文章编号:1003－207(2013)06－0145－07

基于熵测度的三参数区间数信息下的TOPSIS决策方法

闫书丽[1,2],刘思峰[1],朱建军[1],方志耕[1],刘　健[3]

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院,江苏 南京　210016;
2. 河南科技大学数学与统计学院,河南 洛阳　471003;
3. 南京理工大学经济管理学院,江苏 南京　210094)

摘　要:研究基于三参数区间数的排序及决策模型,提出了基于三参数区间数的重心点、中点、长度的可能度排序方法;基于重心点发生可能性最大的三参数区间数分布特点,提出了距离测度公式;建立了基于三参数区间数熵测度的属性权重模型,在此基础上构建了依据 TOPSIS 思想的不确定性决策框架。算例说明了该方法的步骤和有效性。

关键词:不确定性决策;三参数区间数;熵测度;TOPSIS

中图分类号:N945　　　**文献标识码:**A

1　引言

决策问题的复杂性和不确定性加大了科学决策的难度。针对不确定性问题的特点,区间数、模糊数、未确知数、灰色系统理论等得到了应用[1－8],其中,基于区间数的多属性决策问题得到了广泛关注,研究重点集中于区间模糊偏好关系的一致性、顺序加权集结算子、加权几何平均算子、区间数灰色局势决策等研究方向。从现实研究中发现,区间数在表达决策信息时存在局限性:一方面,为了覆盖整个可能的取值范围,区间可能会取得过大;另一方面,通常的区间数运算规则可能导致不确定性的增加,得出的结果会产生较大误差甚至失真;此外,通常的区间数认为区间内取值机会均等,但这在很多实际问题中并不满足。卜广志[9]等提出三参数区间数的概念,明确了信息取值区间和最有可能取值点,较实数和区间数覆盖信息更加全面。现有研究来看,三参数区间数的研究刚刚展开,Luo Dang 等[10－11]基于灰色系统理论的思想和方法,给出了属性值为三参数区间数的多属性决策方法;胡启洲等[12]给出了三参数区间数的运算关系,并将其应用于某城市公交线网的优化调整中;Lan Rong 等[13]提出三参数区间值模糊集的概念,给出了三参数区间值模糊值之间的运算关系,定义了三参数区间值模糊值间的距离;朱建军等[14]研究了三参数区间数判断矩阵的一致性,建立了三参数区间数判断矩阵的权重求解模型;朱建军等[15]研究了群决策过程中三参数区间数互反判断矩阵和互补判断矩阵的集结。现有研究存在如下不足之处:(1)三参数区间数的运算规则、排序公式大多数是建立在三角隶属函数基础上的二重积分表达式,运算过程相对复杂,且三角隶属函数的假设可能并不符合实际情况;(2)三参数区间数的距离测度通常借用欧式距离或最大范数距离,没有体现三参数区间数中最有可能发生的重心点的重要性;(3)在多属性决策的应用过程中,尚没有基于三参数区间数熵测度的应用方法。综上,本文提出三参数区间数的可能度排序方法;考虑到重心点发生可能性的最大特征和决策者风险偏好主观因素,提出一种新的距离测度;基于信息熵思想,构建出信息值为三参数区间数的属性权重模型,最后依据 TOPSIS 思想提出三参数区间数的决策模型。

收稿日期:2012－02－19;**修订日期:**2012－10－10

基金项目:国家社科基金重大项目(10zd&014);国家社科基金重点项目(12AZD102);国家自然科学基金资助项目(71111130211,90924022,70971064,7117113,71171112,71271226);南京航空航天大学创新群体(Y0553);特聘教授科研创新基金(1009－260812)

作者简介:闫书丽(1982－),女(汉族),河南安阳人,讲师,南京航空航天大学博士研究生,讲师,研究方向:决策分析、灰色系统理论等.

2 三参数区间数的排序及距离测度

2.1 三参数区间数的排序方法

定义 1 设 $\tilde{a}=[a^l,a^*,a^u]$ 为三参数区间数，其中 $a^l\leqslant a^*\leqslant a^u$，$a^l$，$a^u$ 分别为区间数下限、上限，a^* 为在此区间中取值可能性最大的数，称为区间数的重心。

以决策者对某车辆稳定性打分为例，若决策者有如下偏好，认为稳定性中等($a=5$)的可能性有10%，稳定性良好($a=7$)的可能性有 80%，稳定性优秀($a=9$)的可能性有 10%，若用 $\tilde{a}=[5,9]$ 表示车辆的稳定性，将增加决策的不确定性，且没有充分利用决策者的判断信息。若采用下面形式来表示：$\tilde{a}=[(5,10\%),(7,80\%),(9,10\%)]$，则能较全面的表达决策者的偏好信息。但在实际决策中，采集概率信息比较困难，决策者很难给出各个可能值发生的概率，只知道事件发生的大概范围和最有可能值，若在此情况下，采用 $\tilde{a}=[5,7,9]$ 形式表示，保持了区间的取值范围，突出了取值可能性最大的重心点，在一定程度上弥补了传统区间数的不足。

这里最可能值对应的概率 $P(a^*)\geqslant\delta$，δ 为一常值，只有当 δ 达到一定程度时，a^* 才能称为最可能值，一般情况下，要求 $\delta\geqslant 60\%$，而区间数下限，上限的出现概率在满足重心概率的情况下不作严格要求。

三参数区间数与三角模糊数表达形式相似，关于三角模糊数的研究也已取得大量成果[16,17]。虽然两者均表示左右端点为临界点，中间端点为最具代表性的点，但两者在基本内涵方面有很大不同：三参数区间数相当于随机变量，各端点取值的可能性大小相当于概率分布，在整个区间 $[a^l,a^u]$ 上的取值用分布函数来刻画，而三角模糊数具有模糊的内涵，采用隶属函数来描述，隶属度用来表示元素属于某模糊集合的程度。

一般情况下三参数区间数的分布信息很难确定，本文针对三参数区间数分布信息未知的情况下，仅根据给予的三个参数进行考虑。在此情形下，对三参数区间数进行大小比较时，应着重考虑中点和最有可能发生的重心点的大小，同时考虑整个区间取值的范围，即区间长度的影响。

在传统的区间数排序方面，文献[2]提出了可能度方法，其基本思想是根据 a^u-b^l 占两区间数长度之和 $l(a)+l(b)$ 的比例来判断 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度大小，当得到的值介于 0 与 1 之间时，可能度取得到的比例值，在(0,1)之外，取 0 或者 1。文献[3]基于中点和区间长度提出了可接受度指标。从操作来看，可能度测度和可接受度指标具有很强的理论基础，但并不适合三参数区间数。对此，在现有研究基础上，本文提出了拓展方法，即在兼顾区间数的特征量(中点、区间长度)基础上，考虑三参数区间数的另一重要特征量(重心点)，建立了三参数区间数的排序方法。

定义 2 设有两个三参数区间数 $\tilde{a}=[a^l,a^*,a^u]$，$\tilde{b}=[b^l,b^*,b^u]$，记：

$$l(\tilde{a})=a^u-a^l,\ l(\tilde{b})=b^u-b^l,\ m(\tilde{a})=(a^l+a^u)/2,\ m(\tilde{b})=(b^l+b^u)/2$$

则称：

$$P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\left(1,\max\left(\frac{m(\tilde{a})-m(\tilde{b})+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}+\frac{1}{2},0\right)\right) \tag{1}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度。

式(1)的可能度比较方法具有如下性质，见定理1－3。

定理 1 定义 2 的计算可以按照式(2)做适当简化，即：

$$P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\left(1,\max\left(\frac{a^u-b^l+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})},0\right)\right) \tag{2}$$

证明：$2\times\left(\frac{m(\tilde{a})-m(\tilde{b})+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2(a^u-b^l)+2(a^*-b^*)}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}$

则 $\frac{m(\tilde{a})-m(\tilde{b})+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}+\frac{1}{2}=\frac{a^u-b^l+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}$

即 $P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\left(1,\max\left(\frac{a^u-b^l+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})},0\right)\right)$

定理 2 设 $\tilde{a}=[a^l,a^*,a^u]$，$\tilde{b}=[b^l,b^*,b^u]$，则：

当 $a^*-b^*\geqslant b^u-a^l$ 时，$P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1$；

当 $b^l-a^u<a^*-b^*<b^u-a^l$ 时，$P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{a^u-b^l+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}$；

当 $a^*-b^*\leqslant b^l-a^u$ 时，$P(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=0$。

证明：

当 $\frac{a^u-b^l+a^*-b^*}{l(\tilde{a})+l(\tilde{b})}\geqslant 1$，即 $a^*-b^*\geqslant b^u-a^l$

时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 1$；

当 $\frac{a^u - b^l + a^* - b^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})} \leqslant 0$，即 $a^* - b^* \leqslant b^l - a^u$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 0$；

当 $0 \leqslant \frac{a^u - b^l + a^* - b^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})} \leqslant 1$，即 $b^l - a^u < a^* - b^* < b^u - a^l$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = \frac{a^u - b^l + a^* - b^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})}$

定理 3　设 $\tilde{a} = [a^l, a^*, a^u]$，$\tilde{b} = [b^l, b^*, b^u]$，则：

(1) $0 \leqslant P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \leqslant 1$；

(2)互补性 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) + P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = 1$；

(3) $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2}$ 当且仅当 $a^* - b^* \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})$；

特别，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = \frac{1}{2}$ 当且仅当 $a^* - b^* \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})$；且 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{a}) = \frac{1}{2}$；

(4)传递性 对于 3 个三参数区间数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$，若 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2}$ 且 $P(\tilde{b} \geqslant \tilde{c}) \geqslant \frac{1}{2}$，则 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{c}) \geqslant \frac{1}{2}$。

证明：

(1) 显然。

(2)当 $a^* - b^* \geqslant b^u - a^l$，即 $b^* - a^* \leqslant a^l - b^u$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 1$，$P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = 0$，则 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) + P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = 1$；

当 $a^* - b^* \leqslant b^l - a^u$，即 $b^* - a^* \geqslant a^l - b^u$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 0$，$P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = 1$，则 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) + P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = 1$；

当 $b^l - a^u < a^* - b^* < b^u - a^l$，即 $a^l - b^u < b^* - a^* < a^u - b^l$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) + P(\tilde{b} \geqslant \tilde{a}) = \frac{a^u - b^l + a^* - b^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})} + \frac{b^u - a^l + b^* - a^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})} = 1$。

(3) 当 $\frac{m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) + a^* - b^*}{l(\tilde{a}) + l(\tilde{b})} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$，即 $a^* - b^* \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})$ 时，$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2}$；

当 $\tilde{a} = \tilde{b}$，即 $[a^l, a^*, a^u] = [b^l, b^*, b^u]$ 时，$a^* - b^* = m(\tilde{b}) - m(\tilde{a}) = 0$，即 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{a}) = \frac{1}{2}$。

(4)由 $a^* - b^* \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})$，$b^* - c^* \geqslant m(\tilde{c}) - m(\tilde{b})$，知 $(a^* - b^*) + (b^* - c^*) \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a}) + m(\tilde{c}) - m(\tilde{b})$，则 $a^* - c^* \geqslant m(\tilde{c}) - m(\tilde{a})$

根据(3)得到：若 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2}$ 且 $P(\tilde{b} \geqslant \tilde{c}) \geqslant \frac{1}{2}$，则 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{c}) \geqslant \frac{1}{2}$。

证毕。

根据以上性质可知，对两个三参数区间数进行排序时，根据可能度是否大于 0.5 来进行排序，当 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) > \frac{1}{2}$ 时，$\tilde{a} > \tilde{b}$。

当三参数区间数退化为两参数区间数时，最有可能发生的点不确定，在比较大小时，我们着重考虑中点的大小和区间长度的影响，取 $a^* = m(\tilde{a})$，$b^* = m(\tilde{b})$，则：

$$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \geqslant m(\tilde{b}) - m(\tilde{a})$$

即 $m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \geqslant 0$，满足区间数可能度排序公式在 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant \frac{1}{2}$ 时的充要条件。

$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant 1 \Leftrightarrow m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \geqslant b^u - a^l$，而区间数可能度排序公式满足 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant 1 \Leftrightarrow b^u \leqslant a^l$。

当 $b^u \leqslant a^l$ 时，$b^l \leqslant a^u$，$\frac{a^l + a^u}{2} \geqslant \frac{b^l + b^u}{2}$，即 $m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \geqslant 0$，而 $b^u - a^l \leqslant 0$，则满足 $m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \geqslant b^u - a^l$。

$P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant 0 \Leftrightarrow m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \leqslant b^l - a^u$，而区间数可能度排序公式满足 $P(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) \geqslant 0 \Leftrightarrow a^u \leqslant b^l$。当 $a^u \leqslant b^l$ 时，$a^l \leqslant b^u$，$\frac{a^l + a^u}{2} \leqslant \frac{b^l + b^u}{2}$，即 $m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \leqslant 0$，而 $b^l - a^u \geqslant 0$，则满足 $m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) \leqslant b^l - a^u$。由此，通常的区间数排序方法是本文三参数区间数排序方法的特例。

2.2　三参数区间数的距离测度

在实际应用中，两个三参数区间数的距离测度是一个重要的研究问题。文献[9]直接借用欧式空间的距离表达式给出两个距离公式，文献[11]在欧式空间的距离表达式上做了改进，考虑了各对应参数的平均权重。

Lan Rong 等[13]在此基础上，考虑到三参数区间数的长度特征量，提出一种距离表达式。

这几种距离公式虽然都考虑到了三参数区间数的主要特征量：上限、下限、重心点，但都没有体现出重心点在区间上取值可能性最大的特征，只是单纯的把重心点作为一般的端点来对待。

实际上，重心点在区间上取值可能性最大，即在整个区间上权重最大，决策者根据自身经验、风险偏好对上限、下限、重心点赋予不同的权重，并保证重

心点权重最大。基于此思想，给出一种新的距离测度方法。

定义 3 设 $\tilde{a}=[a^l,a^*,a^u]$，$\tilde{b}=[b^l,b^*,b^u]$，则称：

$$d(\tilde{a},\tilde{b})=\alpha\mid a^l-b^l\mid+\beta\mid a^*-b^*\mid+(1-\alpha-\beta)\mid a^u-b^u\mid \tag{3}$$

为 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{b}$ 之间的距离，其中 $0.5\leqslant\beta\leqslant 1,0\leqslant\alpha<0.5$。

定理 4 设 $d(\tilde{a},\tilde{b})$ 为三参数区间数 $\tilde{a}=[a^l,a^*,a^u]$ 与 $\tilde{b}=[b^l,b^*,b^u]$ 之间的距离，则有

(1) $d(\tilde{a},\tilde{b})=d(\tilde{b},\tilde{a})$；

(2) $d(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$，$d(\tilde{a},\tilde{b})=0$ 当且仅当 $\tilde{a}=\tilde{b}$；

(3) $d(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant d(\tilde{a},\tilde{c})+d(\tilde{b},\tilde{c})$。

证明：(1)，(2)显然。

(3)由于 $\mid a^l-c^l+c^l-b^l\mid\leqslant\mid a^l-c^l\mid+\mid c^l-b^l\mid$，

$\mid a^*-c^*+c^*-b^*\mid\leqslant\mid a^*-c^*\mid+\mid c^*-b^*\mid$，

$\mid a^U-c^U+c^U-b^U\mid\leqslant\mid a^U-c^U\mid+\mid c^U-b^U\mid$，

又由于 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,1-\alpha-\beta\geqslant 0$，则：

$\alpha\mid a^l-c^l+c^l-b^l\mid+\beta\mid a^*-c^*+c^*-b^*\mid+(1-\alpha-\beta)\mid a^U-c^U+c^U-b^U\mid\leqslant\alpha\mid a^l-c^l\mid+\beta\mid a^*-c^*\mid+(1-\alpha-\beta)\mid a^U-c^U\mid+\alpha\mid c^l-b^l\mid+\beta\mid c^*-b^*\mid+(1-\alpha-\beta)\mid c^U-b^U\mid$

即 $d(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant d(\tilde{a},\tilde{c})+d(\tilde{b},\tilde{c})$

证毕。

当 $a^l=a^*=a^u,b^l=b^*=b^u$，即 $\tilde{a},\tilde{b}$ 为实数时，$d(\tilde{a},\tilde{b})=\mid a^*-b^*\mid$，即转化为实数间的距离公式。

三参数区间数退化为区间数时，考虑中点的距离，取 $a^*=m(\tilde{a}),b^*=m(\tilde{b})$ 时，则：

$$d(\tilde{a},\tilde{b})=\alpha\mid a^l-b^l\mid+\beta\mid m(\tilde{a})-m(\tilde{b})\mid+(1-\alpha-\beta)\mid a^u-b^u\mid$$

王正新等[5]，Jahanshahloo 等[6]的文献中区间数的距离公式只考虑对应上下限间的距离，与此相比，本公式考虑了中点间的距离，而且赋予上限、下限、中点不同的权重系数 $\alpha,\beta,1-\alpha-\beta$，根据决策者经验、风险偏好来确定具体的权重。在信息值为效益型的前提下，若决策者为风险追求者，取 $1-\alpha-\beta>\alpha$；若决策者为风险厌恶者，取 $1-\alpha-\beta<\alpha$；若决策者为风险中立者，取 $1-\alpha-\beta=\alpha$。

3 基于三参数区间数的 TOPSIS 决策模型

设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$ 为方案集，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为属性集，$\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ 为规范化后的评价矩阵。在三参数区间数决策模型中，有两点值得重点关注，即属性权重的确定和方案排序方法的确定。文献[18]等研究了传统区间数的多属性决策方法，在这些方法中，基于熵的决策模型得到了广泛应用。

3.1 三参数区间数的属性熵测度

根据信息熵原理，某个指标的信息熵越小，其指标值的相差程度越大，提供的信息量越多，在综合评价时所起的作用越大，则其权重也应越大；相反，某个指标的信息熵越大，其指标值的相差程度越小，提供的信息量越少，在综合评价时所起的作用越小，则其权重也应越小。本文根据三参数区间数的取值特征，考虑三参数区间数指标值的相差程度通过指标值的重心点和三参数区间数取值的方差来刻画，由此给出三参数区间数的熵测度的定义。

定义 4 取值为三参数区间数的属性 u_j 的熵测度为：

$$H_j=\rho\left(-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}^*}{\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}^*}\ln\frac{a_{ij}^*}{\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}^*}\right)+(1-\rho)\left(-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}\frac{V_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}V_{ij}}\ln\frac{V_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}V_{ij}}\right)\quad j=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

其中，$0\leqslant\rho\leqslant 1$ 为决策者对三参数区间数重心点和方差影响程度的判断系数，若决策者为风险追求者，则注重发生可能性最大的重心点值，取 $\rho>0.5$；若决策者为风险厌恶者，则注重信息值的上下限，取 $\rho<0.5$；若决策者为风险中立者，则取 $\rho=0.5$。属性 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重为：

$$\omega_j=\frac{1-H_j}{n-\sum\limits_{j=1}^{n}H_j} \tag{5}$$

与 Li Xiangxin 等[19]提出的熵测度相比，本文方法分别考虑了三参数区间数重心点和方差的熵，并针对实际应用背景根据决策者对重心点和方差影响程度的经验判断赋予不同的权重值，定性与定量的结合更加符合实际需求。

3.2 三参数区间数的 TOPSIS 决策模型

TOPSIS 是一种常用的多属性决策方法[20]，考虑到其能充分反映各方案之间的差距、具有符合逻辑、直观、可靠的特点，提出基于三参数区间数的决策步骤如下：

步骤 1 利用公式(4)和(5)求出属性权重向量；

步骤 2 利用公式(1)或(2)确定正理想解 $\bar{a}=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_m\}$，$\bar{a}_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\tilde{a}_{ij},j=1,2,\cdots,n$；

负理想解 $\underline{\tilde{a}} = \{\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \cdots, \underline{\tilde{a}}_m\}$，$\underline{\tilde{a}}_j = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \tilde{a}_{ij}$，$j = 1,2,\cdots,n$；

步骤 3　利用求出的权重向量和距离公式(3)，求出各方案 $a_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 与正理想解 $\bar{\tilde{a}} = \{\bar{\tilde{a}}_1, \bar{\tilde{a}}_2, \cdots, \bar{\tilde{a}}_m\}$ 的综合距离 $d(\bar{\tilde{a}}, \tilde{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j d(\bar{\tilde{a}}_j, \tilde{a}_{ij})$，与负理想解 $\underline{\tilde{a}} = \{\underline{\tilde{a}}_1, \underline{\tilde{a}}_2, \cdots, \underline{\tilde{a}}_m\}$ 的综合距离 $d(\underline{\tilde{a}}, \tilde{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j d(\underline{\tilde{a}}_j, \tilde{a}_{ij})$；

步骤 4　计算方案 $a_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 与正负理想解之间的贴近度：

$$c_i = \frac{d(\underline{\tilde{a}}, \tilde{a}_i)}{d(\bar{\tilde{a}}, \tilde{a}_i) + d(\underline{\tilde{a}}, \tilde{a}_i)} \quad i = 1,2,\cdots,m; \tag{6}$$

步骤 5　根据贴近度 $c_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 的大小对方案进行排序。

从上述步骤来看，基于三参数区间数的 TOPSIS 决策方法具有以下 2 个特点：(1)突出了重心点在三参数区间数中取值可能性最大的特征；(2)定性与定量的结合使得决策者可以根据具体应用背景进行调整，适合复杂的、模糊的现实应用环境，方法更加灵活。

4　算例分析

为比较方便，采用文献[9－11]中的舰载机选型问题。影响舰载机选型的主要指标有最大航速、越海自由航程、最大净载荷、购置费、可靠性、机动灵活性，属性权重未知。现有 4 种机型可供选择，请多位专家给出评判矩阵，最后集结得到综合判断矩阵，并对属性值进行规范化处理，得到规范后的评判矩阵为：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.78,0.8,0.85] & [0.5,0.55,0.58] & [0.9,0.95,0.95] & [0.8,0.82,0.85] & [0.45,0.5,0.57] & [0.9,0.95,0.97] \\ [0.92,0.95,1.0] & [0.95,0.97,1.0] & [0.85,0.86,0.88] & [0.65,0.69,0.71] & [0.17,0.2,0.23] & [0.47,0.51,0.55] \\ [0.7,0.72,0.78] & [0.72,0.74,0.75] & [0.95,0.98,1.0] & [0.94,0.97,1.0] & [0.8,0.83,0.85] & [0.8,0.82,0.85] \\ [0.85,0.88,0.9] & [0.65,0.67,0.7] & [0.9,0.95,0.96] & [0.85,0.9,0.93] & [0.46,0.5,0.52] & [0.48,0.5,0.52] \end{bmatrix}$$

(1)令 $\rho = 0.6$，得到各属性的熵为：

$H_1 = 0.980546$，$H_2 = 0.931047$，$H_3 = 0.968468$，$H_4 = 0.978948$，$H_5 = 0.877077$，$H_6 = 0.94594$。

得到属性权重向量为 $W = (0.0612,\ 0.2168,\ 0.0992,\ 0.0662,\ 0.3866,\ 0.17)$。

(2)确定正理想解：

$\bar{\tilde{a}} = ([0.92,0.95,1.0],\ [0.95,0.97,1.0],\ [0.95,0.98,1.0],\ [0.94,0.97,1.0],\ [0.8,0.83,0.85],[0.9,0.95,0.97])$

确定负理想解：

$\underline{\tilde{a}} = ([0.7,0.72,0.78],\ [0.5,0.55,0.58],\ [0.85,0.86,0.88],[0.65,0.69,0.71],[0.17,0.2,0.23],[0.48,0.5,0.52])$

(3)取 $\alpha = 0.25$，$\beta = 0.5$，计算各个方案与正负理想解的综合距离分别为：

$d(\bar{\tilde{a}}, a_1) = 0.2401$，$d(\bar{\tilde{a}}, a_2) = 0.3464$，

$d(\bar{\tilde{a}}, a_3) = 0.0851$，$d(\bar{\tilde{a}}, a_4) = 0.2822$。

$d(\underline{\tilde{a}}, a_1) = 0.2144$，$d(\underline{\tilde{a}}, a_2) = 0.1090$，

$d(\underline{\tilde{a}}, a_3) = 0.3694$，$d(\underline{\tilde{a}}, a_4) = 0.1723$。

(4)各方案与正负理想解之间的贴近度为 $c_1 = 0.4717$，$c_2 = 0.2394$，$c_3 = 0.8127$，$c_4 = 0.3791$。

根据 $c_i (i = 1,2,3,4)$ 的大小对各方案排序为 $s_3 > s_1 > s_4 > s_2$。

下文进行方法的比较。

(1)决策信息为三参数区间数、三角模糊数形式的比较。为了方便运算与比较，假设这两种形式下的分布(隶属)函数均为线性的。求出的权重[16]，各方案与正负理想解间的距离，贴近度以及排序见表 1－2。

表 1　不同决策信息形式下的属性权重比较

信息形式	权重向量 W	权重大小比较
三参数区间数	(0.0612,0.2168,0.0992,0.0662,0.3866,0.1700)	$\omega_5 > \omega_2 > \omega_6 > \omega_3 > \omega_4 > \omega_1$
三角模糊数	(0.0639,0.2253,0.1073,0.0682,0.3700,0.1653)	$\omega_5 > \omega_2 > \omega_6 > \omega_3 > \omega_4 > \omega_1$

表 2 不同信息形式下各方案与正、负理想解间的距离、贴近度及排序比较

	信息形式	与正、负理想解的距离、贴近度	方案排序
与正理想解距离	三参数区间数	(0.2401,0.3464,0.0851,0.2822)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$
	三角模糊数	(0.2399,0.3347,0.0870,0.2785)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$
与负理想解距离	三参数区间数	(0.2167,0.1132,0.3750,0.1724)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$
	三角模糊数	(0.2088,0.1144,0.3609,0.1696)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$
贴近度	三参数区间数	(0.4717,0.2394,0.8127,0.3791)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$
	三角模糊数	(0.4653,0.2547,0.8057,0.3785)	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$

表 3 各文献方法、结论比较

	文献[9]	文献[10]	文献[11]	本文
属性权重	已知	已知	已知	未知
排序方法	二重积分	无	根据三个参数的平均值大小排序	基于中心、重心点的可能度公式
距离公式	无	无	上下限、重心点等权重的欧氏距离	上下限、重心点不等权重的距离
决策方法	灰色模糊综合评判法	灰色关联度方法	灰靶决策方法	基于熵权的 TOPSIS 方法
贴近度	无	无	给出	给出
排序结果	2 $s_3 > s_1 > s_4 > s_2$	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$	$s_3 > s_1 > s_4 > s_2$

从表 1,2 可以看出,本文方法的排序与三角模糊数信息下的排序一致,数值也很接近,这与两者反映原始数据形式相同、分布(隶属)函数相同是相符的,但从本文得到的数值可以看出方案之间的差距更大,三参数区间数信息相比三角模糊数信息可以得出:

s_3 的得分值更高,s_1、s_4 远优于 s_2。而且属性值若是三角模糊数,则应具有其所属的集合信息,在此直接引用使得表达意义不够明确。

(2)三参数区间数信息下的结果比较根据本文建议的方法,将其与卜广志[9],Luo Dang 等[10-11]的结果进行比较,见表 3。

从表 3 的排序结果来看,本文得到的排序结果与卜广志[9],Luo Dang 等[10-11]的结果均一致。基于计算结果比较,可以得到如下结论:(1)方案的区分度得到了改善。Luo Dang[10]文献中方案间的差异度为 $\Delta_{31} = 0.13269$,$\Delta_{14} = 0.02582$,$\Delta_{42} = 0.06266$。Luo Dang[11]文献中方案间的差异度为 $\Delta_{31} = 0.0766$,$\Delta_{14} = 0.0344$,$\Delta_{42} = 0.0568$。本文方案的差异度为 $\Delta_{31} = 0.0341$,$\Delta_{14} = 0.0926$,$\Delta_{42} = 0.1397$。根据方案间大小可能度、差异度可以看出,这四种方法中,都有方案 s_3 优于方案 s_1 的程度比方案 s_4 优于方案 s_2 的程度要大,方案 s_1 比 s_4 优的程度最小。不过从本文方法中可得到另外一个信息:方案 s_3 远远优于方案 s_1,这表明方案的区分度得到了改善,这在很多情况下有利于排序。(2)本文的计算相对简单,易于在实践中推广使用。

5 结语

考虑到区间数长度、中点、重心点的影响,提出了三参数区间数的排序方法和基于三参数区间数的距离测度公式,此距离公式可以根据决策者经验、风险偏好进行调整,更加符合模糊数的特征,符合客观实际的需要;基于信息熵思想提出了属性值为三参数区间数的属性权重模型,进而提出基于熵权的 TOPSIS 决策方法。本文方法突出了重心点在三参数区间数中的重要性,决策者可以根据实际应用背景进行调整,定性与定量结合更加符合实际需要。本文的研究仅涉及到静态条件下模型的构建,如何应用本文的建模思想构建动态条件下三参数区间数的决策模型是笔者下一步的研究方向。

参考文献:

[1] Xu Zeshui. Consistency of interval fuzzy preference relations in group decision making[J]. Applied soft computing, 2011, 11(5): 3898-3909.

[2] Nakahara Y, Sasaki M, Gen M. On the linear programming problems with interval coefficients[J]. International journal of computer industrial engineering, 1992, 23: 301-304.

[3] Senguta A, Pal TK. On comparing interval numers [J]. European journal of operation research, 2000, 127(1): 28-43.

[4] Genc S, Boran F E, Akay D, et al. Interval multiplicative transitivity for consistency, missing values and priority weights of interval fuzzy preference relations[J]. 2010,180(24):4877-4891.

[5] 王正新,党耀国,宋传平. 基于区间数的多目标灰色局势决策模型[J]. 控制与决策,2009, 24(3):388-392.

[6] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh Lotfi F, Davoodi A R. Extension of TOPSIS for decision-making problems with interval data: Interval efficiency[J]. Mathematical and

ComputerModelling，2009，49(5－6)：1137－1142.

[7] Cao Qingwei，Wu Jian. The extended COWG operators and their application to multiple attribute group decision making problems with interval numbers[J]. Applied mathematicalmodeling，2011，35(5)：2075－2086.

[8] Yue Zhongliang. An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers[J]. Knowledge-based systems，2011，24(1)：146－153.

[9] 卜广志，张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊 综合评判[J]. 系统工程与电子技术，2001，23 (9)：43－45，62.

[10] Luo Dang. Decision-making methods with three-parameter interval grey number[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2009，29(1)：124－130.

[11] Luo Dang，Wang Xia. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number[J]. Applied mathematical modeling，2011，36(5)：1957－1963.

[12] 胡启洲，张卫华，于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用[J]. 中国工程科学，2007，9(3)：47－51.

[13] Lan Rong，Fan Jiulun. TOPSIS decision-making method for three parameters interval -valued fuzzy sets [J]. Systems Engineering -Theory&Practice，2009，29 (5)：129－136.

[14] 朱建军，宋传平，刘思峰，等. 一类三端点区间数判断矩阵的一致性及权重研究[J]. 系统工程学报，2008，23 (1)：22－27.

[15] 朱建军，刘思峰，王翯华. 群决策中两类三端点区间数判断矩阵的集结方法[J]. 自动化学报，2007，33(3)：297－301.

[16] 胡丽芳，关欣，邓勇，等. 一种三角模糊数型多属性决策方法[J]. 控制与决策，2011，26(12)：1877－1880.

[17] Wu Qi，Law R. Fuzzy support vector regression machine with penalizing Gaussian noises on triangular fuzzy number space [J]. Expert Systems with Applications，2010，37(12)：7788－7795.

[18] Wu Ximing，Perloff J M. GMM estimation of a maximum entropy distribution with interval data[J]. Journal of econometrics，2007，38(2)：532－546.

[19] Li Xiangxin，Wang Kongsen，Liu Liwei，et al. Application of the entropy weight and TOPSIS method in safety evaluation of coal mines [J]. Procedia Engineering，2011，26：2085－2091.

[20] Wang Jianrong，Fan Kai，Wang Wanshan. Integration of fuzzy AHP and FPP with TOPSIS methodology for aeroengine health assessment[J]. Expert systems with applications，2010，37(12)：8516－8526.

TOPSIS Decision-Making Method with Three-Parameter Interval Number Based on Entropy Measure

YAN Shu-li[1,2]，**LIU Si-feng**[1]，**ZHU Jian-jun**[1]，**FANG Zhi-geng**[1]，**LIU Jian**[3]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；
2. School of Mathematics and Statistics，Henan University of Science and Technology，Luoyang 471003，China；
3. School of Ecnomics & Management，Nanjing University of Science and Technology，Nanjing 210094，China)

Abstract：Ordering method of three-parameter interval numbers and decision-making model are studied in this paper. Firstly，a new method of the possibility ranking based on gravity center，midpoint，and the length of three-parameter interval numbers is proposed. Then，the distance formula of three -parameter numbers is established according to the most likely appearing characteristic of gravity center. Furthermore，a new attributes' weight model based on entropy measure of the three-parameter interval numbers is established. Based on the new distance formula and ordering method of three-parameter interval numbers，an uncertain decision making structure is introduced according to the TOPSIS. Finally，numeral example shows the practicality and effectiveness of the proposed method.

Key words：uncertain decision making；three-parameter interval numbers；entropy measure；TOPSIS