

文章编号: 1000-4750(2012)06-0270-09

带弹性隔板圆柱形储液罐的流-固耦合特性研究

王佳栋, 周 叮, 刘伟庆

(南京工业大学土木工程学院, 南京 210009)

摘 要: 该文研究带有环形弹性隔板的部分充液刚性圆柱罐中液体与隔板的耦合振动特性。将液体域分割成两个圆柱子域和两个圆环柱子域, 利用分离变量法和叠加原理求得各子域内液体运动势函数的解。将环形薄板的湿模态用干模态展开以求解环形薄板与液体耦合振动的微分方程。对液体子域间的界面连续条件作 Fourier 展开并对表面波方程作 Bessel 展开, 得到环形薄板与液体耦合振动的频率和对应模态。数值结果与流-固耦合专用软件 ADINA 的结果进行了比较, 显示出很好的一致性。

关键词: 流固耦合; 液体子域; 振型函数; 晃动模态; 膨胀模态

中图分类号: TB126; O323; TQ053.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.08.0600

STUDY ON COUPLED VIBRATION CHARACTERISTICS OF A CYLINDRICAL TANK WITH A FLEXIBLE ANNULAR BAFFLE

WANG Jia-dong, ZHOU Ding, LIU Wei-qing

(College of Civil Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: The coupled vibration characteristics of liquid and a flexural annular baffle in a cylindrical rigid tank were studied. The complicated fluid domain is separated into four simple sub-domains composed of two circular columns and two annular columns, respectively. The velocity potential functions corresponding to every fluid sub-domain were analytically solved by using the separation variable method and the decomposition method. The dry-modal functions were used to expand the wet modes in order to solve the differential equation of coupled vibration of the baffle and liquid. Based on the consistent conditions of liquid movement between the sub-domain interfaces and the surface wave equation of fluid, the unknown coefficients in the solutions were determined by using the Fourier series expansions and the Bessel series expansions. Finally, the eigenvalue equation was obtained. The coupled frequencies were numerically calculated by using the searching root method for non-linear equations. The convergence study shows high accuracy of the present method. The numerical results were compared with those obtained from the ADINA finite element software. An excellent agreement has been achieved.

Key words: fluid-solid interaction; fluid sub-domain; modal shape function; sloshing mode; bulging mode

拥有自由表面波的腔体储液系统均可产生晃动, 其中包括固定在地面上的各种储液罐和由运载器运载的飞行器的燃料罐、油轮上的储油罐、油罐车上的储油罐等^[1-3]。上述种种充液系统中液体在外力激励下产生的晃动作用于结构上往往会

导致结构的失稳和破坏。工程中, 常用隔板来控制液体的晃动, 其中以环形隔板的应用最为广泛^[4-5], 在以往的研究中往往假设隔板为刚性, 但实验和数值模拟的结果均表明: 隔板的柔性对阻尼、频率及模态均有影响^[6-7]。因此, 研究带环形

收稿日期: 2010-08-23; 修改日期: 2011-01-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172123); 江苏省研究生科研创新计划项目(CX10B_162Z)

通讯作者: 周 叮(1957—), 男, 江苏阜宁人, 教授, 博士, 江苏省力学学会常务理事, 国际交流合作部主任, 从事结构动力学研究

(E-mail: dingzhou57@yahoo.com).

作者简介: 王佳栋(1984—), 男, 安徽砀山人, 博士, 从事流-固耦合研究(E-mail: wjd1984@gmail.com);

刘伟庆(1964—), 男, 江苏武进人, 教授, 博士, 副校长, 江苏省振动工程学会、力学学会副理事长, 从事结构抗震控制研究

(E-mail: wqliu@njut.edu.cn).

弹性隔板的部分充液刚性圆柱罐中液体与弹性隔板的耦合振动特性具有重要意义。

在处理弹-液耦合的问题时，目前主要有两种研究思路：一种是不考虑液体的表面波动，将液体的影响转化到结构的质量矩阵中，也就是将液体看作是附着于结构上的广义分布质量，此时，液体只有动能而没有势能，即所谓的“附连水质量法”^[8]；另一种则考虑液体表面波的作用，此时系统既有动能也有重力势能，其模态则同时包含以固体变形为主的膨胀模态(bulging mode)和以液面晃动为主的晃动模态(sloshing mode)，其主要方法是势函数分解法^[9-10]。在假设液体为理想流体、自由表面作微幅波动、储液罐为刚性、环形隔板为柔性的条件下，本文将有关环形隔板的圆柱形储液罐中的液体分成四个子域，利用分离变量法和势函数分解法，分别求解每个子域内液体的势函数，对各子域交界面条件和自由表面的波动方程分别作 Fourier 和 Bessel 展开，以环形薄板的干模态振型函数序列将湿模态展开来求解环形薄板与液体耦合振动的微分方程，最终确定出所有未知系数，使问题得到解决^[11]。

1 基本方程

考虑如图 1 所示的带有环形隔板竖向放置的圆柱型储液罐，罐壁、罐底均为刚体；环形隔板为内边自由、外边固支的弹性薄板；液体为无粘、无旋、不可压的理想液体。储液罐内径 R_2 ，环形隔板内径 R_1 ，隔板中面到自由液面和罐底的距离分别为 h_1 和 h_2 ，隔板厚度为 h 。采用柱坐标分析液体和薄板的运动，设环形薄板的挠度为 $w(r, \theta, t)$ ，密度为 ρ_p ，弹性模量为 E ，泊松比为 ν 。由于隔板厚度 h 远小于其他尺寸，其厚度可以忽略不计，于是可按照图 2 所示将液体区域分割成四个子域： $\Omega_i (i=1,2,3,4)$ ，液体密度为 ρ_l ，子域 Ω_i 内的速度势为 $\varphi_i(r, \theta, z, t)$ 。根据液体动力学理论，理想液体的速度势应该满足以下 Laplace 方程：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Ω_i 中任意点处的速度为：

$$v_r = \partial \varphi_i / \partial r, \quad v_\theta = \partial \varphi_i / (r \partial \theta), \quad v_z = \partial \varphi_i / \partial z \quad (2)$$

由板壳振动理论，环形隔板的挠度 $w(r, \theta, t)$ 满足：

$$D \nabla^4 w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_p(r, \theta, t) \quad (3)$$

式中： F_p 为液动压力； $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ 为板的弯曲刚度，该方程即为环形薄板与液体耦合振动微分方程。隔板上任意点处的速度为：

$$v_p = \partial w / \partial t \quad (4)$$

由式(2)和式(4)可得隔板与液体的界面条件为：

$$(\partial \varphi_1 / \partial z)|_{z=0} = (\partial \varphi_3 / \partial z)|_{z=0} = \partial w / \partial t \quad (5)$$

液体小幅晃动时，自由液面的波动方程为：

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=h_1} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

罐壁、罐底处液体的边界条件为：

$$\begin{aligned} (\partial \varphi_1 / \partial r)|_{r=R_2} = 0, \quad (\partial \varphi_3 / \partial z)|_{z=-h_2} = 0, \\ (\partial \varphi_3 / \partial r)|_{r=R_2} = 0, \quad (\partial \varphi_4 / \partial z)|_{z=-h_2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由流体动力学中线性化的 Bernoulli 方程，可知作用于环形隔板上的液动压力 F_p 为：

$$F_p(r, \theta, t) = \rho_l \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} - \rho_l \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (8)$$

设 P 为液体域内的任意一点， Ω_{i_1} 与 Ω_{i_2} ($i_1 < i_2$) 为相互接触的液体子域，其接触界面为 $\Gamma_k (k=1,2,3)$ ，由图 2 得到三元有序组 $(i_1, i_2, k) \in \{(1,2,1), (2,4,2), (3,4,3)\}$ 。显然， Ω_{i_1} 与 Ω_{i_2} 在界面 Γ_k 处的势函数连续条件为：

$$\varphi_{i_1} \Big|_{P \in \Gamma_k} = \varphi_{i_2} \Big|_{P \in \Gamma_k} \quad (9)$$

设 τ 与 n 为各液体子域界面的切向量和法向量，由式(9)可知 $(\partial \varphi_{i_1} / \partial \tau)|_{P \in \Gamma_k} = (\partial \varphi_{i_2} / \partial \tau)|_{P \in \Gamma_k}$ 自然成立，由此可得 Ω_{i_1} 与 Ω_{i_2} 在界面 Γ_k 处的速度连续条件为：

$$(\partial \varphi_{i_1} / \partial n)|_{P \in \Gamma_k} = (\partial \varphi_{i_2} / \partial n)|_{P \in \Gamma_k} \quad (10)$$

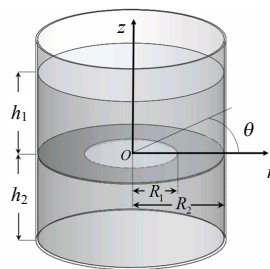


图 1 储液罐及隔板

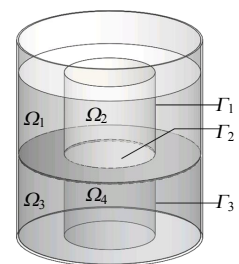


图 2 液体子域及界面

Fig.1 Tank and baffle Fig.2 Sub-domains and interfaces

2 环形隔板的湿模态

自由振动时，环形隔板上任意一点的运动均可看作是简谐振动，此时可将挠度函数设为：

$$w(r, \theta, t) = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} W_m(r) \cos(m\theta) \quad (11)$$

式中: $j = \sqrt{-1}$; ω 为流-固耦合系统的频率; W_m 为板的湿模态。由薄板振动理论可知真空中环形隔板的固有模态(即干模态)是一个正交完备的函数空间, 因此可将其作为环形隔板湿模态的展开函数, 于是有:

$$W_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^p W_{mn}(\kappa_{mn} r) \quad (12)$$

式中: A_{mn}^p ($n=1, 2, 3, \mathbf{L}$) 为展开系数; $W_{mn}(\kappa_{mn} r)$ 为环形隔板干模态, 由薄板自由振动微分方程可知:

$$W_{mn}(\kappa_{mn} r) = a_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) + b_{mn} I_m(\kappa_{mn} r) + c_{mn} N_m(\kappa_{mn} r) + d_{mn} K_m(\kappa_{mn} r) \quad (13)$$

式中: $J_m(\kappa_{mn} r)$ 为第一类贝塞尔函数; $N_m(\kappa_{mn} r)$ 为第二类贝塞尔函数; $I_m(\kappa_{mn} r)$ 为第一类修正贝塞尔函数; $K_m(\kappa_{mn} r)$ 为第二类修正贝塞尔函数, 系数 a_{mn} 、 b_{mn} 、 c_{mn} 、 d_{mn} 则由环形薄板的边界条件确定。设 $w_{mn} = W_{mn}(\kappa_{mn} r) \cos(m\theta)$, 由薄板自由振动微分方程可得 w_{mn} 满足:

$$\nabla^4 w_{mn} - \kappa_{mn}^4 w_{mn} = 0 \quad (14)$$

将式(8)、式(11)~式(12)代入式(3)即可将薄板与液体耦合振动微分方程化为:

$$e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^p (D\nabla^4 w_{mn} - \rho_p h \omega^2 w_{mn}) = \rho_l \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} - \rho_l \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (15)$$

3 速度势函数的求解

当液体自由晃动时, 若自由表面做微幅波动, 线性化后, 其液面上任一点的运动亦作简谐振动, 可将速度势函数设为:

$$\varphi_i(r, \theta, z, t) = j\omega e^{j\omega t} \Phi_i(r, \theta, z) \quad (16)$$

式中: $j = \sqrt{-1}$; Φ_i 为液体势的振型函数。将式(16)分别代入式(1)~式(2)、式(6)~式(7)和式(9)~式(10)得到:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= 0, & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= 0, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_1 \Big|_{z=h_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_2 \Big|_{z=h_1} = 0 \quad (19)$$

$$\Phi_{i_1} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_k} = \Phi_{i_2} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_k} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial n} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_k} = \frac{\partial \Phi_{i_2}}{\partial n} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_k} \quad (21)$$

从式(17)~式(21)可以看出 Φ_i 的控制方程为二阶线性偏微分方程, 其边界条件均为线性边界条件。显而易见, 可以利用叠加原理来求解 Φ_i , 在此把 Φ_i 分解为:

$$\Phi_i = \Phi_i^a + \Phi_i^b + \Phi_i^c \quad (22)$$

进一步考察图 2, 可将液体子域分为两类: 一类为有自由表面(用 Γ_i^S 表示), 另一类为无自由表面。液体子域的外表面则可以分为与罐底平行的上下底面(用 Γ_i^B 表示)和与罐壁平行的圆柱面(用 Γ_i^W 表示)两种情况。按上述约定, Φ_i^a 、 Φ_i^b 、 Φ_i^c 外表面的边界条件如下:

1) 如果 Φ_i 有自由表面 Γ_i^S , 则 Φ_i^a 、 Φ_i^b 、 Φ_i^c 分别满足:

$$\frac{\partial \Phi_i^a}{\partial r} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^W} = 0, \quad \Phi_i^a \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^S} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Phi_i^b}{\partial z} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^B} = 0, \quad \Phi_i^b \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^S} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Phi_i^c}{\partial z} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^S} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_i^c \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^S} = 0 \quad (25)$$

2) 如果 Φ_i 没有自由表面 Γ_i^S , 则 $\Phi_i^c = 0$, 且 Φ_i^a 与 Φ_i^b 分别满足:

$$\frac{\partial \Phi_i^a}{\partial r} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^W} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i^b}{\partial z} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_i^B} = 0 \quad (26)$$

可以看到, Φ_i^a 对应于 Γ_i^W 为刚性且自由表面无波动, Φ_i^b 对应于 Γ_i^B 为刚性且自由表面无波动, 若 Φ_i 有自由表面, 则 Φ_i^c 对应于 Γ_i^W 和 Γ_i^B 均为刚性且自由表面微幅波动; 若 Φ_i 无自由表面, 则 $\Phi_i^c = 0$ 。根据式(17)~式(22), 可以将各子域液体势的振型函数分解为:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^a + \Phi_1^b + \Phi_1^c, & \Phi_2 &= \Phi_2^a + \Phi_2^b + \Phi_2^c, \\ \Phi_3 &= \Phi_3^a + \Phi_3^b, & \Phi_4 &= \Phi_4^a + \Phi_4^b \end{aligned} \quad (27)$$

在此设有序对 $(i, q) \in \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$, 于是各子域振型函数的各个分量可表示成 Φ_i^q 。因各液体子域均为圆柱或圆环形柱, 则 $\Phi_i^q(\theta) = \Phi_i^q(\theta + 2\pi)$ 自然

成立, 由此可以得:

$$\Phi_i = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{im}^q \cos(m\theta), \quad \Phi_i^q = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{im}^q \cos(m\theta) \quad (28)$$

利用分离变量法即可求得各子域液体势的各个振型函数分量 Φ_{im}^q , 取如下的无量纲坐标和参数:

$$\begin{aligned} \xi &= r/R_2, \quad \zeta = z/R_2, \quad \Lambda = \omega\sqrt{R_2/g}, \\ \alpha &= R_1/R_2, \quad \beta_1 = h_1/R_2, \quad \beta_2 = h_2/R_2 \end{aligned} \quad (29)$$

并引入符号:

$$\delta_m^1 = \begin{cases} 1, & \text{当 } m=0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } m \neq 0 \text{ 时} \end{cases}, \quad \delta_m^2 = \begin{cases} 1, & \text{当 } m \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } m=0 \text{ 时} \end{cases} \quad (30)$$

可得到液体势振型函数的分量解为:

$$\begin{aligned} \Phi_{1m}^a &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn}^a [e^{\lambda_n^m \zeta} - e^{\lambda_n^m (2\beta_1 - \zeta)}] [N'_m(\lambda_n^m \alpha) \cdot \\ & J_m(\lambda_n^m \gamma) - J'_m(\lambda_n^m \alpha) N_m(\lambda_n^m \gamma)] + \\ & A_{100}^a \delta_m^1 (\zeta - \beta_1) \end{aligned} \quad (31)$$

其中, λ_n^m 满足

$$\begin{aligned} N'_m(\lambda_n^m \alpha) J'_m(\lambda_n^m) - J'_m(\lambda_n^m \alpha) N'_m(\lambda_n^m) &= 0 \\ \Phi_{1m}^b &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn}^b \cos \frac{(2n-1)\pi\zeta}{2\beta_1} \cdot \\ & \left\{ I_m \left[\frac{(2n-1)\pi\gamma}{2\beta_1} \right] + k_1^b K_m \left[\frac{(2n-1)\pi\gamma}{2\beta_1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

其中, k_1^b 满足

$$\begin{aligned} I'_m \left[\frac{(2n-1)\pi}{2\beta_1} \right] + k_1^b K'_m \left[\frac{(2n-1)\pi}{2\beta_1} \right] &= 0 \\ \Phi_{1m}^c &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn}^c \cosh(\lambda_n^m \zeta) [N'_m(\lambda_n^m \alpha) J_m(\lambda_n^m \xi) - \\ & J'_m(\lambda_n^m \alpha) N_m(\lambda_n^m \xi)] + A_{100}^c \delta_m^1 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2m}^a &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn}^a \left[e^{\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \zeta} - e^{\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} (2\beta_1 - \zeta)} \right] J_m \left[\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \xi \right] + \\ & A_{200}^a \delta_m^1 (\zeta - \beta_1) \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $\lambda_n^{(m)}$ 满足 $J'_m[\lambda_n^{(m)}] = 0$

$$\Phi_{2m}^b = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn}^b \cos \frac{(2n-1)\pi\zeta}{2\beta_1} I_m \left[\frac{(2n-1)\pi\gamma}{2\beta_1} \right] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2m}^c &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn}^c \cosh \left[\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \zeta \right] J_m \left[\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \gamma \right] + A_{200}^c \delta_m^1 \\ & \quad (36) \end{aligned}$$

$$\Phi_{3m}^a = \sum_{n=1}^{\infty} A_{4mn}^a [e^{\lambda_n^m \zeta} + e^{-\lambda_n^m (2\beta_2 + \zeta)}] [N'_m(\lambda_n^m \alpha) \cdot$$

$$J_m(\lambda_n^m \xi) - J'_m(\lambda_n^m \alpha) N_m(\lambda_n^m \xi)] + A_{300}^a \delta_m^1 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{3m}^b &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn}^b \cos \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \zeta \right) \left[I_m \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \gamma \right) + k_3^b K_m \cdot \right. \\ & \left. \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \gamma \right) \right] + A_{3m0}^b (\gamma^m + \gamma^{-m}) \delta_m^2 + A_{300}^b \delta_m^1 \end{aligned} \quad (38)$$

其中, k_3^b 满足 $I'_m \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \right) + k_3^b K'_m \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \right) = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{4m}^a &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{4mn}^a \left[e^{\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \zeta} + e^{-\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} (2\beta_2 + \zeta)} \right] J_m \left[\frac{\lambda_n^{(m)}}{\alpha} \gamma \right] + \\ & A_{400}^a \delta_m^1 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{4m}^b &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{4mn}^b \cos \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \zeta \right) I_m \left(\frac{n\pi}{\beta_2} \gamma \right) + A_{4m0}^b \gamma^m \delta_m^2 + \\ & A_{400}^b \delta_m^1 \end{aligned} \quad (40)$$

式(31)~式(40)中 A_{imn}^q ($q=a, b, c; i=1, 2, 3, 4; n=1, 2, \mathbf{L}; m=0, 1, 2, \mathbf{L}$) 为待定系数。

4 特征方程

将式(31)~式(40)代入式(27)即可以求得含有待定系数 A_{imn}^q 的 Φ_{im} ($i=1, 2, 3, 4$), 再由式(16)和式(28)即可以得 φ_i 。将 φ_i 和 $w(r, \theta, t)$ 代入式(5)即得:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{1m}^a}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \left. \frac{\partial \Phi_{3m}^a}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = R_2 W_m(\xi R_2) \quad (41)$$

设 $\kappa_{mn} R_2 = \zeta_{mn}$, 将 φ_i 代入式(15), 再利用式(14)进行代换即得:

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^p \zeta_{mn}^4 W_{mn}(\zeta_{mn} \xi) - \Lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^p W_{mn}(\zeta_{mn} \xi) &= \\ \sigma \Lambda^2 (\Phi_{3m} - \Phi_{1m})|_{\zeta=0} \left(\text{其中 } \tau = \frac{D}{\rho_p g h R_2^3}, \sigma = \frac{\rho_l}{\rho_p h} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

由子域间界面条件式(18)~式(21)可以得到 8 个含有待定系数的级数方程, 联立式(41)和式(42)得 11 个含有待定系数的级数方程。对这 11 个方程分别作 Fourier 展开(对 ζ)或者 Bessel 展开(对 ξ), 具体见附录。将所有的级数均截断至 N 阶, 这样就可以得到关于待定系数 $A_{im}^q = (A_{im1}^q, \mathbf{L}, A_{imN}^q)^T$ 与 $A_m^p = (A_{m1}^p, \mathbf{L}, A_{mN}^p)^T$ 的方程式(43)。

$$\begin{bmatrix} [b_{4\bar{n}\bar{n}}^{(1)}] & [b_{3\bar{n}\bar{n}}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [b_{4\bar{n}\bar{n}}^{(2)}] & [b_{3\bar{n}\bar{n}}^{(2)}] & [0] & [0] & [a_{4\bar{n}\bar{n}}^{(2)}] & [0] & [a_{3\bar{n}\bar{n}}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [b_{1\bar{n}\bar{n}}^{(3)}] & [b_{2\bar{n}\bar{n}}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [b_{1\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [b_{2\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [0] & [a_{2\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [0] & [a_{1\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [c_{2\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [c_{1\bar{n}\bar{n}}^{(4)}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [a_{4\bar{n}\bar{n}}^{(5)}] & [a_{2\bar{n}\bar{n}}^{(5)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [b_{4\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [0] & [0] & [b_{2\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [a_{4\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [a_{2\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [a_{3\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [0] & [c_{2\bar{n}\bar{n}}^{(6)}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [a_{3\bar{n}\bar{n}}^{(7)}] & [a_{1\bar{n}\bar{n}}^{(7)}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [b_{3\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [b_{1\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [0] & [a_{4\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [0] & [a_{3\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [a_{1\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [0] & [c_{1\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] & [p_{\bar{n}\bar{n}}^{(8)}] \\ [0] & [0] & [0] & [b_{2\bar{n}\bar{n}}^{(9)}] & [0] & [a_{2\bar{n}\bar{n}}^{(9)}] & [0] & [0] & [c_{2\bar{n}\bar{n}}^{(9)}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [b_{1\bar{n}\bar{n}}^{(10)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [a_{1\bar{n}\bar{n}}^{(10)}] & [0] & [c_{1\bar{n}\bar{n}}^{(10)}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [a_{1\bar{n}\bar{n}}^{(11)}] & [0] & [0] & [p_{\bar{n}\bar{n}}^{(11)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{4m}^b \\ A_{3m}^b \\ A_{4m}^b \\ A_{2m}^b \\ A_{4m}^a \\ A_{2m}^a \\ A_{3m}^a \\ A_{1m}^a \\ A_{2m}^c \\ A_{1m}^c \\ A_{1m}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

设式(43)中的系数矩阵为 $[A]$ ，其中下标含 $\bar{n}\bar{n}$ 的元素为 $N \times N$ 阶的对角阵，下标含 $\bar{n}n$ 的元素为 $N \times N$ 阶的非对角阵。子阵中各元素均由高斯数值积分给出。式(43)是系数矩阵中含有频率参数 Λ^2 的 $11N \times 11N$ 阶的代数方程组。要使该方程组有非零解，其系数行列式必为零，即 $|A| = 0$ 。由此可得一个关于 Λ^2 的非线性方程，对于每个 m ，求此方程均可得到一簇根 $\Lambda_{mn}^2 (n = 1, 2, 3, \dots, L)$ ， Λ_{mn}^2 即为环向波节数为 m 的第 n 阶流-固耦合系统模式所对应的频率参数。可将 Λ_{mn}^2 分成两个序列：晃动模式(sloshing mode: 以液体晃动为主的模式)的频率参数 Λ_{smn}^2 和膨胀模式(bulging mode: 以环形隔板弹性位移为主的模式)的频率参数 Λ_{bmn}^2 。将各 Λ_{mn}^2 代入式(42)，可解得对应的 A_{im}^q 和 A_{im}^p 。

5 算例分析

在下面的算例中，均取 $R_2 = 1\text{m}$ ， $h_1 + h_2 = 1\text{m}$ ， $h = 2\text{mm}$ ， $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ， $E = 2.1 \times 10^{11}\text{Pa}$ ， $\rho_p = 7850\text{kg/m}^3$ ， $\rho_f = 1000\text{kg/m}^3$ ， $\nu = 0.3$ 。首先进行收敛性分析，设隔板内径 $\alpha = 0.5$ ，隔板位置分别取 $\beta_1 = 0.2, 0.4$ 。考察 3 个不同的级数项 $N = 15, 16, 17$ ，分别计算 $m = 0$ 和 $m = 1$ 时第一阶晃动模式(sloshing mode)的频率参数 Λ_{sm1}^2 和第一阶膨胀模式(bulging mode)的频率参数 Λ_{bm1}^2 ，如表 1 所示。

表 1 Λ_{sm1}^2 与 Λ_{bm1}^2 的收敛性

Table 1 Convergence of Λ_{sm1}^2 and Λ_{bm1}^2

m	N	Λ_{sm1}^2		Λ_{bm1}^2	
		0.2	0.4	0.2	0.4
0	15	2.572	3.512	19.614	16.934
	16	2.571	3.512	19.674	17.044
	17	2.573	3.513	19.615	17.003
1	15	0.881	1.313	22.526	19.438
	16	0.881	1.313	22.607	19.517
	17	0.882	1.314	22.600	19.500

从表 1 中看到，当 $N = 15$ 时，本文方法可保证 Λ_{sm1}^2 小数点后的 2 位数字有效，当 $N = 16$ 时，本文方法可保证 Λ_{bm1}^2 小数点后 1 位数字有效。为验证本文方法的正确性，使用流-固耦合专用软件 ADINA 对此问题进行了分析，以供比较。下面的对比算例中，设 $\alpha = 0.5$ ， $\beta_1 = 0.3$ 。ADINA 在求解频率时无法自动将其按环向波节数分类，为了比较晃动模式(sloshing mode)和膨胀模式(bulging mode)两种模式的频率，用 ADINA 求出了系统的前 44 阶频率，将其代入式(29)即可求出对应的频率参数，与本文的结果对比如表 2 所示。从表 2 中看到，本文方法解与 ADINA 解的最大差异为 1.07%，平均差异仅为 0.27%，该结果验证了本文方法的正确性，并说明本文具有较高的精度。

表 2 本文方法解与 ADINA 解(上标 s 表示晃动模式(sloshing mode)，上标 b 表示膨胀模式(bulging mode))

Table 2 Comparisons of the present solutions and ADINA solutions (superscript s represents sloshing mode, superscript b represents bulging mode)

本文解 (Λ_{mn}^2)	$m=1 n=1$	$m=2 n=1$	$m=0 n=1$	$m=3 n=1$	$m=4 n=1$	$m=1 n=2$	$m=5 n=1$	$m=2 n=2$	$m=0 n=2$	$m=6 n=1$	$m=3 n=2$
	1.126 ^s	2.283 ^s	3.185 ^s	3.595 ^s	4.901 ^s	5.167 ^s	6.148 ^s	6.601 ^s	6.873 ^s	7.336 ^s	7.939 ^s
ADINA (Λ_n^2)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$
	1.114 ^s	2.269 ^s	3.171 ^s	3.563 ^s	4.882 ^s	5.144 ^s	6.131 ^s	6.579 ^s	6.855 ^s	7.326 ^s	7.921 ^s
相对误差	1.07%	0.61%	0.44%	0.89%	0.39%	0.45%	0.28%	0.33%	0.26%	0.14%	0.23%

(续表)

本文解(Λ_{mn}^2)	$m=1 n=3$	$m=7 n=1$	$m=4 n=2$	$m=8 n=1$	$m=2 n=3$	$m=0 n=3$	$m=5 n=2$	$m=9 n=1$	$m=3 n=3$	$m=1 n=4$	$m=6 n=2$
	8.465 ^s	8.478 ^s	9.231 ^s	9.588 ^s	9.932 ^s	10.130 ^s	10.487 ^s	10.677 ^s	11.325 ^s	11.692 ^s	11.715 ^s
ADIAN(Λ_n^2)	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$	$n=17$	$n=18$	$n=19$	$n=20$	$n=21$	$n=22$
	8.441 ^s	8.453 ^s	9.221 ^s	9.579 ^s	9.921 ^s	10.121 ^s	10.459 ^s	10.657 ^s	11.309 ^s	11.678 ^s	11.709 ^s
相对误差	0.28%	0.29%	0.11%	0.09%	0.11%	0.09%	0.27%	0.19%	0.14%	0.12%	0.05%
本文解(Λ_{mn}^2)	$m=10 n=1$	$m=4 n=3$	$m=11 n=1$	$m=7 n=2$	$m=2 n=4$	$m=0 n=4$	$m=12 n=1$	$m=5 n=3$	$m=8 n=2$	$m=3 n=4$	$m=1 n=5$
	11.751 ^s	12.671 ^s	12.822 ^s	12.920 ^s	13.166 ^s	13.318 ^s	13.872 ^s	13.982 ^s	14.108 ^s	14.577 ^s	14.846 ^s
ADIAN(Λ_n^2)	$n=23$	$n=24$	$n=25$	$n=26$	$n=27$	$n=28$	$n=29$	$n=30$	$n=31$	$n=32$	$n=33$
	11.721 ^s	12.621 ^s	12.789 ^s	12.787 ^s	13.112 ^s	13.289 ^s	13.858 ^s	13.950 ^s	14.079 ^s	14.545 ^s	14.813 ^s
相对误差	0.26%	0.39%	0.26%	1.03%	0.41%	0.22%	0.10%	0.23%	0.21%	0.22%	0.22%
本文解(Λ_{mn}^2)	$m=6 n=3$	$m=9 n=2$	$m=4 n=4$	$m=2 n=5$	$m=10 n=2$	$m=0 n=5$	$m=7 n=3$	$m=5 n=4$	$m=11 n=2$	$m=0 n=6$	$m=8 n=3$
	15.266 ^s	15.282 ^s	15.945 ^s	16.323 ^s	16.445 ^s	16.447 ^s	16.528 ^s	17.287 ^s	17.598 ^s	17.615 ^b	17.771 ^s
ADIAN(Λ_{mn}^2)	$n=34$	$n=35$	$n=36$	$n=37$	$n=38$	$n=39$	$n=40$	$n=41$	$n=42$	$n=43$	$n=44$
	15.254 ^s	15.275 ^s	15.898 ^s	16.301 ^s	16.428 ^s	16.435 ^s	16.504 ^s	17.241 ^s	17.569 ^s	17.591 ^b	17.739 ^s
相对误差	0.08%	0.05%	0.29%	0.13%	0.10%	0.07%	0.15%	0.27%	0.16%	0.14%	0.18%

6 参数研究

若将式(28)中的 $\Phi_i^c (i=1,2)$ 忽略,可求出忽略表面波时的耦合频率参数 Λ_{Bmn}^2 ,即为不考虑表面波动的液体与环形弹性隔板的耦合频率参数。显然 Λ_{Bmn}^2 对应于膨胀模态(bulging mode),因此 Λ_{bmn}^2 与 Λ_{Bmn}^2 的差异即为液体晃动对环形隔板膨胀模态的影响。环形隔板的位置和环形隔板的内径是影响该流-固耦合系统频率的重要因素,下面分别研究考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{mn}^2 与不考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{Bmn}^2 随 α 和 β_1 的变化规律。考虑 $\beta_1=0.4$,环向波节数 $m=0$ 时,考虑表面波时的耦合频率参数 $\Lambda_{0n}^2 (n=1,2,\mathbf{L},6)$ 与不考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{B01}^2 随 α 的变化规律如图3所示,当环向波节数 $m=1$ 时,考虑表面波时的耦合频率参数 $\Lambda_{1n}^2 (n=13,14,\mathbf{L},17)$ 与不考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{B11}^2 随 α 的变化规律如图4所示;再考虑 $\alpha=0.5$,当环向波节数 $m=0$ 时,考虑表面波时的耦合频率参数 $\Lambda_{0n}^2 (n=4,5,\mathbf{L},9)$ 与不考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{B01}^2 随 β_1 的变化规律如图5所示,当环向波节数 $m=1$ 时,考虑表面波时的耦合频率参数 $\Lambda_{1n}^2 (n=4,5,\mathbf{L},9)$ 与不考虑表面波时的耦合频率参数 Λ_{B11}^2 随 β_1 的变化规律如图6所示。

由图3和图4可以看出,图中每一条 Λ_{mn}^2 的曲线随内径变化时都有一个明显的上升段,这个上升段与相应的 Λ_{Bmn}^2 随内径变化曲线具有相当的一致性,由此可知这个上升段即为 Λ_{mn}^2 中的 Λ_{bmn}^2 部

分,若干个 Λ_{mn}^2 的上升段构成了 Λ_{bmn}^2 随内径的变化规律,显而易见,环形薄板内径越小,液体晃动对膨胀模态(bulging mode)的影响越大,且膨胀模态(bulging mode)所对应的频率越小。

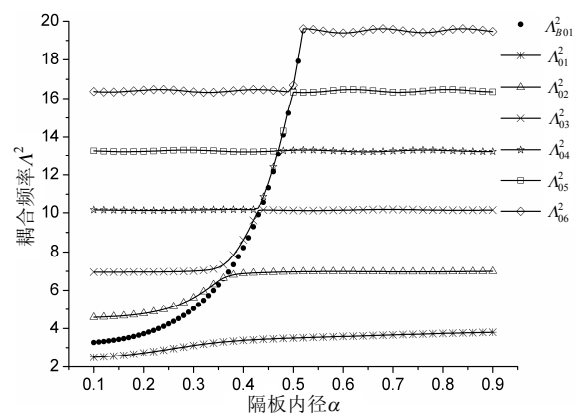


图3 环向波节数为0时耦合频率随 α 变化曲线
Fig.3 Coupled frequencies versus α when $m=0$

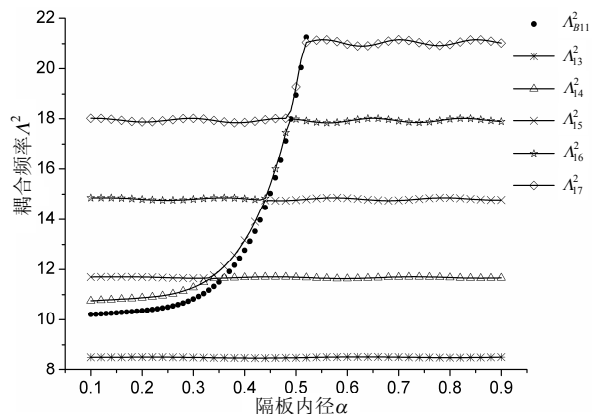


图4 环向波节数为1时耦合频率随 α 变化曲线
Fig.4 Coupled frequencies versus α when $m=1$

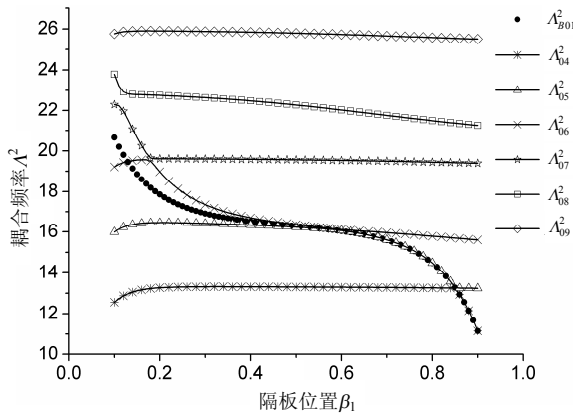


图 5 环向波节数为 0 时耦合频率随 \$\beta_1\$ 变化曲线
Fig.5 Coupled frequencies versus \$\beta_1\$ when \$m=0\$

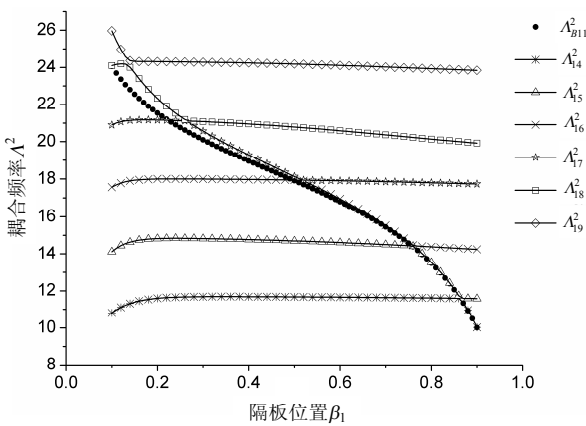


图 6 环向波节数为 1 时耦合频率随 \$\beta_1\$ 变化曲线
Fig.6 Coupled frequencies versus \$\beta_1\$ when \$m=1\$

由图 5 和图 6 可以看出，图 5 和图 6 中部分 \$\Lambda_{mn}^2\$ 随环形隔板位置的变化出现了一个明显的下降段，这个下降段与相应的 \$\Lambda_{bmn}^2\$ 随环形隔板位置的变化曲线具有相当的一致性，由此可知这个下降段即为 \$\Lambda_{mn}^2\$ 中的 \$\Lambda_{bmn}^2\$ 部分。图 5 和图 6 中部分曲线的下降段位于曲线的开始端，而 \$\Lambda_{mn}^2\$ 中的 \$\Lambda_{smn}^2\$ 部分在曲线的开始端应该呈现上升的趋势，因此在曲线端部会出现变化相异的情况。若干个 \$\Lambda_{mn}^2\$ 的下降段构成了 \$\Lambda_{bmn}^2\$ 随隔板位置的变化规律，显而易见，环形薄板离液面越近，液体晃动对膨胀模态(bulging mode)的影响越大，且膨胀模态(bulging mode)所对应的频率越大。在图 3 和图 4 中将求出的 \$\Lambda_{mn}^2\$ 代入式(43)，求解线性方程组即得待定系数，再将其代入式(12)和式(31)~式(40)，可求得对应的模态。以 \$\alpha = 0.5\$，\$\beta_1 = 0.4\$ 为例，图 7 和图 8 分别给出了环向波数为 1 时的晃动模态(sloshing mode)和膨胀模态(bulging mode)。

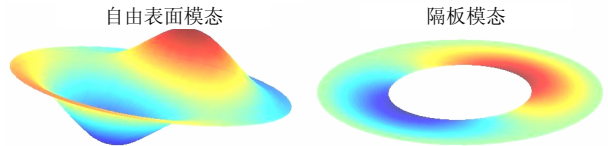


图 7 环向波数 \$m=1\$ 的 sloshing 模态
Fig.7 Sloshing modes when \$m=1\$

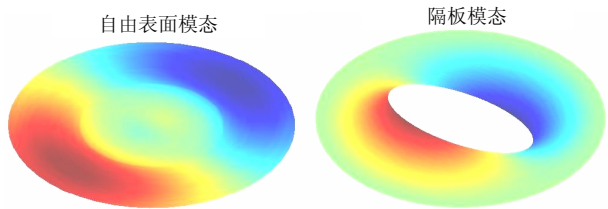


图 8 环向波 \$m=1\$ 的 bulging 模态
Fig.8 Bulging modes when \$m=1\$

7 结论

本文研究了带有弹性环形隔板的刚性圆柱形储液罐的流-固耦合振动特性。本文的特点在于：将液体划分成四个子域，利用势函数叠加法求得各子域振型函数的解析式，用环形薄板的干模态振型函数序列将湿模态展开，由子域液体的界面条件、表面波方程及薄板振动方程共同导出频率方程。收敛性和比较研究验证了本文方法的正确性。本文方法不难推广到罐体带多个防晃板的情况，为减少分析的复杂性并提高分析的精度，液体子域的划分应本着尽可能少的原则，但每个子域的边界条件必须能连续表达。本模型适用于理想流体小幅线性晃动时的流-固耦合动力学分析，本文分析方法得到的势函数一般精确解满足流体运动的微分方程，使用正交完备级数对液面方程、界面方程和板的振动方程作级数展开，因而得到的解具有高精度。

参考文献:

- [1] 温德超, 郑兆昌, 孙焕纯. 储液罐抗震研究的发展[J]. 力学进展, 1995, 25(1): 60-76.
Wen Dechao, Zheng Zhaochang, Sun Huanchun. Development of aseismic researches on liquid storage tanks [J]. Advances in Mechanics, 1995, 25(1): 60-76. (in Chinese).
- [2] 苟兴宇, 马兴瑞, 黄怀德. 流固耦合动力学与航天工程中的流-固-控耦合问题[J]. 航天器工程, 1996, 5(4): 1-14.
Gou Xingyu, Ma Xingrui, Huang Huaide. Fluid-solid-command coupling problems in astronautics engineering and fluid-solid coupling dynamics [J]. Spacecraft Engineering, 1996, 5(4): 1-14. (in Chinese).
- [3] 娜日萨. VLCC 液舱晃荡仿真及结构强度评估方法研

究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2006.

Na Risa. Coupled method of sloshing simulation and structural response evaluation in VLCC tanks [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2006. (in Chinese)

[4] 万水, 朱德懋, 张福祥. 液体防晃研究进展[J]. 弹道学报, 1996, 8(3): 90—94.

Wan Shui, Zhu Demao, Zhang Fuxiang. Developments of researches on liquid slosh suppression [J]. Journal of Ballistics, 1996, 8(3): 90—94. (in Chinese)

[5] 夏益霖, 许婉丽. 火箭液体推进剂防晃实验研究[J]. 强度与环境, 1988, 15(6): 24—30.

Xia Yilin, Xu Wanli. Experiment researches on liquid slosh suppression of rocket liquid propellant [J]. Structure & Environment Engineering, 1988, 15(6): 24—30. (in Chinese)

[6] 梁波, 周科健. 贮箱内刚性和柔性防晃板的实验研究[J]. 宇航学报, 1993, 14(3): 83—89.

Liang Bo, Zhou Kejian. Experiment investigation of flexible and rigid baffles in cylindrical tanks [J]. Journal of Astronautics, 1993, 14(3): 83—89. (in Chinese)

[7] 杨蔓, 李俊峰, 王天舒, 王为. 带环形隔板的圆柱贮箱内液体晃动阻尼分析[J]. 力学学报, 2006, 38(5): 660—

667.

Yang Man, Li Junfeng, Wang Tianshu, Wang Wei. Determination of damping ratio of the small-amplitude liquid sloshing within the cylindrical container with a ring baffle [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(5): 660—667. (in Chinese)

[8] 童予靖, 刘正兴. 流-固耦合问题中的附连水质量研究[J]. 上海力学, 1997, 18(4): 311—320.

Tong Yujing, Liu Zhengxing. Researches on the additional water mass in solid-liquid coupling problem [J]. Chinese Quarterly Mechanics, 1997, 18(4): 311—320. (in Chinese)

[9] Amabili M. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 213(2): 259—299.

[10] Zhou Ding, Liu Weiqing. Bending-torsion vibration of a partially submerged cylinder with an arbitrary cross-section [J]. Applied Mathematical Modeling, 2007, 31(10): 2249—2265.

[11] Amabili M. Vibrations of circular plates resting on a sloshing liquid: Solution of the fully coupled problem [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(2): 261—283.

附录:

Fourier 对 ζ 和 Bessel 对 ξ 展开的具体形式(式中 $\bar{n}=1, 2, \mathbf{L}, \infty$)

Fourier 展开 ($m=0, 1, \mathbf{L}, \infty$):

$$\int_{-\beta_2}^0 \frac{\partial \Phi_{3m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} d\zeta = \int_{-\beta_2}^0 \frac{\partial \Phi_{4m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} d\zeta,$$

$$\int_{-\beta_2}^0 \frac{\partial \Phi_{3m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{\beta_2}\zeta\right) d\zeta = \int_{-\beta_2}^0 \frac{\partial \Phi_{4m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{\beta_2}\zeta\right) d\zeta,$$

$$\int_{-\beta_2}^0 \Phi_{3m} \Big|_{\xi=\alpha} d\zeta = \int_{-\beta_2}^0 \Phi_{4m} \Big|_{\xi=\alpha} d\zeta,$$

$$\int_{-\beta_2}^0 \Phi_{3m} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{\beta_2}\zeta\right) d\zeta = \int_{-\beta_2}^0 \Phi_{4m} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{\beta_2}\zeta\right) d\zeta,$$

$$\int_0^{\beta_1} \frac{\partial \Phi_{1m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\frac{(2\bar{n}-1)\pi\zeta}{2\beta_1} d\zeta =$$

$$\int_0^{\beta_1} \frac{\partial \Phi_{2m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\frac{(2\bar{n}-1)\pi\zeta}{2\beta_1} d\zeta,$$

$$\int_0^{\beta_1} \Phi_{1m} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\frac{(2\bar{n}-1)\pi\zeta}{2\beta_1} d\zeta = \int_0^{\beta_1} \Phi_{2m} \Big|_{\xi=\alpha} \cos\frac{(2\bar{n}-1)\pi\zeta}{2\beta_1} d\zeta .$$

Bessel 展开($m=0$):

$$\int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi = \int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{40}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi,$$

$$\int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi J_0\left[\frac{\mathcal{W}_0^{(0)}}{\alpha}\xi\right] d\xi = \int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{40}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi J_0\left[\frac{\mathcal{W}_0^{(0)}}{\alpha}\xi\right] d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{10}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi = \int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{30}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi = \int_\alpha^1 R_2 W_0(\xi R_2) \xi d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{10}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} [N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) - J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{30}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} [N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) - J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 R_2 W_0(\xi R_2) [N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) - J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] \xi d\xi,$$

$$\int_0^\alpha \Phi_{20} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi = \int_0^\alpha \Phi_{40} \Big|_{\zeta=0} \xi d\xi,$$

$$\int_0^\alpha \Phi_{20} \Big|_{\zeta=0} \xi J_0\left[\frac{\mathcal{W}_0^{(0)}}{\alpha}\xi\right] d\xi = \int_0^\alpha \Phi_{40} \Big|_{\zeta=0} \xi J_0\left[\frac{\mathcal{W}_0^{(0)}}{\alpha}\xi\right] d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \left[\tau \sum_{n=1}^\infty P_{0n} \varsigma_{0n}^4 W_{0n}(\varsigma_{0n} \xi) - \Lambda^2 \sum_{n=1}^\infty P_{0n} W_{0n}(\varsigma_{0n} \xi) \right] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 [\sigma \Lambda^2 (\Phi_{30} - \Phi_{10}) \Big|_{\zeta=0}] \xi d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \left[\tau \sum_{n=1}^\infty P_{0n} \varsigma_{0n}^4 W_{0n}(\varsigma_{0n} \xi) - \Lambda^2 \sum_{n=1}^\infty P_{0n} W_{0n}(\varsigma_{0n} \xi) \right] \cdot$$

$$[N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) - J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 [\sigma \Lambda^2 (\Phi_{30} - \Phi_{10}) \Big|_{\zeta=0}] \cdot$$

$$[N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) - J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] \xi d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \left(\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{10} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi d\xi = 0,$$

$$\int_\alpha^1 \left(\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{10} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi [N'_0(\lambda_n^0 \alpha) J_0(\lambda_n^0 \xi) -$$

$$J'_0(\lambda_n^0 \alpha_1) N_0(\lambda_n^0 \xi)] d\xi = 0,$$

$$\int_0^\alpha \left(\frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{20} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi d\xi = 0,$$

$$\int_0^\alpha \left(\frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{20} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi J_0 \left[\frac{\Phi_0^{(0)}}{\alpha} \xi \right] d\xi = 0.$$

Bessel 展开 ($m \neq 0$):

$$\int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{2m}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi J_m \left[\frac{\Phi_0^{(m)}}{\alpha} \xi \right] d\xi = \int_0^\alpha \frac{\partial \Phi_{4m}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \xi J_m \left[\frac{\Phi_0^{(m)}}{\alpha} \xi \right] d\xi,$$

$$\int_0^\alpha \Phi_{2m} \Big|_{\zeta=0} \xi J_m \left[\frac{\Phi_0^{(m)}}{\alpha} \xi \right] d\xi = \int_0^\alpha \Phi_{4m} \Big|_{\zeta=0} \xi J_m \left[\frac{\Phi_0^{(m)}}{\alpha} \xi \right] d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{1m}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} [N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) - J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 \frac{\partial \Phi_{3m}^a}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} [N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) - J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 R_2 W_m(\xi R_2) [N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) - J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] \xi d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \left[\tau \sum_{n=1}^\infty P_{mn} \zeta_{mn}^4 W_{mn}(\zeta_{mn} \xi) - \Lambda^2 \sum_{n=1}^\infty P_{mn} W_{mn}(\zeta_{mn} \xi) \right] \cdot$$

$$[N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_0(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) - J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] \xi d\xi =$$

$$\int_\alpha^1 [\sigma \Lambda^2 (\Phi_{3m} - \Phi_{1m}) \Big|_{\zeta=0}] \cdot$$

$$[N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_0(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) - J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] \xi d\xi,$$

$$\int_\alpha^1 \left(\frac{\partial \Phi_{1m}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{1m} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi [N'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha) J_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi) -$$

$$J'_m(\lambda_{\bar{n}}^m \alpha_1) N_m(\lambda_{\bar{n}}^m \xi)] d\xi = 0,$$

$$\int_0^\alpha \left(\frac{\partial \Phi_{2m}}{\partial \eta} + \Lambda^2 \Phi_{2m} \right) \Big|_{\zeta=\beta_1} \xi J_m \left[\frac{\Phi_0^{(m)}}{\alpha} \xi \right] d\xi = 0.$$

(上接第 258 页)

- [7] Krajnovic S. Large eddy simulation of flows around ground vehicles and other bluff bodies [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society, A, 2009, 367: 2917—2930.
- [8] Orellano A, Schober M. Aerodynamic performance of a typical high-speed train [C]// Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Fluid Mechanics and Aerodynamics, Elounda, Greece, August 21—23. 2006: 18—25.
- [9] Diedrichs B. Aerodynamic calculations of crosswind stability of a high-speed train using control volumes of arbitrary polyhedral shape [C]// BBAA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics & Applications. Milano, Italy, July, 2008: 1—16.
- [10] CD-adapco Group. STAR-CD version 3.15A methodology [M]. Yokohama: Computational Dynamics Limited, 2002, Chapter 2: 1—14.