China Railway Press, 2001: 76—166, 189. (in Chinese)
- [9] 何德湛. 无粘结预应力技术在圆形水池中的推广和应用[J]. 土木工程学报, 2002, 35(4): 109—110.  
He Dezhan. Application of unbonded prestress technique to circular water tank [J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(4): 109—110. (in Chinese)
- [10] 芮筱亭, 陆毓琪, 何斌. 多体系统传递矩阵法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
Rui Xiaoting, Lu Liuqi, He Bin. Transfer matrix method of multi-body system [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [11] 刘庆潭, 倪国荣. 结构分析中的传递矩阵法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997.  
Liu Qingtan, Ni Guorong. Transfer matrix method of structural analysis [M]. Beijing: China Railway Press, 1997. (in Chinese)
- [12] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008.  
Xia Guiyun, Li Chuanxi. Timoshenko beam theory and its applications [M]. Beijing: Chinese Communications Press, 2008. (in Chinese)
- [13] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1993.  
He Fubao, Shen Yapeng. Theory of plate and shell [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1993. (in Chinese)
- [14] Aydogan Metin. Stiffness-matrix formulation of beams with shear effect on elastic foundation [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1995, 121(9): 1265—1270.
- [15] 金在津, 谢祚水, 古长江. 船舶计算结构力学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1990.  
Jin Zaijin, Xie Zuoshui, Gu Changjiang. Computing mechanics of ship structures [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1990. (in Chinese)

## 附录:

$$a_1(x) = \text{ch}\alpha x \cos \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \text{sh}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$b_1(x) = \frac{\text{ch}\alpha x \sin \beta x}{2\beta} + \frac{\text{sh}\alpha x \cos \beta x}{2\alpha} ; \quad c_1(x) = -\frac{\text{sh}\alpha x \sin \beta x}{2\alpha\beta D} ;$$

$$d_1(x) = \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\text{ch}\alpha x \sin \beta x + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\text{sh}\alpha x \cos \beta x}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2 D} ;$$

$$a_2(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \text{sh}\alpha x \cos \beta x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} \text{ch}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$b_2(x) = \text{ch}\alpha x \cos \beta x + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \text{sh}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$c_2(x) = \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\text{ch}\alpha x \sin \beta x - \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\text{sh}\alpha x \cos \beta x}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2 D} ;$$

$$d_2(x) = -\frac{\text{sh}\alpha x \sin \beta x}{2\alpha\beta D} ;$$

$$a_3(x) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 D}{\alpha\beta} \cdot [\alpha \text{ch}\alpha x \sin \beta x + \beta \text{sh}\alpha x \cos \beta x] ;$$

$$b_3(x) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 D}{2\alpha\beta} \cdot \text{sh}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$c_3(x) = \text{ch}\alpha x \cos \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \text{sh}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$d_3(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} (\beta \text{sh}\alpha x \cos \beta x - \alpha \text{ch}\alpha x \sin \beta x) ;$$

$$a_4(x) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 D}{2\alpha\beta} \cdot \text{sh}\alpha x \sin \beta x ;$$

$$b_4(x) = D \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} \text{ch}\alpha x \sin \beta x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \text{sh}\alpha x \cos \beta x \right] ;$$

$$c_4(x) = \frac{\text{sh}\alpha x \cos \beta x}{2\alpha} + \frac{\text{ch}\alpha x \sin \beta x}{2\beta} ;$$

$$d_4(x) = \text{ch}\alpha x \cos \beta x - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \text{sh}\alpha x \sin \beta x .$$

$$\text{式中: } \alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{Eh}{4DR^2}} + \frac{Eh}{4CR^2}} ; \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{Eh}{4DR^2}} - \frac{Eh}{4CR^2}} .$$