文章编号:1003-207(2013)06-0132-07

基于幂效用函数的多属性英式拍卖研究

姚升保

(中南财经政法大学工商管理学院,湖北 武汉 430073)

摘 要:以采购问题为背景研究多属性拍卖问题,其中拍卖问题的特点是:(1)包含任意有限个属性;(2)买卖双方的效用函数均具有加性结构,且在除价格以外的单个属性上,买方的效用函数和卖方的成本函数均为一般幂函数形式。首先,设计了一种买方事先公布评分函数而卖方轮流提交投标的多属性英式拍卖机制;其次,在卖方对称的假设下分析了拍卖机制中的最优投标策略,确定了最优投标价格和最优非价格属性值;然后,分析得出了最具成本优势的卖方最终胜出的条件以及最优多属性投标;最后,计算了该拍卖机制中买方的期望收益,并求出了使其期望收益最大化的最优评分函数权重。

关键词:多属性拍卖;拍卖机制;投标策略;最优拍卖

中图分类号:F724 **文献标识码**:A

1 引言

传统拍卖尽管形式多样,但长期以来拍卖竞争的核心一直停留在价格这单一属性上。然而,在很多实际拍卖问题中仅仅考虑价格是极其片面的。以采购拍卖问题为例,企业采购物品除了关心价格外,通常还关心采购物品的质量、交货期和供应商信誉等因素[1],有时非价格属性的重要性甚至不亚于价格属性。多属性拍卖允许买卖双方就物品的价格和其他非价格属性进行协商[2],因而能够发现更有价值的交易。由于引入了非价格属性,多属性拍卖在投标策略和机制设计等方面都不同于传统的单一价格拍卖,相关问题已经引起了众多学者的关注。

从研究方法上看,现有的多属性拍卖研究主要有两大类研究工作。一类是基于不完全信息博弈的多属性拍卖模型。Che[3] 在 1993 年首先对多属性拍卖进行了比较全面的分析,其工作为多属性拍卖研究建立了一种分析框架。在投标者生产成本相互独立的假设条件下,Che[3] 将单属性拍卖方法推广到包含价格和质量两个属性的拍卖,并研究了密封拍卖机制下的几种变形拍卖协议;Branco[4] 推广了 Che[3] 的工作,在投标者成本函数相关的条件下,基于社会福利最大化设计最优机制。沿用 Che[3] 和 Branco[4] 的研究思路,David[5-6] 等人的一系列工作先后将多属性拍卖推广到三个属性和任意多个属性的情形。Beil 和 Wein[7] 设计了一种多轮多属性逆向拍卖机制:在假定采购者知道供应商成本函数的形式,但不知道具体参数取值的情况下,拍卖者通过前面数轮的投标值可以求出供应商的成本函数,并在最后一轮拍卖中通过改变打分策略最大化自身效用。Parkes 和 Kalagnanam[8] 的研究工作致力于寻求有效拍卖机制,即以买卖双方总剩余最大化为目标设计拍卖机制。多属性拍卖的另一类研究则是基于实验经济学的分析工作。Koppius[9] 和 Strecker[10] 采用实验经济学方法研究信息披露对多属性拍卖的资源分配效率、买卖双方收益等方面的影响。Bichler[2] 和 Chen-Ritzo[11] 先后分别采用实验经济学方法对多属性拍卖和传统的单一价格拍卖进行了比较研究,研究结果都表明多属性拍卖既增加了买方的效用,也增加了卖方的利润。

上面提到的 David[5-6] 的一系列工作,虽然先后将多属性拍卖推广到三个属性和任意多个属性的情形,但其中买方的效用函数和卖方的成本函数是较为特殊的线性或拟线性函数,这限制了模型的实际应用。孙亚辉等[12] 针对 David[5-6] 研究的局限,考虑了买方边际效用非递增而卖方边际成本非递减情形下的多属性拍卖,研究了密封拍卖机制下投标人的最优投标策略。基于 David[5-6] 的研究工作和孙

收稿日期:2011-10-08;**修订日期**:2012-07-20

基金项目:教育部人文社会科学研究青年基金项目(09YJC630229);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(31541110807)

作者简介:姚升保(1977-),男(汉族),湖北黄冈人,中南财经政法大学工商管理学院副教授,博士,研究方向:决策分析.

亚辉等人的推广模型假设，本文针对买方的效用函数和卖方的成本函数均为一般幂函数形式的多属性拍卖问题进行系统研究，在多属性英式拍卖协议下研究卖方投标策略和买方收益、最优拍卖设计等问题。

2　多属性英式拍卖模型

本节首先给出多属性拍卖的一个一般描述性模型，然后给出本文讨论的多属性英式拍卖模型的具体情形和拍卖规则。

2.1　一般描述性模型

一个多属性拍卖模型可以采用如下的多元组表述：

$M=(P,I,A,U_{buyer},U_s,S)$

其中，各元素的具体含义如下：

P 是拍卖中唯一的拍卖人，在采购拍卖环境中即为买方。

$I=\{1,2,\cdots,n\}$ 是拍卖中的投标人集合，$n\geq 2$。在多属性采购拍卖中，投标人即为卖方，其数目在拍卖前已经确定。在拍卖中，每个投标人根据拍卖规则提交投标。

$A=A_0\times A_1\times\cdots\times A_m$ 为属性空间，其中 A_0 为价格属性的取值空间，$A_k(k=1,\cdots,m)$ 为第 k 个非价格属性的取值空间。投标人提交的投标由一个属性向量 $(p,q_1,\cdots,q_m)$ 表征，其中 $p\in A_0$ 为提交的投标价格，$q_1\in A_1,\cdots,q_m\in A_m$ 分别为投标物品的 m 个非价格属性配置值。

U_{buyer} 为买方的效用函数，反映买方对拍卖物品的偏好。对于多属性投标 $b=(p,q_1,\cdots,q_m)$，引入估值函数 $V(q_1,\cdots,q_m)$，则买方的效用函数可表示为 $U_{buyer}=-p+V(q_1,\cdots,q_m)$。

U_s 为卖方的效用函数，反映卖方 $s(s=1,2,\cdots,n)$ 对拍卖物品的偏好。引入成本函数 $C_s(q_1,\cdots,q_m,\theta)$，则卖方的效用函数可表示为 $U_s=p-C_s(q_1,\cdots,q_m,\theta)$，其中 θ 为卖方 s 的成本参数，表示其生产成本水平。

S 表示拍卖方设定的评分规则，拍卖方通过评分规则对投标方提交的投标进行评价，并据此确定获胜投标。若拍卖方在拍卖中公开其评分函数 S，则评分函数可能是其真实的效用函数，但也可能与其真实的效用函数有所区别。评分函数采取何种形式取决于拍卖人的策略。

2.2　具体模型和拍卖流程

考虑一个买方通过多属性拍卖方式采购一项不可分的物品。本文假定买卖双方的效用函数均具有加性结构，且在除价格以外的单个属性上，买方的效用函数和卖方的成本函数均为一般幂函数形式。具体形式如下：

买方的效用函数：

$$U_{buyer}(p,q_1,\cdots,q_m)=-p+\sum_{t=1}^{m}W_t q_t^{\delta_t} \tag{1}$$

其中，$W_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 为买方赋予属性 q_t 的权重，表示买方对属性 q_t 的偏好程度；参数 $\delta_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 的取值范围为(0, 1)。在该效用函数中，买方关于单个非价格属性 $q_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 上的效用函数采用一般幂函数形式，$0<\delta_t<1(1\leqslant t\leqslant m)$ 意味着属性 q_t 对买方的边际效用是递减的。

卖方的效用函数：

$$U_s(p,q_1,\cdots,q_m,\theta)=p-\theta\sum_{t=1}^{m}a_t q_t^{\beta_t} \tag{2}$$

其中，$\theta\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ 是卖方的成本参数，本文假定成本参数为卖方的私有信息，但买方知道 θ 服从概率分布 $F(\theta)$；$C_s(p,q_1,\cdots,q_m,\theta)=\theta\sum_{t=1}^{m}a_t q_t^{\beta_t}$ 为卖方的成本函数，其中 $a_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 为买方赋予属性 q_t 的成本系数；卖方关于单个非价格属性 $q_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 上的成本函数也采用一般幂函数形式，$\beta_t\geqslant 1(1\leqslant t\leqslant m)$ 意味着属性 q_t 对卖方的边际成本是非递减的。本文假设卖方对称，所有卖方的成本参数 θ 服从同一概率分布 $F(\theta)$，且具有相同的成本系数 a_t 和指数 β_t。

评分函数：

$$S(p,q_1,\cdots,q_m)=-p+\sum_{t=1}^{m}\omega_t q_t^{\delta_t} \tag{3}$$

评分函数是买方在拍卖开始前向卖方公布的用以评选最优投标的函数。出于策略考虑，买方公布的评分函数可能偏离其真实的效用函数。在评分函数中，$\omega_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 为买方公布的赋予非价格属性 q_t 的评分权重。

在 David[5-6] 关于多属性拍卖的系列工作中，买卖双方的效用函数采用了较为特殊的函数形式，可视为本模型的特例。当 $\delta_t=1/2\ (t=1,2,\cdots,m)$，$\beta_t=1\ (t=1,2,\cdots,m)$ 时，本文的拍卖模型即退化为 David[5-6] 的相关模型。

根据传统英式拍卖的原型和本文拍卖的具体情形，以下给多属性英式拍卖规则。

多属性英式拍卖流程：

Step1. 由买方公布评分函数 $S(b)$，最小投标增

量 ε。

Step2. 由卖方 1 到 n 轮流叫价。

(1)设置当前最高投标评分 $S_{\max}=0$,当前时间 $t=0$,活动卖方集合 I_{act},当前获胜者 $win^t=0$;

(2) $t=t+1$。买方公布当前最高投标评分 $S_{\max}$。I_{act} 中的卖方按顺序投标,卖方 i 在时刻 t 投标,记其投标为 b_i^t。b_i^t 可以为评分大于或等于 $S_{\max}+\varepsilon$ 的多属性投标;b_i^t 也可以为"pass",即卖方 i 在时刻 t 选择退出。若 b_i^t 为"pass",则将卖方 i 从 I_{act} 中删除,且 $win^t=win^{t-1}$;否则记 $S_{\max}=S(b_i^t)$,$win^t=i$;

(3)当 $I_{act}\neq\varphi$ 时,重复(2)。

Step3. 若 $win^t=0$,则无人成交;否则卖方 $win=win^t$ 获胜,最终获胜投标为 $S_{\max}$ 对应的多属性投标。买方与获胜卖方按获胜投标成交,拍卖结束。

3 拍卖分析与主要结果

3.1 最优投标策略分析

首先考虑在上述多属性英式拍卖中,当买方公布当前最优投标评分后,理性的卖方应该如何提交投标,即最优投标策略问题。定理 1 回答了上述问题。

定理 1 对于给定的卖方效用函数 U_s 和评分函数 S,对于给定的最小投标增量 ε,记当前获胜投标的评分为 $S_{\max}$,则投标方的最优投标策略是:

当 $S_{\max}$ 满足条件 $S_{\max}\leqslant\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-\varepsilon$ 时,提交如下投标:

$$p^*(\theta)=\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-S_{\max}-\varepsilon;\quad(4)$$

$$q_t^*(\theta)=(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{1}{\beta_t-\delta_t}},t=1,2,\cdots,m.\quad(5)$$

否则,退出拍卖。

证明:用 $(p,q_1,\cdots,q_m)$ 简记成本参数为 θ 的投标方的投标属性向量。根据拍卖规则,投标方若要在下一轮中胜出,则其提交投标的评分必须不小于当前获胜投标评分 $S_{\max}$ 与最小投标增量 ε 之和;但若其投标评分超过 $S_{\max}+\varepsilon$,则会降低其胜出时的收益。因此,投标方应该选择恰好能够使其胜出同时能够极大化自身效用的投标。基于上述分析,可以建立如下的最优化模型:

$$\begin{cases}\max\limits_{p,q_i}U_s(\theta)=p-\theta(\sum_{t=1}^{m}a_tq_t^{\beta_t})\\ s.t.\quad -p+\sum_{t=1}^{m}\omega_tq_t^{\delta_t}=S_{\max}+\varepsilon\end{cases}$$

为了求出最优解,引入 Lagrange 函数

$$L(p,q_i,\lambda)=p-\theta(\sum_{t=1}^{m}a_tq_t^{\beta_t})+\lambda(-p+\sum_{t=1}^{m}\omega_tq_t^{\delta_t}-S_{\max}-\varepsilon)$$

根据条件极值的基本原理可知,能够使投标方效用 $U_s(\theta)$ 极大化的多属性投标 $(p^*(\theta),q_1{}^*(\theta),\cdots,q_m{}^*(\theta))$ 必满足:

$$\frac{\partial L}{\partial p}\bigg|_{p^*(\theta)}=0,\frac{\partial L}{\partial q_t}\bigg|_{q_t{}^*(\theta)}=0(t=1,\cdots,m)$$

求解得唯一的稳定点:$p^*(\theta)=\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-S_{\max}-\varepsilon,q_t^*(\theta)=(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{1}{\beta_t-\delta_t}}(t=1,2,\cdots,m)$。

进一步,通过约束条解出 p 并代入目标函数,将上述约束优化问题转化为无约束优化问题,可以判断其 Hessian 矩阵在稳定点处是负定的,据此并由稳定点的唯一性可判断 $(p^*(\theta),q_1{}^*(\theta),\cdots,q_m{}^*(\theta))$ 为上述优化问题的最优解。

另一方面,只有在有利可图的情况下,即 $U_s(\theta)\geqslant0$,投标方才会提交新的投标。根据非价格属性的最优投标值 $q_t^*(\theta)(t=1,2,\cdots,m)$,不难计算得到 $U_s(\theta)=0$ 对应的价格 $p_{\min}=\theta\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}$,$p_{\min}$ 即为卖方提交投标的价格下限。显然,投标方提交投标 $(p^*(\theta),q_1{}^*(\theta),\cdots,q_m{}^*(\theta))$ 的前提条件是 $p^*(\theta)\geqslant p_{\min}$,由此可得 $S_{\max}\leqslant\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-\varepsilon$。证毕。

定理 1 表明,卖方的最优多属性投标仅与自身的成本结构和评分规则有关,而与卖方对竞争对手的信念无关;最优非价格属性 $q_t^*(\theta)(t=1,2,\cdots,m)$ 的选择独立于价格属性 $p^*(\theta)$,而且与拍卖进程无关。定理 1 将 David[5-6] 关于特殊线性效用函数下的最优投标策略推广到了一般情形。

根据定理 1 的证明过程,可得到投标者的最低投标价格 $p_{\min}=\theta\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}$。进一步,利用最低价

格和最优非价格属性取值，可以计算得到投标方的最高评分 $S_{\max}(\theta)=\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{\theta a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}$。

3.2　拍卖结果

对于给定的效用函数、买方公布的评分函数、卖方成本类型所在的范围 $[\underline{\theta},\ \bar{\theta}]$ 以及卖方的最优投标策略，下面将证明买方可以预测最终的投标获胜者及其获胜投标。

定理 2　假设在所有卖方中，卖方 i 具有最低的成本参数 θ_i，卖方 j 具有次低的成本参数 θ_j，则当：

$$\varepsilon\leqslant\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-(\frac{1}{\theta_j})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}] \tag{6}$$

时，卖方 i 将最终胜出，获胜投标价格为：

$$p^*=-\varepsilon+\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})(\frac{1}{\theta_j})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}]。 \tag{7}$$

证明：假设卖方 i 具有最低的成本参数 θ_i，而另一位具有更高成本参数的卖方 k 以投标 $(p(\theta_k),q_1(\theta_k),\cdots,q_m(\theta_k))$ 成为当前获胜者。此时，如果具有最低成本参数的卖方 i 提交满足下式的投标 $(p(\theta_i),q_1(\theta_i),\cdots,q_m(\theta_i))$：

$$S(p(\theta_i),q_1(\theta_i),\cdots,q_m(\theta_i))=S(p(\theta_k),q_1(\theta_k),\cdots,q_m(\theta_k))+\varepsilon$$

卖方 i 就能战胜当前获胜者，成为新的获胜者。以下证明只要最小投标增量 ε 取值适当，卖方 i 总可以提交合适的投标胜出。

如前所述，卖方 k 最具竞争力的投标价格为 $p^*_{\min}(\theta_k)=\theta_k\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_k a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}$。将 $p^*_{\min}(\theta_k)$ 以及根据定理 1 确定的最优非价格属性投标值代入上式得：

$$-p(\theta_i)+\sum_{t=1}^{m}\omega_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_i a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}=-\theta_k\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_k a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}+\sum_{t=1}^{m}\omega_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_k a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}+\varepsilon$$

即卖方 i 的投标价格必须满足：

$$p(\theta_i)=\theta_k\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_k a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}-\sum_{t=1}^{m}\omega_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_k a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}+\sum_{t=1}^{m}\omega_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_i a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-\varepsilon$$

将上式整理，即得卖方 i 战胜当前获胜者卖方 k 的投标价格：

$$p^*=-\varepsilon+\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta^i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})(\frac{1}{\theta_k})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}]$$

另一方面，卖方 i 愿意提交以上投标价格的条件是该价格不能低于其最低价格，即 $p(\theta_i)\geqslant p^*_{\min}(\theta_i)$，否则卖方 i 胜出后将获得负效用。将 $p^*_{\min}(\theta_i)=\theta_i\sum_{t=1}^{m}a_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_i a_t\beta_t})^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}$ 代入 $p(\theta_i)\geqslant p^*_{\min}(\theta_i)$，整理即得：

$$\varepsilon\leqslant\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-(\frac{1}{\theta_k})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}]$$

上式关于 ε 的取值条件要求对其他任意卖方 k 都成立，但注意到上式右端是关于 θ_k 的增函数，也就是说只要对次低的成本参数 θ_j 上式成立，上式对其他任意卖方的成本参数 θ_k 自然成立。

综上分析，只要最小投标增量 ε 满足式(6)，具有最低成本参数的卖方 i 将会以式(7)确定的价格最终胜出。定理证毕。

根据定理 2 可知，当最小投标增量足够小时，具有最低成本水平的卖方将最终胜出。获胜投标中的最优价格由(7)式给出，而最优非价格属性取值由(5)式给出。

下面将从拍卖方的角度考虑问题。基于定理 1 和定理 2 的结果，定理 3 估计了买方在上述多属性拍卖中的期望收益。

定理 3　假定所有卖方的成本参数 θ 是区间 $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ 上独立同分布的随机变量，最小投标增量 ε 满足式(6)的要求，买方效用函数中的权重为 $W_t(1\leqslant t\leqslant m)$，买方公布的评分函数中的权重为 $\omega_t(1\leqslant t\leqslant m)$，那么买方的期望收益 ER 为：

$$ER(\underline{\theta},\bar{\theta})=n(n-1)\{\sum_{t=1}^{m}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}A_t+\sum_{t=1}^{m}[W_t(\frac{\omega_t\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}]B_t+\varepsilon C\} \tag{8}$$

其中，

$$A_t=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}f(\theta_i)\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}}(\frac{1}{\theta_j})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_j)d\theta_j d\theta_i \tag{9}$$

$$B_t=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}}(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_j)d\theta_j d\theta_i \tag{10}$$

$$C=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}f(\theta_i)\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}}(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_j)d\theta_j d\theta_i \tag{11}$$

证明:根据定理 2 和定理 1 的结果,获胜投标向量 $bid_{win}=(p^*,q_1^*,\cdots,q_m^*)$ 为:

$$\begin{cases} p^*=-\varepsilon+\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}- \\ \qquad (1-\frac{\delta_t}{\beta_t})(\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}]; \\ q_t^*=(\frac{w_t\delta_t}{\theta a_t\beta_t}),t=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

买方的期望效用应该等于所有可能获胜投标的效用与获胜概率的加权平均值。

仍然假定卖方 j 具有次低的成本参数 θ_j,考虑到所有卖方的成本参数 θ 服从区间 $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ 上的独立同分布函数,可得 bid_{win} 出现的概率为 $(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_j)f(\theta_i)n(n-1)$。因此,买方的期望效用为:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}}U_{buyer}(bid_{win})(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_i)f(\theta_j)d\theta_j d\theta_i$$

代入获胜投标的属性向量,得到:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\int_{\theta_i}^{\bar{\theta}}\{\varepsilon-\sum_{t=1}^{m}\omega_t^{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}[(\frac{1}{\theta_i})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}-(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})(\frac{1}{\theta_j})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}]+\sum_{t=1}^{m}W_t(\frac{\omega_t\delta_t}{\theta_i a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}\}\times(1-F(\theta_j))^{n-2}f(\theta_i)f(\theta_j)d\theta_j d\theta_i$$

将上式整理即得定理结果。

3.3 最优拍卖

根据定理 3 估计的结果可知,买方的期望收益大小与其公布的评分函数有关。一个很自然的想法是,买方是否可以选择公布一个合适的评分函数即确定一组合适的评分函数权重 $\omega_t(1\leqslant t\leqslant m)$,能够使其期望收益最大化。这就是通常所说的最优拍卖机制设计问题。定理 4 给出了买方的最优评分函数权重。

定理 4 假定所有卖方的成本参数 θ 是区间 $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ 上独立同分布的随机变量,买方效用函数中的权重为 $W_t(1\leqslant t\leqslant m)$,则使得买方期望效用极大化的评分函数中的权重为 $\omega_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 为:

$$\omega_t^*=\frac{B_t\delta_t}{(B_t-A_t)\beta_t+A_t\delta_t}W_t,1\leqslant t\leqslant m \tag{12}$$

其中,A_t,B_t 分别如(9)、(10)式所示。

证明:根据定理 3 的结果可知,买方的期望效用 $ER(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 为评分函数中权重 $\omega_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 的函数。为了求出使得买方期望效用极大化的评分函数权重 ω_t,下面对期望效用 $ER(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 求偏导数:

$$\frac{\partial ER(\underline{\theta},\bar{\theta})}{\partial\omega_t}=n(n-1)\{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})\omega_t^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}A_t+\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}\omega_t^{\frac{2\delta_t-\beta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}W_tB_t-\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}\omega_t^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}B_t\}=n(n-1)\omega_t^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}\{\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}(1-\frac{\delta_t}{\beta_t})(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}A_t+\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}\omega_t^{-1}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}W_tB_t-\frac{\beta_t}{\beta_t-\delta_t}(\frac{\delta_t}{a_t\beta_t})^{\frac{\delta_t}{\beta_t-\delta_t}}B_t\}$$

令 $\frac{\partial ER(\underline{\theta},\bar{\theta})}{\partial\omega_t}=0$,可求得使买方期望效用最大化的最优评分函数权重:

$$\omega_t^*=\frac{B_t\delta_t}{(B_t-A_t)\beta_t+A_t\delta_t}W_t,1\leqslant t\leqslant m$$

证毕。

上述四个定理将 David[5-6] 的结果推广到一般幂效用函数情形。在本文模型中,若令 $\delta_t=1/2(t=1,2,\cdots,m)$,$\beta_t=1(t=1,2,\cdots,m)$,则上述定理退化为 David[5-6] 的相关结果,即 David[5-6] 的模型可看做本文模型的特例。相对于 David[5-6] 的模型,本文模型除效用函数采用一般幂函数形式外,并没有增加其它任何假设条件。

4 数值实例

本节通过一个数值实例演示基于幂效用函数的多属性拍卖模型的拍卖进程和拍卖结果,并验证本文的理论结果。

考虑某采购者拟通过多属性逆向拍卖方式采购一件物品。除采购价格外,采购者还关心拍卖物品的两个质量属性 q_1,q_2。有三个潜在的供应商,其效用函数为 $U_s(p,q_1,q_2)=p-\theta(2q_1^{5/2}+3q_2^{7/2})$,$s=1,2,3$,其中 θ 为服从区间[0.1, 0.3]上均匀分布的成

本参数。已知采购商的效用函数为 $U_{buyer}(p,q_1,q_2) = -p + 3q_1^{2/3} + q_2^{1/3}$，假定采购商公布的评分函数为 $S(p,q_1,q_2) = -p + 3q_1^{2/3} + 2q_2^{1/3}$。

假定三位供应商的真实成本参数依次为 $\theta_1 = 0.1$，$\theta_2 = 0.15$，$\theta_3 = 0.25$。由定理 2 及式(6)计算可知当 $\varepsilon \leqslant 0.57$ 时，具有最低成本参数的供应商将会最终胜出。为此，本拍卖中的投标增量取为 $\varepsilon = 0.5$。根据定理 1 的最优投标策略，可计算三位供应商提交投标的条件依次为 $S_{\max} \leqslant 4.87$，$S_{\max} \leqslant 4.3$，$S_{\max} \leqslant 3.68$。投标供应商根据式(5)可以计算出各自的最优质量投标值，分别如下：

$$q_1^*(\theta_1) = 2.13,\quad q_2^*(\theta_1) = 0.87$$
$$q_1^*(\theta_2) = 1.71,\quad q_2^*(\theta_2) = 0.76$$
$$q_1^*(\theta_3) = 1.29,\quad q_2^*(\theta_3) = 0.65$$

拍卖进程如下：第 1 轮，$S_{\max}=0$，投标方 1 按式(4)计算最优报价为 $p^*(\theta_1) = 6.37$，故提交最优投标(6.37，2.13，0.87)，根据评分函数和采购商效用函数，可以计算该投标的评分效用和对采购商的真实效用分别为 0.5，－0.45；第 2 轮，$S_{\max}=0.5$，投标方 2 按式(4)计算最优报价为 $p^*(\theta_2) = 5.11$，故提交最优投标(5.11，1.71，0.76)，该投标的评分效用和采购商效用分别为 1.0，0.09；如此循环，一直到第 9 轮，$S_{\max}=4.0$，此时应该由投标方 3 选择投标，根据投标方 3 的投标条件 $S_{\max} \leqslant 3.68$ 可知，投标方 3 应该选择“退出”；第 10 轮，$S_{\max}=4.0$ 不变，由投标方 1 提交投标(2.37，2.13，0.87)；第 11 轮，$S_{\max}=4.5$，此时应该由投标方 2 选择投标，根据最优投标策略投标方 2 应该选择“退出”。因此，具有最低成本水平的供应商 1 ($\theta_1=0.1$)最终以投标(2.37，2.13，0.87)成为获胜者，该获胜投标的评分效用和采购商效用分别为 4.5，3.55。拍卖进程详见表 1。

表 1　多属性拍卖进程

轮数	当前最高评分	投标方	投标	投标评分	采购商效用
1	$S_{\max}=0$	1	(6.37，2.13，0.87)	0.5	－0.45
2	$S_{\max}=0.5$	2	(5.11，1.71，0.76)	1.0	0.09
3	$S_{\max}=1.0$	3	(3.79，1.29，0.65)	1.5	0.63
4	$S_{\max}=1.5$	1	(4.87，2.13，0.87)	2.0	1.05
5	$S_{\max}=2.0$	2	(3.61，1.71，0.76)	2.5	1.55
6	$S_{\max}=2.5$	3	(2.29，1.29，0.65)	3.0	2.09
7	$S_{\max}=3.0$	1	(3.37，2.13，0.87)	3.5	2.55
8	$S_{\max}=3.5$	2	(2.11，1.71，0.76)	4.0	3.09
9	$S_{\max}=4.0$	3	pass	—	—
10	$S_{\max}=4.0$	1	(2.37，2.13，0.87)	4.5	3.55
11	$S_{\max}=4.5$	2	pass	—	—

在上述拍卖中，采购商公布的评分函数权重为 $w_1 = 3$，$w_2 = 2$，采购商因此而获得的效用为 3.55，但不一定是最大效用。进一步，根据定理 4 可以求得使采购商效用最大化的最优评分函数权重为 $w_1^* = 1.013$，$w_2^* = 0.664$。最优评分函数下的拍卖运行情况如表 2 所示。

表 2　最优评分函数下的多属性拍卖进程

轮数	当前最高评分	投标方	投标	投标评分	采购商效用
1	$S_{\max}=0$	1	(1.59，1.18，0.61)	0.1	2.6
2	$S_{\max}=0.1$	2	(1.32，0.94，，0.54)	0.2	2.39
3	$S_{\max}=0.2$	3	(1.02，0.71，0.46)	0.3	2.15
4	$S_{\max}=0.3$	1	(1.29，1.18，0.61)	0.4	2.9
5	$S_{\max}=0.4$	2	(1.02，0.94，，0.54)	0.5	2.69
6	$S_{\max}=0.5$	3	(0.99，0.71，0.46)	0.6	2.45
7	$S_{\max}=0.6$	1	(0.99，1.18，0.61)	0.7	3.2
8	$S_{\max}=0.7$	2	(0.72，0.94，，0.54)	0.8	2.99
9	$S_{\max}=0.8$	3	(0.69，0.71，0.46)	0.9	2.15
10	$S_{\max}=0.9$	1	(0.69，1.18，0.61)	1.0	3.5
11	$S_{\max}=1.0$	2	(0.42，0.94，，0.54)	1.1	3.29
12	$S_{\max}=1.1$	3	pass	—	—
13	$S_{\max}=1.1$	1	(0.49，1.18，0.61)	1.2	3.7
14	$S_{\max}=1.2$	2	pass	—	—

从表 2 的结果看，具有最低成本水平的供应商 1 最终成为获胜者，其获胜投标给采购商带来的效用为 3.7，对采购商而言这一结果优于评分函数权重为 $w_1 = 3$，$w_2 = 2$ 的结果(3.55)。当然，最优拍卖是在期望效用意义下成立的。

5　结语

多属性拍卖主要应用于买方垄断的经济交易中，一般买方为拍卖者，卖方为投标者。现有的多属性拍卖研究工作存在模型假设过强的特点，从而限制了多属性拍卖模型的实际应用。本文将 David 等人关于拍卖双方特殊的线性可加效用函数假设推广至一般幂函数形式的可加效用函数情形，进而设计了一种多属性英式拍卖模型。针对该拍卖模型，本文进行了最优投标策略分析，给出了投标者的最优多属性投标；分析得出了具有最低成本水平的卖方最终胜出的条件以及最优多属性投标；从拍卖者的角度出发，估计出了该拍卖机制中买方的期望收益，并求出了使其期望收益最大化的最优评分函数权重。本文的研究结果可为一般幂效用函数下多属性采购拍卖的应用提供理论依据，有关最优投标策略的结果可为拍卖过程的程序化提供直接支持，有关最优评分函数的结果可为采购方设计实现期望收益

最大化的拍卖提供依据。

基于本文关于多属性拍卖的模型假设和研究基础，未来需要研究多属性拍卖在其它拍卖协议下的最优投标策略、最优拍卖机制等问题。

参考文献：

[1] 刘树林，王明喜. 多属性采购拍卖理论与应用评述[J]. 中国管理科学，2009，17(1)：183－192.

[2] Bichler M. An experimental analysis of multi-attribute auctions [J]. Decision Support Systems，2000，29(10)：249－268.

[3] Che Y K. Design competition through multidimensional auctions [J]. RAND Journal of Economics，1993，24：668－680.

[4] Branco F. The design of multidimensional auctions [J]. RAND Journal of Economics，1997，28：63－81.

[5] David E，Azoulay-schwartz R，Kraus S. An English auction protocol for multi-attribute items [J]. AMEC - IV LNCS，2002，2531：52－68.

[6] David E. Bidding in sealed-bid and English multi-attribute auctions [J]. Decision Support Systems，2006，42 (2)：527－556.

[7] Beil D R，Wein L M. An inverse-optimization-based auction mechanism to support a multiattribute RFQ process [J]. Management Science，2003，49 (11)：1529－1545.

[8] Parkes D C，Kalagnanam J. Models for iterative multi-attribute procurement auctions [J]. Management Science，2005，51(3)，435－451.

[9] Koppius O R，van Heck E. Information architecture and electronic market performance in multidimensional auctions [R]. Working paper，Erasmus University，2003.

[10] Strecker S. Preference revelation in multi-attribute reverse English auctions：A laboratory study [C]. In Proceedings of International Conference on Information Systems (ICIS)，Seattle，December，14－17，2003.

[11] Chen-Ritzo C H，Harrison T P，Kwasnica A M，et al. Better，faster，cheaper：An experimental analysis of a multi-attribute reverse auction mechanism with restricted information feedback [J]. Management Science，2005，51(12)：1753－1762.

[12] 孙亚辉，冯玉强. 多属性密封拍卖模型及最优投标策略 [J]. 系统工程理论与实践，2010，30(7)：1185－1189.

Research on Multi-attribute English Auction based on Power Utility functions

YAO Sheng-bao

(School of Business Administration，Zhongnan University of Economics and Law，Wuhan 430073，China)

Abstract：In this paper，multi-attribute auction is studied in the context of procurement. The considered auction problem has the following two characteristics. One is that the auction contains any finite attributes，conother one is that the utility functions of the auctioneer and the bidders are additive power functions. Firstly，a multi-attribute English auction is designed in which the auctioneer announce the scoring function in advance and the bidders submit bids one by one. Secondly，the optimal bidding strategy of the bidders is analyzed based on the assumption that bidders are symmetry. The optimal bidding price and the optimal values of the non-price attributes are determined. Thirdly，it is proved that the bidder with the lowest cost will win at last only if the minimal increment is small enough. Furthermore，the winning bid can be predicted. At last，the expected payoff of the buyer in the proposed auction is estimated. From the buyer's point of view，the optimal values of the announced weights of the scoring function are calculated.

Key words：multi-attribute auction；auction mechanism；bidding strategy；optimal auction.