

文章编号: 1000-4750(2012)04-0043-06

格栅非均匀分布效应对复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的影响

石姗姗, 孙 直, 任明法, 陈浩然

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连, 辽宁 116024)

摘 要: 研究格栅非均匀分布效应对先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的影响。首先, 基于格栅间距沿母线方向的变化特征和等效平铺模型推导了格栅加筋圆锥壳体的等效刚度阵。其次, 采用 Donnell 型扁壳理论推导了在均布外压作用下格栅加筋圆锥壳体稳定性分析的总势能表达式, 利用最小势能原理得到了该壳体总体稳定性的临界载荷值, 所得计算结果与实验结果十分吻合。最后, 通过典型数例参数讨论, 说明格栅非均匀分布效应对先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的影响将随底锥角增大而显著。该文将为先进复合材料格栅加筋圆锥壳体的参数优化设计提供一种高效和可靠的分析方法。

关键词: 先进复合材料格栅加筋结构(AGS); 圆锥壳体; 总体稳定性; 等效刚度模型; 格栅非均匀分布效应

中图分类号: O242; U663 **文献标志码:** A

THE EFFECT OF NON-UNIFORM DISTRIBUTION OF GRID ON STABILITY OF ADVANCED GRID STIFFENED COMPOSITE CONICAL SHELL

SHI Shan-shan , SUN Zhi , REN Ming-fa , CHEN Hao-ran

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Engineering Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: The influence of grid's non-uniform distribution on the stability of advanced grid stiffened (AGS) composite conical shells has been studied. The distances between ribs of AGS conical shells vary along the shell longitudes, which ultimately results in the longitude dependence of the stiffness distribution. In this paper, the variable stiffness matrices considering various coupling effects along the longitudes were deduced based on equivalent stiffness model. Making use of Donnell form of relations for shells and the minimum potential principle, the critical load was predicted. The analytical result of AGS conical shells has a good agreement with the experimental data, indicating the validity of the analytical model and method provided. In addition, the non-uniform distribution of grid significantly influences the stability of AGS conical shells. Optimal study and design can be performed using the proposed method.

Key words: composite grid stiffened structure (AGS); conical shell; general stability; equivalent stiffness model; effect of non-uniform distribution of grid

收稿日期: 2010-06-29; 修改日期: 2010-09-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(90816025); 重大基础研究计划(973)项目(2011CB610304)

通讯作者: 任明法(1974—), 男, 山西人, 副研究员, 博士, 硕导, 主要从事复合材料工程结构分析与工艺力学研究(E-mail: renmf@dlut.edu.cn).

作者简介: 石姗姗(1986—), 女, 甘肃临夏人, 硕士生, 主要从事复合材料结构力学研究(E-mail: shishangshan433@163.com);

孙 直(1988—), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 主要从事复合材料结构力学研究(E-mail: zhisun@mail.dlut.edu.cn);

陈浩然(1940—), 男, 上海人, 教授, 硕士, 博导, 主要从事复合材料工程结构分析与数值模拟研究(E-mail: chenhr@dlut.edu.cn).

先进复合材料格栅加筋结构作为一种新型结构形式在航空航天器中得到了广泛的应用,如飞机雷达罩、多级火箭的级间连接件等,根据其格栅构型,大致又可分正交格栅、角格栅、等格栅和 Kagome 格栅结构等。这类结构主要在受压载荷下工作,且控制该结构承载能力的主要破坏模式是整体失稳^[1-2],而非强度破坏,因此研究先进复合材料格栅加筋圆锥壳体的稳定性问题具有重要的工程意义。

在先进复合材料格栅加筋圆柱壳体稳定性研究方面国内外学者已进行过大量的工作。对于一个由大量相似的格栅单胞组成的格栅结构,从直观上容易感觉到可以基于均匀化思想寻找一个适当的连续统一模型来代表最初真实的格栅结构,Chen 和 Tsai^[3]采用均匀化原理和提出的一种考虑肋骨扭转,面内弯曲和剪切影响的格栅刚度平铺模型,将一个具有复杂几何特征的格栅加筋柱壳结构等效为一个复合材料层合结构,并对该结构进行线性稳定性分析和优化设计。Ambur 与 Jaunky^[4]应用遗传算法对变曲率复合材料格栅加筋柱壳结构进行了优化设计。张志峰和陈浩然^[5]基于均匀化原理和复合材料中厚圆柱壳体的非线性稳定性理论,研究了初始缺陷对稳定性分析结果的影响,并提出了一种混合遗传算法,较好地解决了其优化分析中多约束、连续变量和非连续变量混合困难。这种基于均匀化思想的先进复合材料格栅加筋壳体稳定性分析方法,由于其计算精度和效率高,受到了航空航天结构设计师的青睐。有关基于均匀化思想的先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的研究相对于先进复合材料格栅加筋圆柱壳体来说还不多。徐孝诚^[6-7]进行了 C/E 复合材料三角形格栅加筋截顶锥壳的外压试验,并按平均曲率半径法将截顶锥壳等效为当量圆柱壳,进行稳定性预测,其预测结果需要进行工程修正。王虎与王俊奎^[8-9]考虑了蒙皮的拉、弯耦合效应和加筋筋条的偏心效应,采用锥壳跨中等效刚度模拟壳体整体刚度,然后利用 Galerkin 法获得了复合材料三角形格栅加筋圆锥壳体的临界外压近似表达式。据目前作者查阅的国内公开发表的文献所知,格栅非均匀分布效应对先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性的研究至今还鲜见。

本文考虑格栅加筋圆锥壳体肋骨间距沿母线方向的变化,及其导致的格栅加筋圆锥壳等效刚度

阵改变,将该刚度变化系数引入 Chen 和 Tsai 提出的格栅结构等效平铺刚度模型,得到沿母线变化的先进复合材料格栅加筋圆锥壳体等效刚度阵方程。在此基础上,使用 Donnell 型扁壳理论推导出了格栅加筋圆锥壳体的势能方程。并选用了以试验观察为基础的失稳模式,利用最小势能原理得到均布外压作用下先进复合材料格栅加筋圆锥壳体总体稳定性的临界载荷解析表达式,所得计算结果与实验结果十分吻合。本文还通过一典型先进复合材料格栅加筋圆锥壳体为数例,讨论了格栅非均匀分布效应对其总体稳定性的影响。

1 格栅加筋圆锥壳体等效刚度阵方程

20 世纪 90 年代中期,美国斯坦福大学的 Chen 和 Tsai^[3]基于结构力学理论提出了一种先进复合材料格栅加筋圆柱壳等效刚度模型,其格栅结构的等效刚度可以由蒙皮刚度和肋骨刚度通过叠加原理得到,即总体等效刚度可以表示为:

$$\begin{aligned} [A] &= [A]^{skin} + [A]^{rib} \\ [B] &= [B]^{skin} + [B]^{rib} \\ [D] &= [D]^{skin} + [D]^{rib} \end{aligned} \quad (1)$$

其中:矩阵 $[A]$ 、矩阵 $[B]$ 和矩阵 $[D]$ 分别为面内拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度。上标 skin 和 rib 分别代表蒙皮和肋骨。具体推导过程可以参考文献[3]。

本文选取先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳为研究对象,如图 1 所示。设其母线长为 L ,小端半径为 R_1 ,大端半径为 R_2 ,锥壳跨中半径为 R_0 ,半锥角为 α 。 x 、 z 坐标方向分别为母线方向和锥壳内法线方向, ϕ 坐标方向为锥壳截圆切线方向, x - ϕ - z 坐标系符合右手准则,坐标系原点设在锥壳中点。

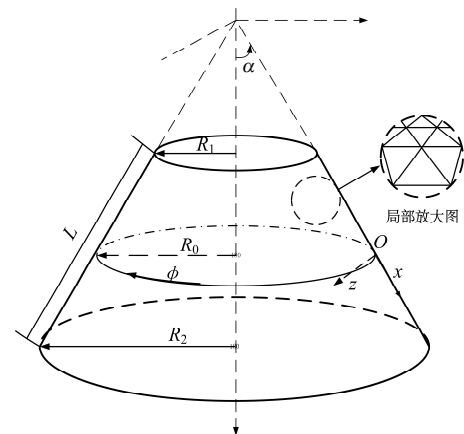


图 1 典型格栅加筋锥壳示意图
Fig.1 Schematic of a typical AGS conical shell

由图 1 可知, 格栅间距沿锥壳母线方向的非均匀分布, 导致其等效刚度阵沿格栅加筋圆锥壳体母线方向改变。设格栅间距随着沿母线方向 x 的截面半径 $R(x)$ 线性变化, 则将该刚度变化系数引入 Chen 和 Tsai^[3]提出的格栅结构等效平铺刚度模型, 可得到先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体沿母线变化的等效刚度阵表达式:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(x)] &= \frac{R_0}{R(x)}[\mathbf{A}_0] \\ [\mathbf{B}(x)] &= \frac{R_0}{R(x)}[\mathbf{B}_0] \\ [\mathbf{D}(x)] &= \frac{R_0}{R(x)}[\mathbf{D}_0] \end{aligned} \quad (2)$$

其中: \mathbf{A}_0 、 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{D}_0 分别为在锥壳跨中对应位置的面内拉伸刚度阵、耦合刚度阵和弯曲等效刚度阵。

2 在均布外压作用下先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性分析

参照图 1 所示坐标系, 采用 Donnell 型^[10]扁壳小变形理论, 圆锥壳体的几何方程为:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\phi = \frac{u \sin \alpha - w \cos \alpha}{R(x)} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial v}{\partial \phi} \\ \gamma_{x\phi} = 2\varepsilon_{x\phi} = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v \sin \alpha}{R(x)} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_\phi = -\frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \\ \chi_{x\phi} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \end{cases} \quad (3)$$

式中: u 、 v 和 w 分别为壳体中面的沿母线、环向和法线方向的位移分量; ε 、 χ 分别为面内应变和曲率应变, 其下标为所对应的坐标。由经典层合理论, 内力和内力矩与应变和曲率间的物理方程为:

$$\begin{cases} \{\mathbf{N}\} = [\mathbf{A}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{B}]\{\chi\} \\ \{\mathbf{M}\} = [\mathbf{B}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{D}]\{\chi\} \end{cases} \quad (4)$$

其中: $[\mathbf{A}]$ 、 $[\mathbf{B}]$ 和 $[\mathbf{D}]$ 为等效刚度阵。 $\{\mathbf{N}\}$ 、 $\{\mathbf{M}\}$ 分别为内力向量和内力矩向量。将圆锥壳体几何方程式(3)与刚度系数阵式(2)代入式(4), 可以得到壳体内力向量、内力矩向量与位移向量关系式:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\phi \\ N_{x\phi} \\ M_x \\ M_\phi \\ M_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中, $L_{ij}(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, j=1, 2, 3)$ 为微分算子, 具体表达式见附录。

对于在均布外压 q 作用下先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体稳定性分析的总势能表达式为:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (N_x \varepsilon_x + N_\phi \varepsilon_\phi + N_{x\phi} \gamma_{x\phi} + M_x \chi_x + \\ &M_\phi \chi_\phi + 2M_{x\phi} \chi_{x\phi}) x \sin \alpha dx d\phi - \\ &\frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \left[N_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{\phi 0} \left(\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \right] x \sin \alpha dx d\phi \end{aligned} \quad (6)$$

式中, N_{x0} 和 $N_{\phi 0}$ 分别为均布外压 q 作用下圆锥壳体在失稳前沿母线和切线方向 x 和 ϕ 的薄膜法内力分量(如图 1 所示), 其可由薄膜理论得到^[8]:

$$\begin{cases} N_{x0} = -\frac{q \tan \alpha}{2 \left(x + \frac{R_0}{\sin \alpha} \right)} \left[\left(x + \frac{R_0}{\sin \alpha} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{\sin \alpha} \right)^2 \right] \\ N_{\phi 0} = -q \left(x + \frac{R_0}{\sin \alpha} \right) \tan \alpha \end{cases} \quad (7)$$

若截顶圆锥壳的上端、下端为简支支承, 由文献[6]的实验结果观察可知, 在均布外压 q 作用下其失稳破坏波形几乎遍及整个壳体, 并其波峰均靠近锥壳大端处, 基于此现象, 我们可假定此截顶圆锥壳失稳时的位移分量为:

$$\begin{cases} u = \sum_m \sum_n u_{mn} R^2(x) \cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \cos(n\phi) \\ v = \sum_m \sum_n v_{mn} R^2(x) \sin \left[\frac{m\pi}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \sin(n\phi) \\ w = \sum_m \sum_n w_{mn} R^2(x) \sin \left[\frac{m\pi}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \cos(n\phi) \end{cases} \quad (8)$$

将式(3)、式(5)和式(8)代入式(6), 根据最小势能原理, 经过一系列运算, 可以得到 u_{mn} 、 v_{mn} 和 w_{mn} 为未知量的齐次代数方程组:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} + c_q q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

其中, 系数 $C_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 和 C_q 的表达式过于繁冗, 故本文也没有给予具体列出。

由式(9)的非零解条件为:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} + c_q q \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

由式(10)可求得在外压下先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体总体失稳临界载荷 q 。

3 算例分析

3.1 考题

为了考核本文所提出的先进复合材料格栅加筋截顶圆锥壳体等效刚度和失稳模态表达式的正

确性, 以及临界压力解析式精确度, 本节以文献[6]给出的在均布外压下典型复合材料三角形格栅加筋截顶圆锥壳体屈曲分析为为例, 将采用本文提出的方法所得出的结果与文献[6,8]理论结果、实验结果和有限元分析结果进行比较。

由文献[6]给定的先进复合材料三角形格栅加筋截顶圆锥壳体材料性能参数为: 筋条: $E=84.5\text{GPa}$, 蒙皮: $E_1=84.5\text{GPa}$, $E_2=6.86\text{GPa}$, $G_{12}=4.9\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.30$, 其结构几何参数和蒙皮铺层见表 1 所示。

应用文献[6]给定参数设置, 建立有限元模型。AGS 结构主要由蒙皮和肋骨组成, 根据其结构几何尺寸特点, 蒙皮可以用层合板/壳单元模拟, 而肋骨可采用壳单元模拟。其网格图及屈曲模态结果如图 2 和图 3 所示。

表 1 典型复合材料三角形格栅加筋截顶圆锥壳体结构几何参数和蒙皮铺层
Table 1 Geometrical parameters and skin ply-angle of a typical AGS conical shell

锥壳长度 L/mm	跨中半径 R_0/mm	半锥角 α	跨中蒙皮铺层方向 角 θ 和厚度 h/mm	跨中位置筋条参数			
				筋高 H/mm	筋宽 b/mm	方向角 θ	筋距 x/mm
380	217.25	9°	$90^\circ/35^\circ/-35^\circ/35^\circ/90^\circ/$	5.8	2.0	27.5°	40.6
			$h(90^\circ)=0.25$	5.8	2.0	-27.5°	40.6
			$h(\pm 35^\circ)=0.25$	5.8	2.4	90°	44.0

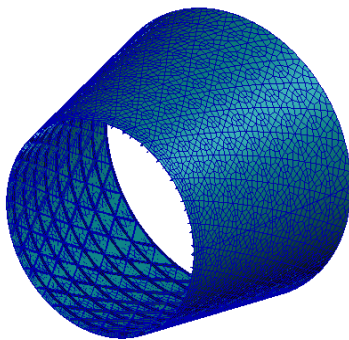


图 2 有限元模型网格示意图
Fig.2 Schematic of a finite element model

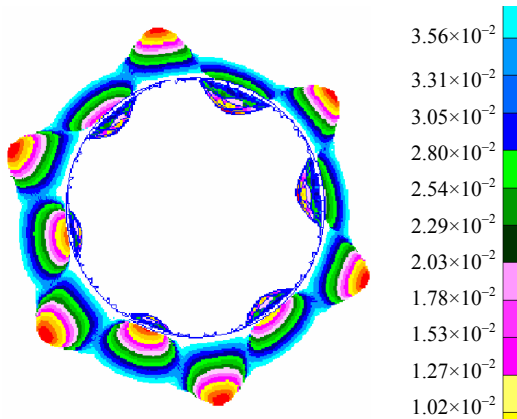


图 3 有限元法结果模态云图
Fig.3 Global buckling modal of AGS conical shells

表 2 分别为本文, 文献[6,8]以及作者采用有限元分析方法所得到的圆锥壳体总体失稳临界外果。通过比较可知, 本文理论结果与实验和有限元结果十分吻合, 其分析精度显著高于文献[6]和文献[8]结果, 但以上还仅仅是在小半锥角($\alpha=9^\circ$)情况结果的比较, 在实际工程圆锥壳体半锥角 α 一般均大于 9° , 为了验证本文工作的有效性, 在下一节将具体讨论半锥角变化引起沿母线方向格栅等效刚度不均匀性对临界载荷的影响。

表 2 采用不同理论预测临界载荷值与实验值比较
Table 2 Comparisons of critical external pressure between the present, [6] and [8] methods, FEM and experiment

方法	失稳波形		临界载荷/MPa	相对误差/(%)
	纵向波数 m_{cr}	横向波数 n_{cr}		
实验值 ^[6]	1	5~6	0.9339	—
文献[6]方法	1	5	1.0300	10.29
文献[8]方法	1	5	0.9839	5.35
本文方法	1	5	0.9478	1.48
有限元解	1	6	0.9355	0.17

3.2 半锥角变化引起沿母线方向格栅等效刚度不均匀性对临界载荷值影响

当结构半锥角 α 增大时, 格栅分布沿母线方向不均匀程度也随之增加, 本节将讨论由于 α 变化引起格栅沿母线方向等效刚度不均匀性对临界载荷

预测值影响。设以上节分析中典型复合材料三角形格栅加筋截顶圆锥壳体为算例,同时假设该锥壳的材料属性、长度、跨中半径、跨中肋骨角度和间距均保持不变(如表2所示)。

图4分别给出了本文和文献[8]结果与有限元结果相对误差随 α 变化曲线。由于缺乏实验结果,为此所给出的相对误差是以有限元结果为基准的相对误差。由图4可知,随着 α 增加,考虑格栅刚度非均匀分布的本文方法得到的相对误差曲线变化很平缓,且都保持在很低水平;而文献[8]方法给出的结果的相对误差随 α 增大迅速增加,其中以最严重的情况为例,即当 $\alpha = 35^\circ$ 本文方法结果的相对误差为13%,而文献[8]方法结果的相对误差竟达到700%左右。由此可知,格栅分布沿母线方向不均匀导致等效刚度非均匀性对锥壳屈曲载荷影响是十分显著的,若使用均匀等效刚度方法分析将会导致错误计算结果。

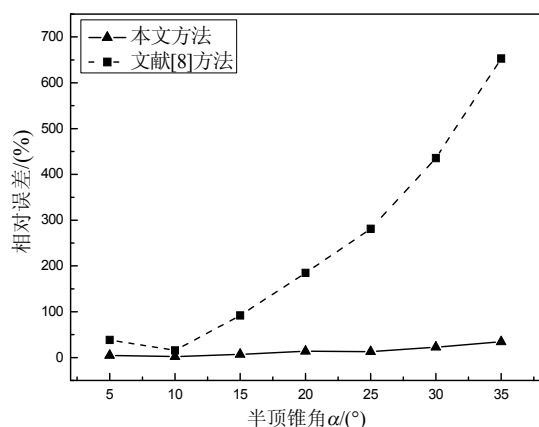


图4 本文和文献[8]结果与有限元结果间的相对误差随半锥角 α 变化曲线

Fig.4 The variations of relative error with semi-cone angle α given by present and Ref. [8] method

4 结论

(1) 通过典型复合材料三角形格栅加筋圆锥壳体外压稳定性的数值结果和实验比较,证实了本文提供先进复合材料格栅加筋圆锥壳体稳定性分析模型和方法的正确性。

(2) 对比不同半锥角的先进复合材料三角形格栅加筋锥壳外压体稳定性结果可知,在其临界载荷预测值时必须考虑半锥角变化引起格栅等效刚度沿母线方向不均匀性的影响。本文方法所得到的随半锥角变化的临界载荷与有限元结果间的相对误

差曲线很平缓,并且都保持在很低水平下,说明了本文提供方法普适性。

(3) 本文所推导的先进复合材料格栅加筋圆锥壳体临界载荷理论解,具有精度高和成本低的特点,为先进复合材料格栅加筋锥壳结构的参数优化设计提供了一种有效的分析方法。

参考文献:

- [1] Vasiliev V V, Rasin A F. Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications [J]. *Composite Structures*, 2006, 76: 182—189.
- [2] 陈浩然, 周柏华, 白瑞祥. 含多分层损伤的先进复合材料格栅加筋圆柱壳(AGS)的热-机耦合非线性屈曲分析[J]. *工程力学*, 2008, 25(8): 58—63.
Chen Haoran, Zhou Baihua, Bai Ruixiang. Thermal-mechanical buckling behavior of advanced composite grid stiffened shell with multi-delaminations [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(8): 58—63. (in Chinese)
- [3] Chen H J, Tsai S W. Analysis and optimum design of composite grid structures [J]. *Journal of Composite Materials*, 1996, 30(4): 503—534.
- [4] Ambur D R, Jaunky N. Optimal design of grid-stiffened panels and shells with variable curvature [J]. *Composite Structures*, 2001, 52(2): 173—180.
- [5] 张志峰, 陈浩然, 李焯, 蒋元兴. 先进复合材料格栅圆柱壳优化设计的混合遗传算法[J]. *复合材料学报*, 2005, 22(2): 166—171.
Zhang Zhifeng, Chen Haoran, Li Xuan, Jiang Yuanxing. Hybrid genetic algorithm for optimum design of advanced grid composite circular cylinders [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(2): 166—171. (in Chinese)
- [6] 徐孝诚. C/E 复合材料网格加劲壳临界外压计算的实验验证[J]. *强度与环境*, 1985, 85(3): 35—40.
Xu Xiaocheng. Experimental verification for buckling load prediction of C/E composite grid stiffened shells under external pressure [J]. *Structure & Environment Engineering*, 1985, 85(3): 35—40. (in Chinese)
- [7] 徐孝诚. C/E 复合材料三角形网格加筋壳的总体稳定性[C]. 第4届全国复合材料会议文集, 1986: 756—761.
Xu Xiaocheng. The overall stability of C/E composite triangular grid stiffened shells [C]. 4th National Conference on Composite Materials Collection, 1986: 756—761. (in Chinese)
- [8] 王虎, 王俊奎. 在均布外压作用下复合材料三角形网格加筋圆锥壳体总体稳定性分析[J]. *应用力学学报*, 1992, 9(3): 44—51.
Wang Hu, Wang Tsunkuei. General instability analysis of composite conical shells with triangular grid stiffeners [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1992, 9(3):

44—51. (in Chinese)

- [9] 王虎, 王俊奎. 复合材料圆锥壳体的位移型方程[J]. 强度与环境, 1990, 78(2): 26—33.

Wang Hu, Wang Tsunkuei. A displacement type theory for thin conical shells composed of composite materials [J].

Structure & Environment Engineering, 1990, 78(2): 26—33. (in Chinese)

- [10] Yiska Goldfeld, Johann Arbocz, Alan Rothwell. Design and optimization of laminated conical shells for buckling [J]. Thin-Walled Structures, 2005, 43: 107—133.

附录:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{11} \frac{\partial}{\partial x} + A_{12} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{16} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{12} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{12} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - A_{16} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{16} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{13} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-A_{12} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - B_{12} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - B_{16} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right); \\
 L_{21} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{21} \frac{\partial}{\partial x} + A_{22} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{26} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{22} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{22} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - A_{26} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{26} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{23} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-A_{22} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - B_{22} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - B_{26} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right); \\
 L_{31} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{61} \frac{\partial}{\partial x} + A_{62} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{66} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{32} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(A_{62} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - A_{66} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + A_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{33} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-A_{62} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - B_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{62} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - B_{62} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - B_{66} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right); \\
 L_{41} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{11} \frac{\partial}{\partial x} + B_{12} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{16} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{42} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{12} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - B_{16} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{16} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{43} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-B_{12} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - D_{12} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - D_{16} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right); \\
 L_{51} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{21} \frac{\partial}{\partial x} + B_{22} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{26} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{52} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{22} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - B_{26} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{26} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{53} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-B_{22} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - D_{22} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - D_{26} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right); \\
 L_{61} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{61} \frac{\partial}{\partial x} + B_{62} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{66} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{62} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(B_{62} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} - B_{66} \frac{\sin \alpha}{R(x)} + B_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\
 L_{63} &= \frac{R_0}{R(x)} \left(-B_{62} \frac{\cos \alpha}{R(x)} - D_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{62} \frac{\sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - D_{62} \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - D_{66} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right).
 \end{aligned}$$

• 郑重声明 •

我们发表在《工程力学》2012年2月上的论文“行波地震激励下采用位移输入模式的随机振动分析方法”，参考了“求解结构地震响应位移输入模型存在的问题及其AMCE 实效对策. 计算力学学报, 2009, 26(6)”和“求解结构地震响应位移输入模型中存在问题的一种新解决方法. 工程力学, 2010, 27(9)”等两篇论文的成果，但是在参考文献中未标注。该论文已被《工程力学》编辑部正式撤销，并从电子库中删除。请勿再以任何方式引用此文，并向原作者、编辑部和读者致歉。

李永华

2012. 2. 28