

文章编号: 1000-4750(2012)03-0001-08

动力刚度法求解平面曲梁面外自由振动问题

叶康生, 赵雪健

(清华大学土木工程系, 土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 该文将动力刚度法应用于平面曲梁面外自由振动的分析。通过建立单元动力刚度所满足的常微分方程边值问题, 用具有自适应求解功能的常微分方程求解器 COLSYS 进行求解, 获得单元动力刚度的数值精确解。以 COLSYS 求解单元动力刚度的网格作为单元上固端频率计数求解的子网格, 由单元动力刚度的边值问题解答线性组合出该子网格下各子单元的动力刚度, 由 Wittrick-Williams 算法获得单元固端频率的计数。从而实现整体结构的 Wittrick-Williams 频率计数。通过建立单元动力刚度对频率的导数所满足的常微分方程边值问题, 调用 COLSYS 求其数值精确解, 并将其引入导护型牛顿法, 可迅速求得结构精确的频率和振型。数值算例表明, 该文方法准确、可靠、有效。

关键词: 动力刚度法; 导护型牛顿法; Wittrick-Williams 算法; 平面曲梁; 面外自由振动

中图分类号: TU311.3 **文献标志码:** A

DYNAMIC STIFFNESS METHOD FOR OUT-OF-PLANE FREE VIBRATION ANALYSIS OF PLANAR CURVED BEAMS

YE Kang-sheng, ZHAO Xue-jian

(Key Laboratory of Civil Engineering Safety and Durability of China Education Ministry,

Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: This paper extends the dynamic stiffness method to the out-of-plane free vibration analysis of planar curved beams. The boundary value problem (BVP) for ordinary differential equations (ODEs) which governs element's dynamic stiffnesses is set up and solved by ODE solver COLSYS to get the numerical exact values of element's dynamic stiffnesses. The mesh generated by COLSYS in solving such ODEs is taken as a sub-mesh to calculate the counting of element's fixed-end frequency. On this sub-mesh, each sub-element's dynamic stiffnesses are reduced to linear combination of such ODE solutions. Thus by implementing Wittrick-Williams algorithm on each element, its fixed-end frequency counting is obtained. The derivatives of the dynamic stiffnesses to the frequency are also reduced to solve corresponding ODEs by using COLSYS. Thus the guided and guarded Newton method is set up and structural exact frequencies and vibration modes can be obtained. The numerical examples demonstrate that this method is accurate, reliable and effective.

Key words: dynamic stiffness method; guided and guarded Newton method; Wittrick-Williams algorithm; planar curved beam; out-of plane free vibration

曲梁结构在航天、机械、土木等工程中的应用非常广泛, 因此对其自由振动作出准确分析具有重要意义。从 Den Hartog^[1]用 Rayleigh-Ritz 法求解圆弧拱的自振频率开始, 后续学者对曲梁的自由振动

相继提出了若干分析方法, 其中主要有: 有限差分法^[2]、传递矩阵法^[3]、Galerkin 法^[4]、数值拉普拉斯变换法^[5]、有限元法^[6-10]、波激励法^[11]、微分求积法^[12]、龙格-库塔法^[13]、级数法^[14-15]和动力刚度

收稿日期: 2010-06-23; 修改日期: 2010-10-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(51078198); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT00736)

通讯作者: 叶康生(1972—), 男, 江苏人, 副教授, 博士, 从事结构工程研究(E-mail: yeys@tsinghua.edu.cn).

作者简介: 赵雪健(1985—), 男, 河北人, 硕士生, 从事结构工程研究(E-mail: zhaoxj08@mails.tsinghua.edu.cn).

法^[16-17]，文[18]总结了近年来这一领域的研究进展。

本文研究平面曲梁的自由振动，且曲梁截面关于曲梁轴线所在平面对称，这样曲梁面外振动与面内振动相互解耦，限于篇幅，本文仅研究面外振动，面内振动的成果将另文发表。

在杆系结构的自由振动分析中，动力刚度法^[19-20]是一种精确单元方法。该法将杆件看作无限自由度体系，由杆件的振动控制方程来导出单元精确的动力刚度矩阵^[21-22]，经集成为整体动力刚度矩阵和方程后，最后归结为求解一个非线性特征值问题，求得所需要的自振频率和振型。对该非线性特征值问题，文[19-20]提出的 Wittrick-Williams 算法解决了该非线性特征值问题的频率求解问题，而文[23]提出的导护型牛顿法则解决了该非线性特征值问题的振型求解问题，并实现了频率和振型的同时求解，且求解过程具有二阶收敛速度。该法是一种精确方法，求解精度不依赖于单元网格划分。目前该法已被进一步推广应用于变截面直梁结构的自由振动和弹性稳定问题的分析^[24]。本文将这一方法应用于任意变截面、变曲率平面曲梁面外自由振动的分析，为其频率和振型的计算建立一套精确的求解方法。本文与已有的动力刚度法^[16-17]不同，文[16]的动力刚度法仅适用于常截面圆弧曲梁，文[17]将拉普拉斯变换和级数法结合起来求动力刚度，基于动力刚度矩阵行列式的零点求解频率，本文则用基于 Wittrick-Williams 算法的导护型牛顿法同时求解频率和振型。文[25]指出，基于动力刚度矩阵行列式零点求频率的方法存在着漏根的危险，即计算中可能会漏掉部分频率，而 Wittrick-Williams 计数能确保不漏根。

本文的分析中，考虑曲梁截面剪切变形和转动惯量的影响。动力刚度法是本文采用的基本方法，因此本文在内容安排上先对这一方法作一简要概述，然后详细论述其在本文应用中的具体实施。

1 动力刚度法

动力刚度法将杆件看作无限自由度体系，由杆件自由振动的控制方程来导出单元精确的动力刚度矩阵^[21-22]，经集成为整体动力刚度矩阵和方程后，最后归结为求解如下的非线性特征值问题^[21-22]：

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (1)$$

对该非线性特征值问题的频率计算，Wittrick 和 Williams 在 20 世纪 70 年代初提出了一个非常精致而深刻的算法定理，称为 Wittrick-Williams 算法^[19-20](以下简称 WW 算法)。该算法并不直接计算频率，而是一种计数算法，它给出结构所有频率中低于任意某个给定值 ω^* 的频率个数 J 为：

$$J(\omega^*) = J_0(\omega^*) + s\{\mathbf{K}(\omega^*)\} \quad (2)$$

其中： J_0 是所有单元的固端频率中低于 ω^* 的数目总和； $s\{\cdot\}$ 代表负号的计数； $s\{\mathbf{K}(\omega^*)\}$ 代表用普通 Gauss 消元法将 $\mathbf{K}(\omega^*)$ 消成上三角阵 $\mathbf{K}^\Delta(\omega^*)$ 后(或 \mathbf{LDL}^T 分解中的对角阵 $\bar{\mathbf{D}}$)主对角线上负元素的个数。

根据 WW 算法可发展多种方法计算结构频率，其中最简单的是二分法，步骤大致如下。设欲求结构的第 k 阶频率 ω_k ，只需不断调整 ω_l 和 ω_u ，使得：

$$J(\omega_l) \leq k-1 \quad \text{和} \quad k \leq J(\omega_u) \quad (3)$$

则找到了 ω_k 的一个上界 ω_u 和一个下界 ω_l ，即 $\omega_k \in (\omega_l, \omega_u)$ ，其中 (ω_l, ω_u) 称为 ω_k 的频率区间。然后采用二分法，直至频率区间满足：

$$\omega_u - \omega_l \leq \text{Tol} \cdot (1 + \omega_u) \quad (4)$$

则可停止计算。式中，Tol 是用户事先给定的、希望解答满足的误差限。

WW 算法的提出解决了动力刚度法频率计算的困难，但振型的计算在相当长一段时间内未得到很好的解决，直到 2003 年文[23]导护型牛顿法的提出才彻底解决了这个难题。该法将结构整体动力刚度矩阵在近似频率处作 Taylor 展开后乘以精确的振型向量：

$$\mathbf{K}(\omega_k)\mathbf{D} = \mathbf{K}_a\mathbf{D} + (\omega_k - \omega_a)\hat{\mathbf{K}}_a\mathbf{D} + \mathcal{O}((\omega_k - \omega_a)^2) \quad (5)$$

其中： $\mathbf{K}_a = \mathbf{K}(\omega_a)$ ； $\hat{\mathbf{K}} = d\mathbf{K}/d\omega$ ； $\hat{\mathbf{K}}_a = \hat{\mathbf{K}}(\omega_a)$ 。注意到 $\mathbf{K}(\omega_k)\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ，忽略二阶及高阶微量，便得到：

$$\mathbf{K}_a\mathbf{D} = \mu\hat{\mathbf{K}}_a\mathbf{D} \quad \text{其中} \quad \mu \approx \omega_a - \omega_k \quad (6)$$

该矩阵广义特征值问题的绝对最小特征对，便对应于 $(\omega_a - \omega_k, \mathbf{D})$ 更高精度的解答，采用矩阵特征值问题中常用的逆幂迭代法^[26]即可顺利求解该问题。在求得绝对值最小的特征对 (μ, \mathbf{D}) 后，可由式(6)外插获得精度更高的频率：

$$\omega_\mu = \omega_a - \mu \quad (7)$$

由此得到的 ω_μ 比 ω_a 更接近精确解 ω_k ，对 ω_a 精度有大幅度的改进。取 ω_μ 为新的 ω_a ，再用逆幂迭代法解式(6)并得到新的 (μ, \mathbf{D}) 以及新的 ω_μ ，如此持

续迭代下去, 迭代中对 ω_a 作 Wittrick-Williams 频率计数, 更新频率的上界或下界, 直至频率区间满足式(4)中用户的误差要求。

2 平面曲梁面外自由振动的控制方程

考虑图 1 所示的平面曲梁, s 是曲梁的中性轴坐标。给曲梁建立图示坐标系 xyz , 其中 x 、 y 为曲梁平面内坐标, x 沿轴线切向, y 沿轴线法向, z 垂直于轴线所在平面。记曲梁曲率半径 $R(s)$, 弹性模量 E , 剪切模量 G , 泊松比 ν , 密度 ρ , 截面面积 $A(s)$, 对 y 轴惯性矩 $I_y(s)$, 极惯性矩 $I_p(s)$, 截面剪切刚度修正系数 κ , 扭转常数 $J(s)$, 长度 l 。

曲梁自由振动过程中, 位移、内力均随时间简谐变化, 面外自由振动涉及的截面位移有: 面外位移振幅 w 、对 y 轴转角振幅 ψ_y 、扭转角振幅 ϕ_x , 涉及的截面内力有: 面外剪力振幅 Q_z 、绕 y 轴弯矩振幅 M_y 、扭矩振幅 T_x , 如图 1 所示。

平面弹性曲梁面外自由振动的控制方程不少文献均有推导, 本文不再重复这一工作, 直接引用文[17]的结果。文[17]给出的平衡方程为:

$$\begin{cases} Q'_z = -\rho A \omega^2 w \\ M'_y + T_x / R - Q_z = -\rho I_y \omega^2 \psi_y \\ T'_x - M_y / R = -\rho I_p \omega^2 \phi_x \end{cases} \quad (8)$$

式中 $(\prime) = d() / ds$, 文[17]给出的弹性方程为:

$$\begin{cases} Q_z = \kappa GA (w' + \psi_y) \\ M_y = EI_y (\psi'_y + \phi_x / R) \\ T_x = GJ (\phi'_x - \psi_y / R) \end{cases} \quad (9)$$

若将式(9)代入式(8), 则得纯用位移量表示的控制方程, 本文兼用位移量和内力量, 直接将两式联立, 得其控制方程:

$$\begin{cases} w' = Q_z / (\kappa GA) - \psi_y \\ \psi'_y = M_y / (EI_y) - \phi_x / R \\ \phi'_x = T_x / (GJ) + \psi_y / R \\ Q'_z = -\rho A \omega^2 w \\ M'_y + T_x / R - Q_z = -\rho I_y \omega^2 \psi_y \\ T'_x - M_y / R = -\rho I_p \omega^2 \phi_x \end{cases} \quad (10)$$

以此方程作为求解频率和振型的基本方程。

由前述动力刚度法的求解过程可知, 要实施 Wittrick-Williams 频率计数, 需要获得单元精确的动力刚度和单元固端频率的计数, 要实施导护型牛顿法, 还需要获得单元动力刚度对频率的导数。对

于一般的变截面、变曲率的曲梁, 上述控制方程为变系数常微分方程, 因此很难推得单元动力刚度及其对频率的导数和单元固端频率计数的解析表达式, 本文采用数值求解策略予以解决。

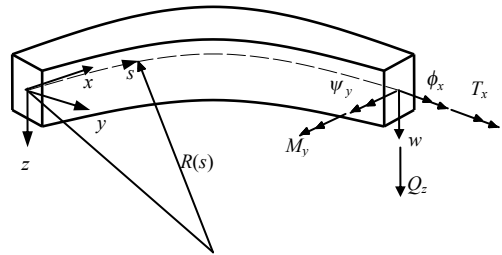


图 1 坐标系和截面内力、位移

Fig.1 The coordinate system and sectional forces and displacements

3 单元动力刚度的求解

如图 2 所示, 将曲梁沿轴线分为若干个单元(通常 2 个~3 个即可), 以其中的单元(e)为例, 单元杆端位移向量和杆端力向量与位移函数和内力函数之间具有如下关系:

$$\begin{cases} \{\mathbf{d}\}^e = \{(w(s_a), \psi_y(s_a), \\ \phi_x(s_a), w(s_b), \psi_y(s_b), \phi_x(s_b))\}^T \\ \{\mathbf{F}\}^e = \{(-Q_z(s_a), -M_y(s_a), \\ -T_x(s_a), Q_z(s_b), M_y(s_b), T_x(s_b))\}^T \end{cases} \quad (11)$$

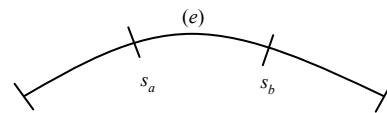


图 2 曲梁单元划分

Fig.2 Element division of curved beam

根据动力刚度定义^[22], 式(10)的单元控制方程在如下边界条件:

$$\{\mathbf{d}\}^e = \{e_j\}, \quad j=1, \dots, 6 \quad (12)$$

下的解对应的杆端力向量 $\{\mathbf{F}\}^e$ 构成单元动力刚度矩阵中第 j 列动力刚度系数(式中 $\{e_j\}$ 为第 j 个元素为单位值的单位向量), 即有:

$$[\mathbf{k}]^e = [\{\mathbf{F}\}_{j=1}^e \ \{\mathbf{F}\}_{j=2}^e \ \{\mathbf{F}\}_{j=3}^e \ \{\mathbf{F}\}_{j=4}^e \ \{\mathbf{F}\}_{j=5}^e \ \{\mathbf{F}\}_{j=6}^e] \quad (13)$$

因此, 只要解出式(10)、式(12)对应的常微分方程边值问题, 即可获得单元精确的动力刚度系数。

近代数学的快速发展推出了一批高质量的常微分方程求解软件, 这些软件往往具有很强的自适应求解功能, 其解答精度往往能达到数值解析解的

精度, 因此这样的软件常称为常微分方程求解器。充分利用这类软件的强大求解功能可使求解达到事半功倍的效果。本文采用常微分方程求解器 COLSYS^[27-28]求解式(10)、式(12)对应的常微分方程边值问题, 由此获得单元动力刚度系数的数值精确解。

由单元动力刚度系数通过单元定位向量进行集成, 即可得到整体动力刚度矩阵 $\mathbf{K}(\omega)$ 。

4 单元固端频率计数的求解

由于式(10)是变系数方程, 因此很难象均匀直梁那样推导出单元固端频率计数 J_0 的解析表达式, 本文亦采用数值求解策略来计算 J_0 。

COLSYS 在求解式(10)、式(12)中的 6 个常微分方程边值问题时, 会自适应产生一个网格, 如图 3 所示, 利用该网格和 Wittrick-Williams 算法, 可求解原单元的 J_0 。

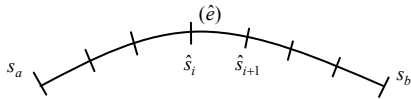


图 3 单元(e)上 COLSYS 求解网格

Fig.3 The mesh division of COLSYS on element (e)

将该单元两端固定, 则该单元变为一个曲梁结构, 用 COLSYS 的网格对其作单元剖分, 这样得到的单元称为原单元的子单元, 用 (\hat{e}) 表示, 对该结构实施 Wittrick-Williams 计数, 有:

$$J_0 = \sum_{\hat{e}} J_0^{(\hat{e})}(\omega) + s \{ \mathbf{K}_s^e(\omega) \} \quad (14)$$

式中: $J_0^{(\hat{e})}$ 为子单元 (\hat{e}) 固端频率中低于 ω 的频率数; $\mathbf{K}_s^e(\omega)$ 为单元(e)对应的曲梁结构(两端固定)在该网格下由子单元动力刚度矩阵集成出的整体动力刚度矩阵。由于 COLSYS 具有很强的自适应求解功能, 其求解网格的子单元具有如下性质:

$$J_0^{(\hat{e})}(\omega) = 0 \quad (15)$$

这一性质虽然目前还不能从数学上严格证明, 但迄今为止的所有数值试验均验证了这一结论的正确性。这实际上是 COLSYS 自适应求解功能的结果: 如果子单元上 $J_0^{(\hat{e})}(\omega) > 0$, 则子单元上存在幅度可以任意放大的固端解, 子单元上的误差就无法得到控制。本文大胆采用这一假设。对于这一网格下子单元的动力刚度系数, 无需重新求解, 可由式(10)、式(12)的 6 组解答线性组合得到, 以子单元 (\hat{e}) 为例, 记其杆端位移向量 $\{\mathbf{d}\}^{(\hat{e})}$ 、杆端力向量 $\{\mathbf{F}\}^{(\hat{e})}$,

设子单元 (\hat{e}) 的动力刚度矩阵为 $[\mathbf{k}_s]^{(\hat{e})}$, 则有:

$$[\mathbf{k}_s]^{(\hat{e})} \{\mathbf{d}\}^{(\hat{e})} = \{\mathbf{F}\}^{(\hat{e})} \quad (16)$$

依次取 $j=1, \dots, 6$ 时式(10)、式(12)解答对应的 $\{\mathbf{d}\}^{(\hat{e})}$ 、 $\{\mathbf{F}\}^{(\hat{e})}$, 联立可得:

$$[\mathbf{k}_s]^{(\hat{e})} [\mathbf{B}]^{(\hat{e})} = [\mathbf{C}]^{(\hat{e})} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{cases} [\mathbf{B}]^{(\hat{e})} = \\ \quad [\{\mathbf{d}\}_{j=1}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{d}\}_{j=2}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{d}\}_{j=3}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{d}\}_{j=4}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{d}\}_{j=5}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{d}\}_{j=6}^{(\hat{e})}] \\ [\mathbf{C}]^{(\hat{e})} = \\ \quad [\{\mathbf{F}\}_{j=1}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{F}\}_{j=2}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{F}\}_{j=3}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{F}\}_{j=4}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{F}\}_{j=5}^{(\hat{e})} \ \{\mathbf{F}\}_{j=6}^{(\hat{e})}] \end{cases} \quad (18)$$

由式(15)可知, $[\mathbf{B}]^{(\hat{e})}$ 非奇异(若奇异, 则可组合出 $\{\mathbf{d}\}^{(\hat{e})} = \{0\}$ 的解答, 则 ω 为子单元 (\hat{e}) 的固端频率, 与式(15)矛盾!), 故可得:

$$[\mathbf{k}_s]^{(\hat{e})} = [\mathbf{C}]^{(\hat{e})} ([\mathbf{B}]^{(\hat{e})})^{-1} \quad (19)$$

由子单元的动力刚度按常规集成可得 $\mathbf{K}_s^e(\omega)$ 。进而由式(14)可求出单元的固端频率计数 J_0 。

5 单元动力刚度对频率导数的求解

为实施导护型牛顿法, 需给出单元动力刚度对频率的导数:

$$[\hat{\mathbf{k}}]^{e} = \frac{d}{d\omega} [\mathbf{k}]^{e} \quad (20)$$

本文调用 COLSYS 获得其数值解, 具体如下。

记位移函数和内力函数对频率的导数为:

$$\begin{cases} \hat{w} = \frac{\partial w}{\partial \omega}, \hat{\psi}_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial \omega}, \hat{\phi}_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial \omega} \\ \hat{Q}_z = \frac{\partial Q_z}{\partial \omega}, \hat{M}_y = \frac{\partial M_y}{\partial \omega}, \hat{T}_x = \frac{\partial T_x}{\partial \omega} \end{cases} \quad (21)$$

则单元杆端位移向量和杆端力向量对频率的导数为:

$$\begin{cases} \{\hat{\mathbf{d}}\}^{e} = (\hat{w}(s_a), \hat{\psi}_y(s_a), \\ \quad \hat{\phi}_x(s_a), \hat{w}(s_b), \hat{\psi}_y(s_b), \hat{\phi}_x(s_b))^T \\ \{\hat{\mathbf{F}}\}^{e} = (-\hat{Q}_z(s_a), -\hat{M}_y(s_a), \\ \quad -\hat{T}_x(s_a), \hat{Q}_z(s_b), \hat{M}_y(s_b), \hat{T}_x(s_b))^T \end{cases} \quad (22)$$

则由式(13)对频率求导得:

$$[\hat{\mathbf{k}}]^{e} = [\{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=1}^{e} \ \{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=2}^{e} \ \{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=3}^{e} \ \{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=4}^{e} \ \{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=5}^{e} \ \{\hat{\mathbf{F}}\}_{j=6}^{e}] \quad (23)$$

又由式(10)、式(12)对频率求导得:

$$\begin{cases} \hat{w}' = \hat{Q}_z / (\kappa GA) - \hat{\psi}_y \\ \hat{\psi}'_y = \hat{M}_y / (EI_y) - \hat{\phi}'_x / R \\ \hat{\phi}'_x = \hat{T}_x / (GJ) + \hat{\psi}_y / R \\ \hat{Q}'_z = -\rho A \omega^2 \hat{w} - 2\rho A \omega w \\ \hat{M}'_y + \hat{T}_x / R - \hat{Q}_z = -\rho I_y \omega^2 \hat{\psi}_y - 2\rho I_y \omega \psi_y \\ \hat{T}'_x - \hat{M}_y / R = -\rho I_p \omega^2 \hat{\phi}_x - 2\rho I_p \omega \phi_x \end{cases} \quad (24)$$

$$\{\hat{d}\}^e = \{0\}, \quad j=1, \dots, 6 \quad (25)$$

式(24)中位移函数 w 、 ψ_y 、 ϕ_x 已由求第 j 个杆端位移对应的动力刚度系数时求得, 是已知的。因此, 用 COLSYS 直接求解式(24)、式(25)对应的 6 组常微分方程边值问题, 即可获得单元动力刚度对频率的导数。经常规集成, 即可获得结构整体动力刚度矩阵对频率的导数。

6 数值算例

本节列举几个典型的数值算例, 以检验本文方法的准确性、可靠性。

例 1. J_0 的计算

考虑两端固支的常截面圆弧曲梁, 圆弧长度为半个圆周, 如图 4 所示, 曲梁基本参数为: $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $E/G = 2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $R = 10 \text{ m}$, $A = 1 \text{ m}^2$, $\kappa = \frac{5}{6}$, $I_y = \frac{1}{12} \text{ m}^4$, $J = I_p = \frac{1}{6} \text{ m}^4$ 。给定频率试探值 $\omega = 1200 \text{ rad/s}$, 将曲梁均匀划分为不同的单元数, 分别计算 J_0 和 J_k , 所得结果列于表 1。由表 1 可见, 子单元法计算 J_0 是很可靠的。

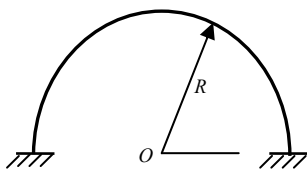


图 4 半圆周曲梁

Fig.4 Semicircle beam

表 1 J_0 和 J_k 的计算

Table 1 Results of J_0 and J_k

单元数	J_0	J_k	$J = J_0 + J_k$
1	10	0	10
2	10	0	10
4	4	6	10
6	6	4	10
8	0	10	10
10	0	10	10

例 2. 两端固支常截面圆弧曲梁

考虑图 5 所示常截面圆弧曲梁, 截面形状为圆

形, 边界条件为两段固支, 文[12]、文[16]曾对该问题进行过研究, 由于是常截面常曲率, 文[16]推导了其解析表达式, 由 WW 算法获得了频率的数值精确解, 本文采用与文[12]、文[16]同样的曲梁参数如下: $E = 2.6 \times 10^7 \text{ Pa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, $\kappa = 0.89$, $A = \pi \text{ m}^2$, $I_y = \frac{\pi}{4} \text{ m}^4$, $J = I_p = \frac{\pi}{2} \text{ m}^4$ 。

曲梁半径由无量纲长细比 $\lambda = R\sqrt{A/I}$ 确定, 本文分别计算曲梁在 2 种长细比 ($\lambda = 20, \lambda = 100$) 和 3 种角度 ($\theta_0 = 60^\circ, \theta_0 = 120^\circ, \theta_0 = 180^\circ$) 情况下的前 4 阶自振频率, 并将其转化为无量纲频率 $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho A / (EI)}$ 。结果列于表 2。从结果可以看出, 本文方法所得结果与精确解完全相同, 体现了本文方法的精确性。图 6 列出了 $\theta_0 = 180^\circ$ 时前 4 阶振型。

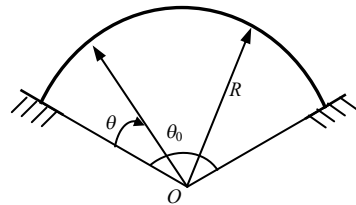


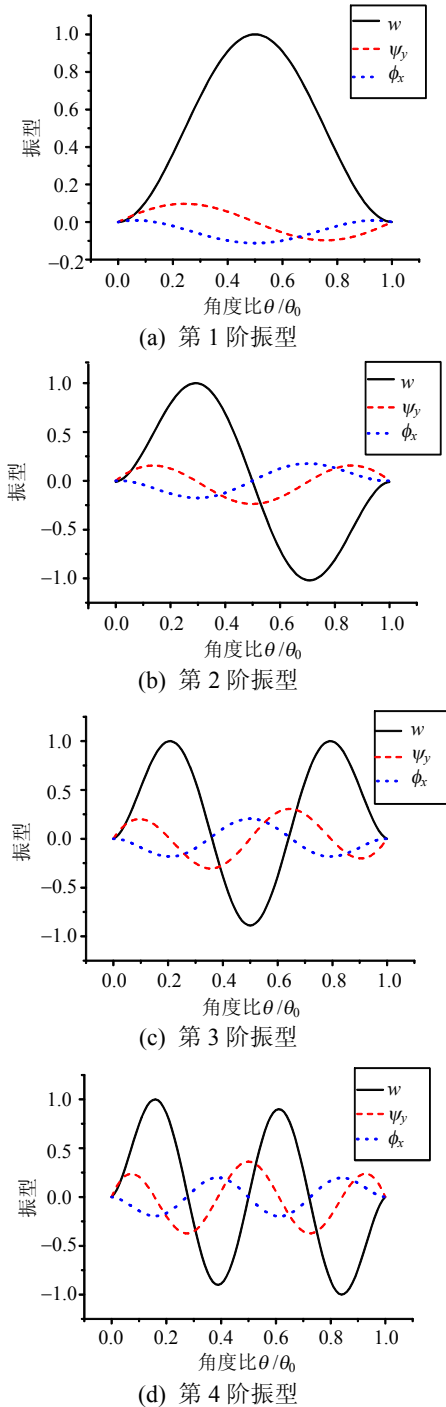
图 5 圆弧曲梁

Fig.5 Circular beam

表 2 圆弧曲梁无量纲频率值 $\bar{\omega}$

Table 2 Non-dimensional natural frequencies of circular beams

λ	角度($^\circ$)	阶次	$\bar{\omega}$		
			本文	精确解文[16]	文[12]
20	60	1	16.885	16.885	16.88
		2	39.700	39.700	39.70
		3	40.934	40.934	40.90
		4	70.581	70.581	70.51
	120	1	4.3094	4.3094	4.309
		2	11.796	11.796	11.79
		3	22.510	22.510	22.50
		4	23.303	23.303	23.30
	180	1	1.7908	1.7908	1.791
		2	5.0324	5.0324	5.032
		3	10.232	10.232	10.23
		4	16.917	16.917	16.91
100	60	1	19.454	19.454	19.45
		2	54.148	54.148	54.14
		3	105.86	105.86	105.9
		4	173.16	173.16	173.1
	120	1	4.4731	4.4731	4.473
		2	12.892	12.892	12.89
		3	26.081	26.081	26.08
		4	43.684	43.684	43.68
	180	1	1.8182	1.8182	1.818
		2	5.2415	5.2415	5.242
		3	10.989	10.989	10.99
		4	18.813	18.813	18.81

图6 圆弧曲梁前4阶振型图 ($\theta_0=180^\circ$)Fig.6 The first four vibration modes of the circular beam ($\theta_0=180^\circ$)

例3. 抛物线曲梁

本例为常截面变曲率曲梁，曲线形式为抛物线，如图7所示，抛物线方程为：

$$y = 0.8x - 0.02771x^2$$

曲梁基本参数为：

$$E = 26\text{GPa}, \quad E/G = 2.6, \quad \rho = 2166.67\text{kg/m}^3, \\ L = 28.87\text{m}, \quad h = 5.774\text{m}, \quad A = 3\text{m}^2, \quad \kappa = 0.833,$$

$$I_y = 0.25\text{m}^4, \quad I_p = 2.5\text{m}^4, \quad J = 0.79\text{m}^4.$$

使用本文方法分别计算曲梁在不同边界条件下的前7阶自振频率，并将其转化为无量纲频率 $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI}$ ，结果列于表3。从表3可以看出，本文结果与文[13]吻合较好。

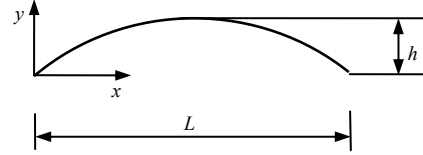


图7 抛物线曲梁

Fig.7 Parabolic beam

表3 抛物线曲梁无量纲频率值

Table 3 Non-dimensional natural frequencies of parabolic beam

频率阶次	两端简支		一端简支，一端固支		两端固支	
	本文	文[13]	本文	文[13]	本文	文[13]
1	6.0826	6.090	11.128	11.15	17.044	17.12
2	30.402	30.40	38.963	39.10	48.399	48.77
3	70.032	70.03	82.191	82.61	95.023	96.06
4	109.80	109.8	109.82	109.8	109.93	109.9
5	125.04	125.0	140.46	141.4	156.50	158.7
6	193.96	194.0	203.77	203.8	203.77	203.8
7	203.77	203.8	212.18	213.8	230.90	234.7

例4. 变截面椭圆弧曲梁

本算例为一变截面变曲率曲梁，曲线形式为半个椭圆，两段固支，如图8所示。曲梁截面为圆形，截面直径 $d(\phi) = d_0(1 + k\phi^2)$ (ϕ 为椭圆弧法线与长轴半径的夹角， $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$)，其中， $d_0 = 6\text{m}$ 为中间截面处的直径。椭圆长轴半径为 $a = 232.3\text{m}$ ，短轴半径为 $b = 189.7\text{m}$ ，曲梁基本参数为： $E = 26\text{GPa}$ ， $E/G = 2.6$ ， $\kappa = 0.89$ ， $\rho = 585\text{kg/m}^3$ ， $A = \frac{\pi}{4}d^2$ ， $I_y = \frac{\pi}{64}d^4$ ， $J = I_p = \frac{\pi}{32}d^4$ 。

文[14]、文[17]均对该算例进行过计算，文[14]未考虑截面剪切变形和绕 y 轴转动惯量的影响，给出了 $k = 0, \pm 0.2$ 三种情况的结果，文[17]考虑了上述影响，但只给出了 $k = 0.2$ 一种情况的结果。本文计算 $k = 0, \pm 0.2$ 三种情况，并分别考虑上述影响和忽略上述影响(本文只要令式(10)、式(23)中系数 $1/\kappa GA$ 和 ρI_y 为零即可忽略上述影响)，计算前8阶自振频率，并将其转化为无量纲频率 $\lambda = \left(\frac{\omega^2 L^4 \rho A_0}{EI_{y0}} \right)^{1/4}$ ，

这里 $L = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ ，计算结果列于表4、表5中。

从表4、表5可以看出，本文结果与文[14]、文[17]

吻合很好。

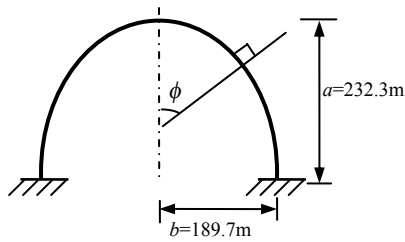


图 8 椭圆弧曲梁
Fig.8 Elliptic beam

表 4 变截面椭圆弧曲梁无量纲频率值
(忽略剪切变形和转动惯量)

Table 4 Non-dimensional natural frequencies of elliptic beam
(neglecting shear deformation and rotary inertia)

频率阶次	$k=0.2$		$k=0$		$k=-0.2$	
	本文	文[14]	本文	文[14]	本文	文[14]
1	1.7113	1.7113	1.3183	1.3183	0.8304	0.8304
2	2.6650	2.6650	2.2598	2.2598	1.7448	1.7448
3	3.7325	3.7325	3.2962	3.2962	2.7211	2.7211
4	4.8241	4.8241	4.3371	4.3371	3.7184	3.7184
5	5.9212	5.9217	5.3676	5.3676	4.6582	4.6581
6	7.0182	7.0183	6.3905	6.3906	5.5799	5.5798
7	8.1142	8.1143	7.4085	7.4085	6.4902	6.4902
8	9.2093	9.2094	8.4230	8.4230	7.3950	7.3950

表 5 变截面椭圆弧曲梁无量纲频率值

Table 5 Non-dimensional natural frequencies of elliptic beam

频率阶次	$k=0.2$		$k=0$	$k=-0.2$
	本文	文[17]	本文	本文
1	1.7109	1.7109	1.3182	0.8304
2	2.6635	2.6635	2.2590	1.7444
3	3.7285	3.7285	3.2938	2.7200
4	4.8158	4.8158	4.3321	3.7159
5	5.9064	5.9065	5.3585	4.6536
6	6.9942	6.9943	6.3755	5.5723
7	8.0780	-	7.3856	6.4785
8	9.1573	-	8.4230	7.3950

7 结论

本文充分利用 COLSYS 的自适应求解功能, 实现对动力刚度、动力刚度对频率的导数以及单元固端频率计数的数值求解, 将 COLSYS 的自适应求解功能充分融入 Wittrick-Williams 算法和导护型牛顿法求解的各个环节, 成功实现了对平面曲梁面外自由振动的精确求解。由于曲率变化, 曲梁固端频率的计数比直梁^[24]困难得多, 本文的子单元方法有效克服了这一困难。本文的牛顿法采用 Wittrick-Williams 计数作为求解过程的引导和保护, 能确保求解过程中不会有频率和振型的遗漏, 而基于动力刚度行列式值求根^[16-17]的方法则存在可能会漏掉

部分频率的危险^[25], 因此相比之下本文方法更为稳定、可靠, 可进一步推广应用于包括轴对称板壳在内的其他结构自由振动的分析。

参考文献:

- [1] Den Hartog J P. The lowest frequency of circular arcs [J]. Philosophical Magazine, 1928, 5(28): 400-408.
- [2] Ball R E. Dynamic analysis of rings by finite differences [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1967, 93: 1-10.
- [3] Bickford W B, Strom B T. Vibration of plane curved beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1975, 39(2): 135-146.
- [4] Chidamparam P, Leissa A W. Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 183(5): 779-795.
- [5] Huang C S, Tseng Y P, Chang S H. Out-of-plane dynamic responses of non-circular curved beams by numerical Laplace transform [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 215(3): 407-424.
- [6] Petyt M, Fleischer C C. Free vibration of a curved beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 1971, 18(1): 17-30.
- [7] Prathap G. The curved beam/deep arch/finite ring element revisited [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21(3): 389-407.
- [8] Yang S Y, Sin H C. Curvature-based beam elements for the analysis of Timoshenko and shear-deformable curved beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(4): 569-584.
- [9] Krishnan A, Suresh Y J. A simple cubic linear element for static and free vibration analyses of curved beams [J]. Computers and Structures, 1998, 68(5): 473-489.
- [10] Kim B Y, Kim C B, Song S G, Beom H G, Cho C. A finite thin circular beam element for out-of-plane vibration analysis of curved beams [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23(5): 1396-1405.
- [11] Kang B, Riedel C H, Tan C A. Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 260(1): 19-44
- [12] Kang K, Bert C W, Striz A G. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 183(2): 353-360.
- [13] Lee B K, Oh S J, Mo J M, Lee T E. Out-of-plane free vibrations of curved beams with variable curvature [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 318(1/2): 227-246.
- [14] Suzuki K, Sugi K, Kosawada T, Takahashi S. Out-of-plane impulse response of a curved bar with

- varying cross-section [J]. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 1986, 29: 4312–4317.
- [15] Suzuki K, Kosawada T, Takahashi S. Out-of-plane vibrations of curved bars with varying cross-section [J]. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 1983, 26: 268–275.
- [16] Howson W P, Jemah A K. Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999, 125(1): 19–25.
- [17] Huang C S, Tseng Y P, Chang S H, Hung C L. Out-of-plane dynamic analysis of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section by dynamic stiffness matrix method [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(3): 495–513.
- [18] 赵跃宇, 康厚军, 冯锐, 劳文全. 曲线梁研究进展[J]. *力学进展*, 2006, 36(2): 170–186.
Zhao Yueyu, Kang Houjun, Feng Rui, Lao Wenquan. Advances of research on curved beams [J]. *Advances in Mechanics*, 2006, 36(2): 170–186. (in Chinese)
- [19] Williams F W, Wittrick W H. An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1970, 12(9): 781–791.
- [20] Williams F W, Wittrick W H. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1971, 24(3): 263–284.
- [21] 袁驷, 叶康生, Williams F W, Kennedy D. 杆系结构自由振动精确求解的理论和算法[J]. *工程力学*, 2005, 22(增刊): 1–6.
Yuan Si, Ye Kangsheng, Williams F W, Kennedy D. Theory and algorithm on the exact computation of free vibration of skeletal structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(Sup.): 1–6. (in Chinese)
- [22] 袁驷. 程序结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
Yuan Si. *Programming structural mechanics* [M]. Beijing: China Higher Education Press, 2008. (in Chinese)
- [23] Yuan S, Ye K, Williams F W, Kennedy D. Recursive second order convergence method for natural frequencies and modes when using dynamic stiffness matrices [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56(12): 1795–1814.
- [24] Yuan S, Ye K, Xiao C, Williams F W, Kennedy D. Exact dynamic stiffness method for non-uniform Timoshenko beam vibrations and Bernoulli-Euler column buckling [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 303(3/4/5): 526–537.
- [25] Williams F W, Yuan S, Ye K, Kennedy D, Djoudi M. Towards deep and simple understanding of the transcendental eigenproblem of structural vibrations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 256(4): 681–693.
- [26] Bathe K J. *Finite element procedures* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [27] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Collocation software for boundary value ODEs [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1981, 7(2): 209–222.
- [28] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary value ODEs [D2] [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1981, 7(2): 223–229.