

文章编号: 1000-4750(2012)04-0029-07

基于功率谱矩阵开方分解的 空间相关多点地震动合成方法

吴勇信^{1,2}, 高玉峰^{1,2}

(1. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 河海大学岩土工程科学研究所, 南京 210098)

摘 要: 基于前人对多点地震动合成方法的研究, 提出了一种多点地震动的合成方法。该方法基于复功率谱矩阵的开方分解, 将复功率谱矩阵分解为一个 Hermite 矩阵与其共轭转置矩阵的乘积, 并给出了基于此分解的考虑空间相关性并满足功率谱矩阵的幅值谱和相位谱的求解公式。此外, 在合成功率谱矩阵时还考虑了空间各点地震动自功率谱强度的变化, 以使得合成的多点地震动更好地适用于大跨度结构物的多点输入分析。

关键词: 地震动合成; 多点地震输入; 空间相关; 功率谱矩阵; 开方分解

中图分类号: P315.9 **文献标志码:** A

SIMULATION OF SPATIAL CORRELATIVE GROUND MOTIONS BASED ON THE SQUARE ROOT OPERATION OF POWER SPECTRUM MATRIX

WU Yong-xin^{1,2}, GAO Yu-feng^{1,2}

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on previous studies, a simulation method for multi-point ground motion time histories is developed. Employing the square root operation of complex power spectral density matrix, the paper defined the complex power spectral density matrix as the product of Hermite matrix and its conjugate transposed matrix. Meanwhile, the relationship between amplitudes, phase angels of simulated ground motions and the element of the Hermite matrix was given. In addition, the variation of the amplitude of white-noise bedrock acceleration was taken in account, which makes this method more suitable for the simulation of the multi-point ground motions of long-span structures.

Key words: ground motion simulation; multi-point input; spatial correlative; power spectral density matrix; square root operation

当对重要结构物进行抗震设计时, 我国规范中规定需要采用地震动时程曲线进行动力分析。在动力分析中, 输入的地震动至关重要, 一般对结构物进行动力分析时常采用一致地震动输入, 这样的输入条件对于小尺度结构物可以接受, 但对于大跨度的结构物, 如土石坝、大型桥梁、长距离管道等, 则显得粗糙。实际地震台阵的强震记录表明, 在 50m 的范围内地震动即有明显的差异, 且地震动空间随

机场的差异对大型基础结构有较大的影响^[1]。早在 1965 年 Bogdanoff 就指出了行波效应对大跨度结构物反应的影响^[2], 近年相关研究表明多点地震作用对大跨度结构物有较大影响^[3-5]。因此, 对于大跨度结构物有必要进行多点输入, 而有限的台阵记录难以满足抗震计算时地震动输入的要求, 所以有必要提出一套比较合理的多点地震动合成方法。

对如何合成空间相关多点地震动, 国内外许多

收稿日期: 2010-06-28; 修改日期: 2010-10-11

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(90815020); 国家自然科学基金项目(50808067)

通讯作者: 高玉峰(1966—), 男, 安徽来安人, 教授, 博士, 主要从事土动力学与工程抗震等研究(E-mail: yfgao66@yahoo.com.cn).

作者简介: 吴勇信(1985—), 男, 江苏射阳人, 博士生, 主要从事土工抗震等研究(E-mail: yongxinwuhhu@yahoo.com.cn).

学者做了研究。Hao^[6]在合成单点地震动的基础上提出了多点地震动的合成方法,即将地震功率谱矩阵进行 Cholesky 分解,通过运算得到某点地震动不同频率分量处的幅值和相位与功率谱矩阵分解值之间的关系,再对有随机分布相位角的余弦函数双求和,得到各点的地震动时程。该方法在生成某点地震动时只考虑了与在其前生成的各点地震动的相关性,而未考虑与在其后生成的地震动的相关性;屈铁军^[7-8]对 Hao 的方法进行了改进,生成每一个点地震动时均考虑与其它各个点的相关性;刘天明^[9]在屈铁军研究的基础上对功率谱矩阵的分解方法进行了改进,提高了多点地震动合成的效率;夏友柏^[10]给出了一种相位角是确定的多点地震动的合成公式,而通过对迟滞相关矩阵进行分解来求得幅值谱;姜海鹏^[11]在 Hao 的基础上将随机振动理论和相位差谱相结合,提出了一种直接生成时频非平稳特性的空间变异地震动的方法;董汝博^[12]根据地地震波的传播特点,对屈铁军的合成方法进行了修改,通过修正随机相位角,使生成的多点地震动在局部场地上具有收敛性,并给出了已知相位差谱和未知相位差谱两种情况下的多点非平稳地震动的合成方法。Ramadam^[13]等给出了一种渐进的合成方法,通过调整求和项的幅值来满足对互功率谱的要求。Ayman^[14]基于单点地震动合成的不同频率下余弦函数求和法,引入滞时及相关相位角,提出一种能够合成与给定地震记录的谱特征相似的多点地震动合成方法。此外,Alves S W 和 Hall J F^[15]基于拱坝现有的空间地震动台阵记录模拟地震台网未建立前所发生中台阵测点处的地震动,并通过计算拱坝在所模拟的空间相干地震动的作用下的动力反应与 Northridge 地震中坝体反应的实测值进行比较来验证模拟的合理性。

尽管文献[7-8]对 Hao 的方法进行了改进,然而由于其对功率谱矩阵按 Cholesky 法分解成下三角与上三角的乘积,当按照其所提出来的公式进行计算时,合成的多点地震动与 Hao 的方法合成的多点地震动没有显著差异。本文通过将功率谱矩阵分解为一个 Hermite 矩阵与其共轭转置矩阵的乘积,并基于相位差谱的统计规律得到随机相位角,从而给出一种能够真正实现生成每个点的地震动时均考虑与其它各点相关性的多点非平稳地震动的合成方法。

1 空间相关多点非平稳地震动的合成

1.1 功率谱矩阵的生成

合成空间相关多点平稳地震动的前提是生成功率谱矩阵:

$$\underline{S}(i\omega_k) = \begin{bmatrix} S_1(\omega_k) & S_{12}(i\omega_k) & \mathbf{L} & S_{1n}(i\omega_k) \\ S_{21}(i\omega_k) & S_2(\omega_k) & \mathbf{L} & S_{2n}(i\omega_k) \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ S_{n1}(i\omega_k) & S_{n2}(i\omega_k) & \mathbf{L} & S_n(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:功率谱矩阵的对角线元素为自功率谱,其它元素为互功率谱;下划线表示功率谱矩阵为复矩阵。

平稳的自功率谱模型一般可选用胡聿贤模型(修正的 Kainai 模型),在许多文献中合成多点地震动时都假定各点的自功率谱矩阵相同,然而屈铁军^[16-17]基于 Kainai 模型运用 SMART-1 的三次台阵记录得出谱强度 S_0 在场地上的变化是比较明显的,其随土层厚度增加而增加,随测点距震中的距离增加而减少,给出:

$$\Delta S_0 = 0.2571\Delta h - 0.0124\Delta X \quad (2)$$

式中: $\Delta S_0 / (\text{cm}^2/(\text{rad} \cdot \text{s}^3))$ 为测点间功率谱强度的差值; $\Delta h / \text{m}$ 为两测点之间的土层厚度(从基岩到地表)差; $\Delta X / \text{m}$ 为两测点间的坐标差(震中距差)。

可见对于一些跨度很大的结构物,如大坝、大跨度桥梁等,其动力分析输入点之间的距离有时可达 1km,甚至更大。此时,如果再作空间各点的自功率谱相同的假定就显得过于粗糙。

空间任意两点 i, j 的互功率谱为:

$$S_{ij}(i\omega) = \sqrt{S_i(i\omega)S_j(i\omega)} |\rho_{ij}(d_{ij}, \omega)| e^{-i\omega \frac{d_{ij}}{v_a(\omega)}} \quad (3)$$

式中: d_{ij} 为连接两点的矢量在地震波入射方向上的投影,有正负之分; $v_a(\omega)$ 为视波速,是频率的函数,但一般为简化起见取其为一固定值; $|\rho_{ij}(d_{ij}, \omega)|$ 为迟滞相关函数,有屈铁军模型^[17]、Feng 和 Hu 模型^[18]以及 Harichandran 和 Vanmarcke 模型^[19]等。

如上所述,由自功率谱模型就可以得到功率谱矩阵中的对角线元素,互功率谱模型就可以得到功率谱矩阵中的其它元素,从而得到了功率谱矩阵。

1.2 空间相关多点平稳地震动的合成公式

屈铁军等^[7-8]对 Hao 的合成方法进行了改进,得到了多点地震动的合成方法。当要生成 n 个点的地震动时程时,其每个点的地震动时程都考虑了与

其它 $n-1$ 个点地震动的空间相关性, 该方法的合成公式为:

$$\begin{cases} u_1(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{1m}(\omega_k) \cos[\omega_k t + \theta_{1m}(\omega_k) + \varphi_{mk}] \\ u_2(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{2m}(\omega_k) \cos[\omega_k t + \theta_{2m}(\omega_k) + \varphi_{mk}] \\ \vdots \\ u_n(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{nm}(\omega_k) \cos[\omega_k t + \theta_{nm}(\omega_k) + \varphi_{mk}] \end{cases} \quad \mathbf{L} \quad (4)$$

式中: $\alpha_{nm}(\omega_k)$ 和 $\theta_{nm}(\omega_k)$ 是考虑第 n 个点与第 m 个点相关性的第 k 个频率成分的幅值与相位角, 它们都是确定性的量, 取值要满足第 n 个点与第 m 个点的相关性和相位特性. φ_{mk} 是 $(0, 2\pi)$ 均匀分布的且相互独立的随机相位角.

第 i 个点时程 $u_i(t)$ 的第 k 个窄频带信号 $u_{ik}(t)$ 与第 j 点时程 $u_j(t)$ 的第 k 个窄频带信号 $u_{jk}(t)$ 的表达式为:

$$u_{ik}(t) = \sum_{m=1}^n a_{im}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{im} + \varphi_{mk}) \quad (5)$$

$$u_{jk}(t) = \sum_{r=1}^n a_{jr}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{jr} + \varphi_{mk}) \quad (6)$$

它们的相关函数为:

$$R_{ijk}(0) = E[u_{ik}(t)u_{jk}(t)] \quad (7)$$

将式(5)与式(6)代入式(7), 就可得到:

$$R_{ijk}(0) = E \left[\sum_{m=1}^n a_{im}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{im} + \varphi_{mk}) \times \sum_{r=1}^n a_{jr}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{jr} + \varphi_{rk}) \right] \quad (8)$$

通过证明可以得到(具体推导过程见附录):

$$R_{ijk}(0) = \sum_{m=1}^n \frac{a_{im} a_{jm}}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^n \frac{a_{im} a_{jm}}{2} e^{i(\theta_{im} - \theta_{jm})} \right] \quad (9)$$

而互功率谱与相关函数存在如下的关系^[3]:

$$R_{ijk}(0) = 2\Delta\omega \operatorname{Re}[S_{ij}(i\omega_k)] \quad (10)$$

式中, $\Delta\omega$ 为频带宽度.

本文采用特征正交分解法, 将功率谱矩阵分解为一个 Hermite 矩阵与其共轭转置矩阵的乘积, 从而实现功率谱矩阵的开方运算, 即:

$$\underline{\mathbf{S}}(i\omega_k) = \underline{\mathbf{U}}(i\omega_k) \times \underline{\mathbf{U}}^H(i\omega_k) \quad (11)$$

且式(11)中的 $\underline{\mathbf{U}}(i\omega)$ 满足 $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^H$, $\underline{\mathbf{U}}^H$ 为 $\underline{\mathbf{U}}$ 的共轭转置矩阵, 则 $\underline{\mathbf{U}}(i\omega_k)$ 可以表示为:

$$\underline{\mathbf{U}}(i\omega_k) = \begin{bmatrix} u_{11}(\omega_k) & u_{21}^*(i\omega_k) & \mathbf{L} & u_{n1}^*(i\omega_k) \\ u_{21}(i\omega_k) & u_{22}(\omega_k) & \mathbf{L} & u_{n2}^*(i\omega_k) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ u_{n1}(i\omega_k) & u_{n2}(i\omega_k) & \mathbf{L} & u_{nn}(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)中矩阵各元素的求解可以通过对功率谱矩阵的开方运算而得到. 具体如下:

由矩阵论的知识, 可先将功率谱矩阵作振型分解:

$$[\underline{\mathbf{S}}(i\omega_k)]\Phi = \Phi[\Lambda^2] \quad (13)$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \mathbf{L}, \phi_n] \quad (14)$$

$$[\Lambda^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \mathbf{O} & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)中 $\phi_i (i=1, 2, \mathbf{L}, n)$ 为归一化的特征向量, 即满足:

$$\{\phi_i\}^T \{\phi_j\} = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ 为 Kronecker 函数}) \quad (16)$$

式(15)中的 $\lambda_i (i=1, 2, \mathbf{L}, n)$ 为特征值, 其对应的特征向量为 ϕ_i .

则:

$$\underline{\mathbf{S}}(i\omega_k) = \Phi[\Lambda^2]\Phi^T = \Phi[\Lambda]\Phi^T\Phi[\Lambda]\Phi^T = \underline{\mathbf{U}}(i\omega_k)\underline{\mathbf{U}}^H(i\omega_k) \quad (17)$$

这样就可以得到式(12)中各元素的值. 而由式(11)、式(12)又可知:

$$S_{ij}(i\omega_k) = \sum_{m=1}^n u_{im}(i\omega_k)u_{jm}^*(i\omega_k) \quad (18)$$

将式(18)代入式(10)得:

$$R_{ijk}(0) = 2\Delta\omega \operatorname{Re} \sum_{m=1}^n u_{im}(i\omega_k)u_{jm}^*(i\omega_k) \quad (19)$$

比较式(19)与式(9)可得:

$$a_{ij} = 2\sqrt{\Delta\omega} |u_{ij}(i\omega_k)| \quad (20)$$

$$\theta_{ij} = \arctan \frac{\operatorname{Im}[u_{ij}(i\omega_k)]}{\operatorname{Re}[u_{ij}(i\omega_k)]} \quad (21)$$

将式(20)、式(21)代入式(4)就可以得到各点平稳的地震动时程曲线.

1.3 非平稳地震动的产生

通过上节的方法所合成的各点的地震动是平稳的,然而实际地震记录表明地震动是非平稳的,它的非平稳性主要表现在两个方面:一是时域内的非平稳性,即幅值非平稳性,表现为地震的幅值总是开始小,然后逐渐增大进入相对平稳阶段,最后再衰减;二是频域内的非平稳性,表现为高频成分先到、低频成分随后。

Ohsaki^[20]提出相位差谱的概念,并指出了相位差谱对强度包络曲线的影响。朱昱和冯启明^[21-22]指出强震加速度时程的相位差分布符合对数正态分布,并研究了基岩场地上的加速度记录相位差谱分布的统计平均的数字特征。

假设符合对数分布的相位差 $-\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi \in (-2\pi, 0)$) 的均值为 λ 、方差为 ξ ,要生成符合该分布的相位差谱,可以利用正态分布随机数的生成器先生成均值为 μ 、方差为 σ 的正态分布的随机数 ψ , 其中:

$$\mu = \ln \lambda - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \right) \quad (22)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \right)} \quad (23)$$

且相位差谱的分布曲线的解析式可以表示为:

$$f(x) = \frac{1}{(-\Delta\varphi)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln(-\Delta\varphi) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (24)$$

得到了随机数 ψ 后,则可按下式得到相位差谱:

$$\Delta\varphi = -e^\psi \quad (25)$$

从而按 $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta\varphi_k$ 就可以得到相位谱,且一般假定 $\varphi_0 = 0$ 。

2 合成实例

本文拟合成的地震动的峰值加速度为 2.0m/s^2 、持时为 24s ,拟合成的空间各点的间距为 250m ,即合成各点离参考点 O 点的距离 r 分别为 0m 、 250m 、 500m 、 750m 、 1000m ,且假设各点均位于同一水平面上,各点的平面布置如图 1 所示。

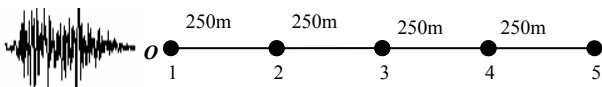


图 1 各点平面位置示意图

Fig.1 Layout chart of simulated points

2.1 自功率谱模型及其参数选取

本文选取的自功率谱模型为胡聿贤模型(修正

的 Kainai 模型),该模型的表达式为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^6}{\omega^6 + \omega_c^6} \frac{1 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)^2 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} S_0 \quad (26)$$

式中: ω_g 为场地的基频; ω_c 为低频截止频率; ξ_g 为场地的阻尼; S_0 为白噪声功率谱密度,一般可以按下式确定^[23]:

$$S_0 = \frac{\text{PGA}}{P^2 \times \text{var}} \quad (27)$$

$$P = \sqrt{2 \times \ln \left(\frac{2.8 \cdot \Omega \cdot t_{\max}}{2\pi} \right)} \quad (28)$$

式中: PGA 为地震加速度峰值; P 为峰值因子,其可以按式(28)确定; t_{\max} 为持时。

参考文献[11],求解 S_0 时各参数的取值如表 1。

表 1 求解 S_0 时各参数的取值

Table 1 The values of parameters for getting S_0

参数	Ω/rad	var	t_{\max}/s	PGA/(m/s ²)
取值	21.963	125.529	24	1.96

注:该表中给出的为求解第一个点 S_0 时各参数取值,其它各点 S_0 的值在第 1 个点的基础上按照式(2)给出的公式计算。

参考文献[8],自功率谱模型中其它各参数的取值如表 2。

表 2 胡聿贤模型各参数的取值

Table 2 The parameter' values of Hu yuxian's auto-spectrum model

参数	$\omega_g/(\text{rad/s})$	$\omega_c/(\text{rad/s})$	ξ_g
取值	10	1.8	0.5

2.2 互功率谱模型及其参数选取

互功率谱的求解如式(3)所示,其中最重要的就是迟滞相干函数模型的选取。本文选取的迟滞相干函数模型为 Feng 和 Hu 模型^[18],该模型的表达式为:

$$\rho_{ij}(d_{ij}, \omega) = e^{-(\rho_1 \omega + \rho_2) d_{ij}} \quad (29)$$

式中: ρ_1 、 ρ_2 为待拟合的参数; d_{ij} 为两点之间的距离。

本文中取 $\rho_1 = 2 \times 10^{-5} \text{s/m}$, $\rho_2 = 88 \times 10^{-5} \text{1/m}$ 。此外,视波速 $v_a(\omega)$ 取为定值 500m/s 。

2.3 相位差谱分布模型及其参数选取

朱昱对强震加速度时程的相位差谱进行了分析,认为相位差谱符合对数正态分布,用该分布产生的随机相角在合成人造地震动时程时并不需要叠加强度包络函数,所得人造地震动就可以实现时

频的非平稳性。本文假定空间各点的相位差谱数字统计特征相同，并参考文献[22]的统计结果，取符合对数正态分布的相位差谱的均值 $\lambda = 2.079$ 、标准差 $\xi = 1.942$ ，以生成随机分布的相位差谱，从而得到随机相位谱。

2.4 合成结果

利用上述模型及给定的参数，合成了空间相关的非平稳地震动时程，所合成的各点地震动加速度时程曲线如图 2 所示。

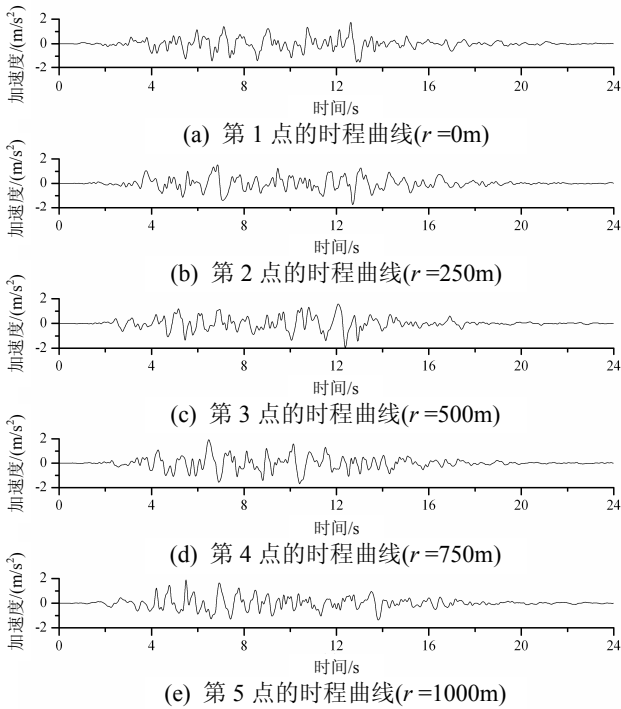


图 2 合成的各点加速度时程曲线

Fig.2 Simulated spatially correlative ground motions

同时本文还对该模拟方法所模拟的地震动的自功率谱和互功率谱进行了比较，如图 3、图 4 所示。图 3 为第 1 点的自功率谱目标值与模拟值的比

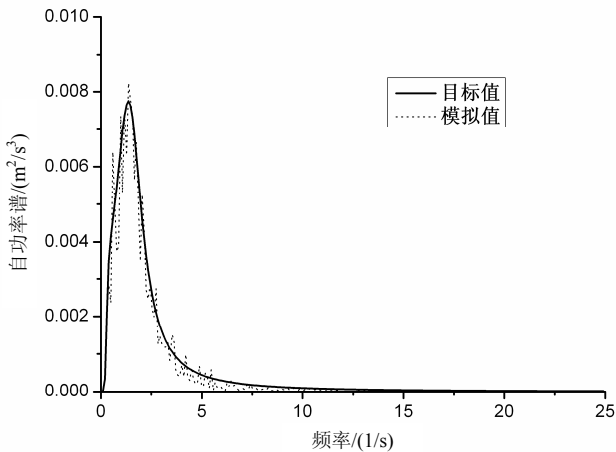


图 3 第 1 点自功率谱目标值与模拟值的比较

Fig.3 Comparison of the target auto-power spectrum of the first point with the simulated one

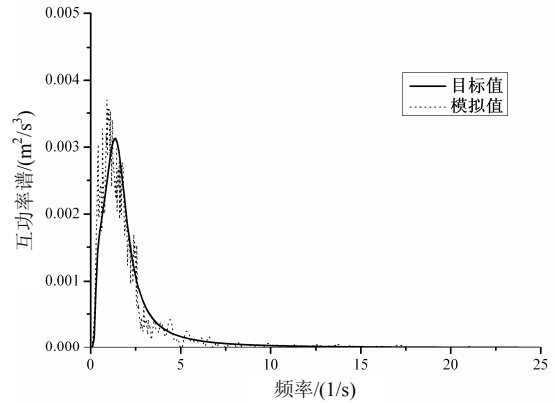


图 4 第 1 点与第 5 点互功率谱目标值与模拟值的比较

Fig.4 Comparison between the target cross-power spectrum and the simulated one for the first point and the last point

较，图 4 为第 1 点与第 5 点的互功率谱的幅值的比较，可见自功率谱、互功率谱的目标值和模拟值吻合较好。其它的自谱、互谱也表现出类似的吻合规律。

3 结论

本文在前人研究的基础上，给出了一种对多点地震动合成方法。在合成功率谱矩阵时考虑了空间各点自功率谱的变化，使所得功率谱矩阵更加符合实际情况；在对功率谱矩阵进行分解时，本文采用开方分解法将功率谱矩阵分解为一个 Hermite 矩阵与其共轭转置矩阵的乘积，给出了一种多点地震动的合成方法，并通过推导给出了合成公式中各参数的取值，使得通过该方法合成的空间相关地震动的任两点之间的相关性与所给定的目标值相一致；此外，本文对地震动时程进行非平稳化处理时，运用相位差谱来生成随机相位角，实现地震动的时频非平稳化。在需对大跨度结构物进行多点输入时程反应分析时，常常由于台阵资料稀缺需人工合成多点地震动，本文提出的合成方法可以作为获得多点地震动的一种有效途径。

但是，本文方法的计算效率没有屈铁军的方法高，因为矩阵的开方分解要比 Cholesky 分解计算量大，特别是在模拟点数较多时。如何克服本文方法的计算效率不高的缺点，需作进一步研究。因为 Matlab 软件中有自带的较为完善的开方分解程序，建议在应用中基于 Matlab 软件编程实现。

参考文献:

[1] Feng Q M, Hu Y X. Spatial correlation of earthquake motion and its effect on structural response [C]// Hu Yuxian. Proceeding of US-PRC, Bilateral Workshop on

- Earthquake Engineering, Beijing: 1982.
- [2] Bogdanoff J, Goldber J, Shiff J. The effect of ground transmission time on the response of long structures [J]. The Bulletin of Seismological Society of America, 1965, 55: 627—640.
- [3] Chen M T, Harichandran R S. Response of an earth dam to spatially varying earthquake ground motion [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(9): 932—939.
- [4] Yasemin B, Alemdar B, Kurtulus S. Stochastic dynamic response of dam-reservoir-foundation systems to spatially varying earthquake ground motions [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009, 29(3): 444—458.
- [5] Zhang Y H, Li Q S, Lin J H, Williams F W. Random vibration analysis of long-span structures subjected to spatially varying ground motions [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009, 29(4): 620—629.
- [6] Hao H, Oliveira C S, Penzien J. Multiple-station ground motion processing and simulation based on SMART-1 array data [J]. Nuclear Engineering and Design, 1989, 111(3): 293—310.
- [7] 屈铁军, 王前信. 空间相关的多点地震动合成(I): 基本公式[J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(1): 8—15.
Qu Tiejun, Wang Qianxin. Simulation of spatially correlative time histories of multi-point ground motion, Part I: Fundamental formulas [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1998, 18(1): 8—15. (in Chinese)
- [8] 屈铁军, 王前信. 空间相关的多点地震动合成(II): 合成实例[J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(2): 25—32.
Qu Tiejun, Wang Qianxin. Simulation of spatially correlative time histories of multi-point ground motion, Part II: Application of fundamental formulas [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1998, 18(2): 25—32. (in Chinese)
- [9] 刘先明, 叶继红, 李爱群. 空间相关多点地震动合成的简化方法[J]. 工程抗震, 2003(1): 30—36.
Liu Xianming, Ye Jihong, Li Aiqun. A simplified method for the simulation of the time histories of spatially correlative multi-point ground motion [J]. Earthquake Resistant Engineering, 2003(1): 30—36. (in Chinese)
- [10] 夏友柏, 王年桥, 张尚根. 一种合成多点地震动时程的方法[J]. 世界地震工程, 2002, 18(1): 119—122.
Xia Youbai, Wang Nianqiao, Zhang Shanggen. A simulation method for spatial correlative time histories of multi-point ground motion [J]. World Information on Earthquake Engineering, 2002, 18(1): 119—122. (in Chinese)
- [11] 姜海鹏, 王航, 杨庆山. 空间变异地震作用下大型连续刚构桥的延性性能分析[J]. 铁道工程学报, 2001(2): 37—45.
Jiang Haipeng, Wang Hang, Yang Qingshan. Behavior of long rigid frame rc bridges subjected to spatial varying ground motion: (1) Generation of spatial varying ground motion based on phase difference spectrum [J]. Journal of Railway Engineering Society, 2001(2): 37—45. (in Chinese)
- [12] 董汝博, 周晶, 冯新. 非平稳空间相关多点地震动合成方法研究[J]. 地震工程与工程振动, 2007, 27(3): 10—14.
Dong Rubo, Zhou Jing, Feng Xin. Simulation of non-stationary correlative time histories of multi-point ground motion [J]. Journal of Engineering and Engineering Vibration, 2007, 27(3): 10—14. (in Chinese)
- [13] Ramadan O, Novak M. Simulation of spatially incoherent random ground motions [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1993, 119(5): 997—1016.
- [14] Ayman A Shama. Simplified procedure for simulating spatially correlated earthquake ground motions [J]. Engineering Structures, 2007, 29: 248—258.
- [15] Alves S W, Hall J F. Generation of spatially nonuniform ground motion for nonlinear analysis of a concrete arch dam [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(11): 1339—1357.
- [16] 屈铁军, 王前信. SMART-1 台阵记录的自功率谱特性研究[J]. 世界地震工程, 1995, 11(1): 35—43.
Qu Tiejun, Wang Qianxin. Study on characteristics of spectra of ground motion record at SMART-1 array [J]. World Information on Earthquake Engineering, 1995, 11(1): 35—43. (in Chinese)
- [17] 屈铁军, 王君杰, 王前信. 空间变化的地震功率谱的实用模型[J]. 地震学报, 1996, 18(1): 55—62.
Qu Tiejun, Wang Junjie, Wang Qianxin. A practical model for the power spectrum of spatially varying ground motion [J]. Acta Seismologica Sinica, 1996, 18(1): 55—62. (in Chinese)
- [18] Feng Q M, Hu Y X. Spatial correlation of earthquake motion and its effect on structural response [C]. Proceeding USPRC Bilateral Workshop on Earthquake Engineering, 1982, 1: A-5-1—A-5-14.
- [19] Harichandran R S, Vanmarcke E H. Stochastic variation of earthquake ground motion in space and time [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, 112(2): 154—174.
- [20] Ohsaki Y. On the significance of phase content in earthquake ground motions [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1979, 7(5): 427—439.
- [21] 朱昱, 冯启明. 相位差谱的分布特征和人造地震动[J]. 地震工程与工程振动, 1992, 12(1): 37—44.
Zhu Yu, Feng Qiming. Digital characteristics of phase difference spectrum distribution of earthquake accelerogram [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1992, 12(1): 37—44. (in Chinese)
- [22] 朱昱, 冯启明. 地震加速度相位差谱分布的数字特征[J]. 地震工程与工程振动, 1993, 13(2): 30—37.
Zhu Yu, Feng Qiming. Distribution characteristic of phase difference spectrum and artificial accelerogram [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1993, 13(2): 30—37. (in Chinese)
- [23] Vanmarcke E H. Structural response to earthquakes [M]. Seismic Risk and Engineering Decision, McGraw-Hill, New York, NY, 1977: 287—337.

附录:

公式 $R_{ijk}(0) = \text{Re} \left[\sum_{m=1}^n \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} e^{i(\theta_{im} - \theta_{jm})} \right]$ 的推导:

$R_{ijk}(0)$ 可以表示为下式:

$$R_{ijk}(0) = E \left[\sum_{m=1}^n a_{im}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{im} + \varphi_{mk}) \times \sum_{r=1}^n a_{jr}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{jr} + \varphi_{rk}) \right] \quad (\text{A1})$$

根据概率论的知识可知, 随机变量和的期望等于各随机变量的平均值之和。将上式求和展开, 共 n^2 项。其中任何一项的期望可表示成:

$$E[a_{im}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{im} + \varphi_{mk}) a_{jr}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{jr} + \varphi_{rk})] = E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jr} + \varphi_{mk} + \varphi_{rk}) \right] + E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + \varphi_{mk} - \varphi_{rk}) \right] \quad (\text{A2})$$

① 当 $m \neq r$ 时

由于式(A2)中的 φ_{mk} 、 φ_{rk} 是 2 个独立的随机变量, 且它们的概率密度函数相同, 设其为 $f(x)$, 则有:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 2\pi \end{cases} \quad (\text{A3})$$

将 $\varphi_{mk} + \varphi_{rk}$ 看作一个随机变量, 则这个新的随机变量的概率密度函数可由两个独立的随机变量的概率密度函数求得。设 $\varphi_{mk} + \varphi_{rk}$ 的概率密度函数为 $f_1(x)$, 则由概率论知识可知:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4\pi^2} x, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \frac{1}{4\pi^2} (4\pi - x), & 2\pi < x \leq 4\pi \\ 0, & x > 4\pi \end{cases} \quad (\text{A4})$$

同理, 将 $\varphi_{mk} - \varphi_{rk}$ 看作一个随机变量, 则该随机变量的概率密度函数可由两个独立的随机变量的概率密度函数求得。设 $\varphi_{mk} - \varphi_{rk}$ 的概率密度函数为 $f_2(x)$, 则由概率论知识可知:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < -2\pi \\ \frac{1}{4\pi^2} (x + 2\pi), & -2\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{4\pi^2} (2\pi - x), & 0 < x \leq 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases} \quad (\text{A5})$$

所以, 式(A2)的第 1 项为:

$$E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jr} + \varphi_{mk} + \varphi_{rk}) \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jr} + x) f_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jr} + x) \frac{x}{4\pi^2} dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jr} + x) \frac{(4\pi - x)}{4\pi^2} dx = 0 \quad (\text{A6})$$

式(A2)的第 2 项为:

$$E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + \varphi_{mk} - \varphi_{rk}) \right] = E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + x) f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + x) f_2(x) dx = \int_{-2\pi}^0 \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + x) \frac{x + 2\pi}{4\pi^2} dx + \int_0^{2\pi} \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jr}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jr} + x) \frac{2\pi - x}{4\pi^2} dx = 0 \quad (\text{A7}) \right]$$

由式(A6)、式(A7)可知当 $m \neq r$ 时, 式(A2)所展开的各项的期望均为 0, 这样的项共有 $n \times (n-1)$ 个。

② 当 $m = r$ 时

式(A2)所展开的相关项为:

$$E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jm} + 2\varphi_{mk}) + \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) \right] = E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jm} + 2x) f(x) dx + \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) \right] = E \left[\frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(2\omega_k t + \theta_{im} + \theta_{jm} + 2x) \frac{1}{2\pi} dx + \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) \right] = \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) \quad (\text{A8})$$

可知当 $m = r$ 时, 式(A2)展开各项的期望如式(A8)所示, 这样的项共有 n 项。

综上所述可得:

$$R_{ijk}(0) = E \left[\sum_{m=1}^n a_{im}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{im} + \varphi_{mk}) \times \sum_{r=1}^n a_{jr}(\omega_k) \cos(\omega_k t + \theta_{jr} + \varphi_{rk}) \right] = \sum_{m=1}^n \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} \cos(\theta_{im} - \theta_{jm}) = \text{Re} \left[\sum_{m=1}^n \frac{a_{im}(\omega_k) a_{jm}(\omega_k)}{2} e^{i(\theta_{im} - \theta_{jm})} \right] \quad (\text{A9})$$